



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
CIVIL**

Tércio Pereira Jovem

**ESTUDO ANALÍTICO E NUMÉRICO DE REPARTIÇÃO DE CARGA
EM TABULEIROS DE PONTES RETAS COM LONGARINAS
MÚLTIPLAS DE CONCRETO ARMADO**

**Natal
2017**

Tércio Pereira Jovem

**ESTUDO ANALÍTICO E NUMÉRICO DE REPARTIÇÃO DE CARGA
EM TABULEIROS DE PONTES RETAS COM LONGARINAS
MÚLTIPLAS DE CONCRETO ARMADO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Estruturas.

Orientadora: Prof.^a Dra. Ada Cristina Scudelari
Coorientador: Prof. Dr. José Neres da Silva filho

**Natal
2017**

TÉRCIO PEREIRA JOVEM

**ESTUDO ANALÍTICO E NUMÉRICO DE REPARTIÇÃO DE CARGA
EM TABULEIROS DE PONTES RETAS COM LONGARINAS
MÚLTIPLAS DE CONCRETO ARMADO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação, em Engenharia Civil, da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Neres da Silva Filho – Presidente (UFRN)

Prof. Dr. Daniel Nelson Maciel – Examinador Interno (UFRN)

Prof. Dr. Hidelbrando José Farkat Diógenes – Examinador Externo (UFPB)

Natal, 24 de Fevereiro de 2017.

FICHA CATALOGRÁFICA

Divisão de Serviços Técnicos

Catálogo da Publicação na Fonte. UFRN / Biblioteca Central Zila Mamede

<p>Jovem, Tércio Pereira. Estudo Analítico e Numérico de Repartição de Carga em Tabuleiros de Pontes Retas com Longarinas Múltiplas de Concreto Armado / Tércio Pereira Jovem. - Natal, RN, 2017. 152 f.</p>
<p>Orientador: Ada Cristina Scudelari Coorientador: José Neres da Silva Filho</p>
<p>Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Tecnologia. Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil.</p>
<p>1. Distribuição de cargas - Dissertação. 2. Análise Estrutural – Dissertação 3. Carga móvel - Dissertação. 4. Ponte em longarina reta - Dissertação I. Silva Filho, José Neres da.. II. Título. RN/UF/BCZM CDU 679.861</p>

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelo dom da vida e por todo o suporte durante as batalhas vencidas.

À minha mãe, Raquel de Fátima Alves Pereira, por todo amor, amparo, dedicação e apoio em toda minha vida. À senhora, dedico este trabalho.

Aos meus familiares: Franklin e Joaquim Arthur (irmãos); Hary, Hellen Elvira e Helena (sobrinhos); Moema Ribeiro (cunhada); Rafaella Alves e Rita Alves (tias), por serem o motivo de eu continuar sempre persistindo; assim como demais parentes que sempre estiveram torcendo por meu sucesso profissional.

Aos meus avós, Joaquim Pereira e Isaura Alves (*in memoriam*).

Aos meus grandes mestres, Junqueiro e Padilha, que sempre estiveram ao meu lado em todas as circunstâncias.

Aos amigos David Faria e Gitana Gonzaga, pela amizade sincera e pelo apoio de sempre.

Ao professor José Neres da Silva Filho por toda ajuda, confiança e estímulo depositados para que esta pesquisa fosse realizada.

À empresa TQS, através do engenheiro Sander David Cardoso Júnior, por ter cedido o software LIP, que foi de grande valia para esta pesquisa.

Ao professor Rodrigo Carvalho da Mata por todo apoio, sabedoria repassada e amizade.

Aos demais professores do PEC, em especial, aos professores Daniel Nelson Maciel e Hidelbrando José Farkat Diógenes, por todo conhecimento transmitido ao longo desta jornada.

ESTUDO ANALÍTICO E NUMÉRICO DE REPARTIÇÃO DE CARGA EM TABULEIROS DE PONTES RETAS COM LONGARINAS MÚLTIPLAS DE CONCRETO ARMADO

Tércio Pereira Jovem

Orientadora: Prof.^a Dra. Ada Cristina Scudelari

Coorientador: Prof. Dr. José Neres da Silva filho

RESUMO

As pontes são elementos essenciais para os sistemas rodoviário e ferroviário de transporte, em especial no Brasil onde estes modais são muito relevantes. Nesse contexto, se insere o sistema estrutural de pontes com longarinas principais múltiplas, que ocupa lugar de destaque no mundo, por ser relativamente simples e eficiente, com vantagens econômicas e construtivas notadamente conhecidas. Assim, este trabalho de pesquisa tem como objetivo analisar modelos de pontes com seções transversais com três, cinco, sete e oito longarinas principais, considerando tanto a superestrutura isolada da mesoestrutura e da infraestrutura, como a interação conjunta das mesmas. Para tanto, os modelos foram avaliados pelos Métodos Analíticos Clássicos (MAC) de Engesser-Courbon, Leonhardt, Guyon-Massonet, Homberg-Trenks e o Processo de Fauchart, e comparado com os modelos numéricos idealizados no SAP2000 e no CSi Bridge V18. Os modelos de Grelha, Homberg-Trenks e Leonhardt apresentaram resultados menos precisos, no caso da utilização de poucas (três) longarinas devido à malha formada. Já o método de Guyon-Massonet apresentou uma análise que só seria melhor representada ao modelar uma placa sob uma base elástica, fato que se evidencia apenas em pontes com vigas muito próximas. Vale salientar que a quantidade de longarinas foi um fator importante na repartição de cargas em todos os modelos, visto que ao aumentar o número de vigas principais e incluir o efeito de torção nas mesmas, obteve-se uma melhor distribuição de cargas, sobretudo nas vigas externas da ponte. Por fim, os modelos discretizados em elementos finitos representaram o melhor comportamento da ponte, visto que permitiu considerar o funcionamento conjunto da estrutura.

Palavras-chave: Pontes em Concreto Armado; Repartição de cargas; Métodos Analíticos Clássicos (MAC); Método dos Elementos Finitos (MEF).

ANALYTICAL AND NUMERICAL STUDY OF LOAD DISTRIBUTION IN BRIDGE WITH MULTIPLE GIRDERS OF REINFORCED CONCRETE

Tércio Pereira Jovem

Adviser: Prof.^a Dra. Ada Cristina Scudelari

Co-Adviser: Prof. Dr. José Neres da Silva filho

ABSTRACT

Bridges are essential elements for road and rail transportation systems, especially in Brazil where these are very relevant. In this context, the structural system of bridges with multiple Girders occupies prominent place in the world, being relatively simple and efficient, with well-known economic and constructive advantages. Thus, this research aimed at analyzing bridges models with cross sections with three, five, seven and eight main girder, considering both the isolated superstructure of the mesostructure and the infrastructure, as well as their joint interaction. For this, were evaluated the models using Classical Analytical Methods (MAC) of transverse load from Engesser-Courbon, Leonhardt, Guyon-Massonet, Homberg-Trenks and the Fauchart Process, and compared with finite element models using the SAP2000 and the CSi Bridge V18. The models of Grid, Homberg-Trenks and Leonhardt presented less accurate results, in the case of the use of few (three) stringers due to the formed mesh. The Guyon-Massonet method presented an analysis that would only be better represented when modeling a plate under an elastic base, a fact that is evident only in bridges with very close beams. It is worth noting that the number of girder was an important factor in the load distribution in all models, since the increase in the number of main beams and the torsion effect in the same ones resulted in a better distribution of loads especially in the external beams of the bridge. Finally, the finite element discretized models represented the best behavior of the bridge, since it allowed to be consider the joint work of the structure.

Keywords: Reinforced Concrete bridges; Load distribution; Classic Analytical Methods; Finite Element Method.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1-Divisão estrutural de uma ponte ou viaduto	3
Figura 1.2-Pontes com longarinas retas, em Natal-RN	4
Figura 2.1-Componentes de uma ponte em viga com vigas “I” pré-moldadas ou metálicas	12
Figura 2.2-Esquemas estáticos de pontes em vigas simplesmente apoiadas sem balanços: (a) Tramo único; (b) Sucessão de tramos.....	13
Figura 2.3-Eschema estático de ponte em viga contínua	13
Figura 2.4-TB-450	15
Figura 2.5-Representação dos cortes A-A e B-B no tabuleiro da ponte	16
Figura 2.6-Ilustração da distribuição dos esforços na direção transversal	16
Figura 2.7-Ilustração da distribuição dos esforços na direção longitudinal	17
Figura 2.8-Veículo Tipo Hipotético, HL-93 e combinação mais desfavorável	18
Figura 2.9-Deslocamento de corpo rígido da transversina para uma seção com cinco longarinas.....	23
Figura 2.10-Representação do tabuleiro de vigas múltiplas para aplicação do método de Engesser-Courbon	24
Figura 2.11-Eschema ilustrativo do método.....	26
Figura 2.12-Coefficientes de repartição transversal do método de Leonhardt	27
Figura 2.13-Tabuleiro: (a) de largura infinita; (b) de dimensões finitas	31
Figura 2.14-Transversina sobre base elástica.....	31
Figura 2.15-Sistema primário estaticamente determinado	33
Figura 2.16-Força de Reação ao Longo da Viga Principal Central em Função de Z e Z_T	35
Figura 2.17-Força de Reação ao Longo da Viga Principal de Extremidade em Função de Z e Z_T	35
Figura 3.1-Malha de Elementos Finitos.....	38
Figura 3.2-(a) Graus de liberdade do elemento finito cúbico; (b) Deformação em vigas com efeito do cisalhamento.....	39
Figura 3.3-Elementos Finitos de Barra: (a) Elemento Linear e (b) Elemento Quadrático	41
Figura 3.4-Discretização de uma laje em uma malha de grelha plana.....	44
Figura 3.5-Placa carregada com a representação dos seus esforços internos	46

Figura 3.6-Ligação excêntrica entre nós da laje e nós da longarina / transversina...	47
Figura 3.7-Exemplo de nós para serem definidos os eixos locais do elemento de pórtico	49
Figura 3.8-Graus de restrições cinemáticas dos nós do pórtico.....	50
Figura 3.9-Elemento de casca com quatro nós	51
Figura 3.10-Elemento de casca com três nós	51
Figura 3.11-Exemplos de discretizações de elementos de casca com quatro nós ...	52
Figura 4.1-Esquema Longitudinal.....	54
Figura 4.2-Seção Transversal da Ponte com três longarinas.....	54
Figura 4.3-Seção Transversal da Ponte com cinco longarinas	54
Figura 4.4-Seção Transversal da Ponte com sete longarinas	54
Figura 4.5-Seção Transversal da Ponte com oito longarinas	55
Figura 4.6-Valores dos parâmetros para os modelos estruturais	56
Figura 4.7-- Representação do Tabuleiro da Ponte Modelo, com 3 Longarinas como Grelha	57
Figura 4.8-Representação do tabuleiro da Ponte Modelo, com 05 Longarinas como Grelha	57
Figura 4.9-Seção das Longarinas	58
Figura 4.10-Seção das Transversinas.....	58
Figura 4.11-Seção do Tabuleiro	59
Figura 4.12-Representação do Tabuleiro da Ponte Modelo, com 3 Longarinas como Placa	59
Figura 4.13-Representação do Tabuleiro da Ponte Modelo, com 5 Longarinas como Placa	60
Figura 4.14-Vista, em planta, do Tabuleiro com 03 Longarinas	61
Figura 4.15-Tabuleiro com Três Longarinas-Malha.....	61
Figura 4.16-Seção Transversal do Tabuleiro com três longarinas	61
Figura 4.17-Seção Transversal do tabuleiro com três longarinas, com elementos de pórtico	62
Figura 4.18-Tabuleiro com Cinco Longarinas-Malha.....	62
Figura 4.19-Seção Transversal do tabuleiro com cinco longarinas, com elementos de pórtico	62
Figura 4.20-Entrada de dados da ponte modelo	63
Figura 4.21-Wireframe do Tabuleiro.....	64

Figura 4.22-Modelagem com elementos tipo casca	64
Figura 4.23-Carga devido às defensas	65
Figura 4.24-Carga devido ao peso próprio dos elementos estruturas e pavimentação	66
Figura 4.25-Cargas nodais aplicadas.....	66
Figura 5.1-Linhas de Influência do Método Courbon – Ponte com Três Longarinas.	68
Figura 5.2-Linhas de Influência do Método Courbon – Ponte com Cinco Longarinas	69
Figura 5.3-Linhas de Influência do Método Courbon – Ponte com sete Longarinas .	70
Figura 5.4-- Linhas de Influência do Método Courbon – Ponte com Oito Longarinas	71
Figura 5.5--- Linhas de Influência do Método Leonhardt -Ponte com Três Longarinas	72
Figura 5.6- Linhas de Influência do Método Leonhardt -Ponte com Cinco Longarinas	73
Figura 5.7- Linhas de Influência do Método Leonhardt -Ponte com Sete Longarinas	74
Figura 5.8- Linhas de Influência do Método Leonhardt -Ponte com Oito Longarinas	75
Figura 5.9- Linhas de Influência do Método Guyon-Massonet - Ponte com Três Longarinas.....	76
Figura 5.10- Linhas de Influência do Método Guyon-Massonet - Ponte com Cinco Longarinas.....	77
Figura 5.11- Linhas de Influência do Método Guyon-Massonet - Ponte com sete Longarinas.....	78
Figura 5.12- Linhas de Influência do Método Hombertg-Trenks - Ponte com Três Longarinas.....	79
Figura 5.13- Linhas de Influência do Método Hombertg-Trenks - Ponte com Cinco Longarinas.....	80
Figura 5.14- Linhas de Influência do Método Hombertg-Trenks - Ponte com Sete Longarinas.....	81
Figura 5.15- Linhas de Influência do Processo Fauchart - Ponte com Três Longarinas	82
Figura 5.16- Linhas de Influência do Processo Fauchart - Ponte com Cinco Longarinas	83

Figura 5.17- Linhas de Influência do Processo Fauchart - Ponte com Sete Longarinas	84
Figura 5.18- Linhas de Influência do Processo Fauchart - Ponte com Oito Longarinas	85
Figura 5.19- Linhas de Influência do Método Grelha - Ponte com Três Longarinas..	86
Figura 5.20 - Linhas de Influência do Método Grelha - Ponte com Cinco Longarinas	87
Figura 5.21- Linhas de Influência do Método Grelha - Ponte com Sete Longarinas .	88
Figura 5.22- Linhas de Influência do Método Grelha - Ponte com Oito Longarinas ..	89
Figura 5.23- Linhas de Influência do Método de Placa - Ponte com Três Longarinas	90
Figura 5.24- Linhas de Influência do Método de Placa - Ponte com Cinco Longarinas	91
Figura 5.25- Linhas de Influência do Método de Placa - Ponte com Sete Longarinas	92
Figura 5.26- Linhas de Influência do Método de Placa - Ponte com Oito Longarinas	93
Figura 5.27-Momento Fletor ao longo da longarina externa.....	94
Figura 5.28-Momento Fletor ao longo da longarina central.....	94
Figura 5.29-- Linhas de Influência do Método de Casca 3D - Ponte com Três Longarinas.....	95
Figura 5.30-Momento Fletor ao longo da longarina externa.....	95
Figura 5.31-Momento Fletor ao longo da longarina intermediária	96
Figura 5.32-Momento Fletor ao longo da longarina central.....	96
Figura 5.33- Linhas de Influência do Método de Casca 3D - Ponte com Cinco Longarinas.....	97
Figura 5.34-Momento Fletor ao longo da longarina externa.....	98
Figura 5.35-Momento Fletor ao longo da longarina intermediária	98
Figura 5.36-Momento Fletor ao longo da longarina central.....	99
Figura 5.37- Linhas de Influência do Método de Casca 3D - Ponte com Sete Longarinas.....	100
Figura 5.38-Momento Fletor ao longo da longarina externa.....	100
Figura 5.39-Momento Fletor ao longo da longarina intermediária	101
Figura 5.40-Momento Fletor ao longo da longarina central.....	101

Figura 5.41 Linhas de Influência do Método de Casca 3D - Ponte com Oito Longarinas	102
Figura 5.42-Coefficientes de influência para a longarina extrema.....	103
Figura 5.43-Percentagem de Distribuição dos Modelos Estudados-Longarina Externa	103
Figura 5.44-Comparação do Modelo Casca 3D (AASHTO LRFD 2014) com os demais modelos estudados - Longarina Externa.....	105
Figura 5.45-Coefficientes de influência para a longarina central.....	106
Figura 5.46-Percentual de Distribuição dos modelos estudados-Longarina Central	106
Figura 5.47-Comparação do Modelo Casca 3D (AASHTO LRFD 2014) com os demais modelos estudados - Longarina Central.....	107
Figura 5.48-Coefficientes de influência para as longarinas extremas	108
Figura 5.49-Percentual de Distribuição dos modelos estudados-Longarina Externa	108
Figura 5.50-Comparação do Modelo Casca 3D (AASHTO LRFD 2014) com os demais modelos estudados - Longarina Externa.....	109
Figura 5.51-Coefficientes de influência para as longarinas intermediárias	109
Figura 5.52-Percentagem de Distribuição dos modelos estudados-Longarina intermediária.....	109
Figura 5.53- Comparação do Modelo Casca 3D (AASHTO LRFD 2014) com os demais modelos estudados Longarina Intermediária.....	110
Figura 5.54-Coefficientes de influência para a longarina central.....	111
Figura 5.55-Percentagem de Distribuição dos modelos estudados - Longarina Central	111
Figura 5.56-Comparação do Modelo Casca 3D (AASHTO LRFD 2014) com os demais modelos estudados Longarina Central.....	111
Figura 5.57-Coefficientes de influência para a longarina externa.....	113
Figura 5.58-Percentagem de Distribuição dos modelos estudados-Longarina Externa	113
5.59-Comparação do Modelo Casca 3D (AASHTO LRFD 2014) com os demais modelos estudados Longarina Externa	114
Figura 5.60-- Coefficientes de influência para as longarinas intermediárias	114
Figura 5.61-Percentagem de Distribuição dos modelos estudados-Longarina intermediária.....	114

5.62-Comparação do Modelo Casca 3D (AASHTO LRFD 2014) com os demais modelos estudados Longarina Intermediária.....	115
Figura 5.63-Coefficientes de influência para a longarina central.....	116
Figura 5.64-Porcentagem de Distribuição dos modelos estudados-Longarina central	116
5.65-Comparação do Modelo Casca 3D (AASHTO LRFD 2014) com os demais modelos estudados Longarina Central.....	117
Figura 5.66-Coefficientes de influência para a longarina externa.....	118
Figura 5.67-Porcentagem de Distribuição dos modelos estudados-Longarina Externa	118
Figura 5.68-Comparação do Modelo Casca 3D (AASHTO LRFD 2014) com os demais modelos estudados Longarina Externa	118
Figura 5.69-Coefficientes de influência para a longarina intermediária.....	120
Figura 5.70-Porcentagem de Distribuição dos modelos estudados-Longarina Intermediária	120
Figura 5.71-Comparação do Modelo Casca 3D (AASHTO LRFD 2014) com os demais modelos estudados Longarina Intermediária.....	120
Figura 5.72-Coefficientes de influência para a longarina central.....	121
Figura 5.73-Porcentagem de Distribuição dos modelos estudados-Longarina Central	121
Figura 5.74-Comparação do Modelo Casca 3D (AASHTO LRFD 2014) com os demais modelos estudados Longarina Central.....	122

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 - Relação entre o número de transversinas e o fator i	28
Tabela 5.1 - Coeficientes de Repartição-Ponte com três longarinas.....	67
Tabela 5.2 - Coeficientes de Repartição para Ponte com cinco longarinas	68
Tabela 5.3 - Coeficientes de Repartição para Ponte com sete longarinas.....	69
Tabela 5.4 - Coeficientes de Repartição para Ponte com oito longarina.....	70
Tabela 5.5 - Coeficientes de Repartição para ponte com três longarinas	71
Tabela 5.6 - Coeficientes de Repartição para ponte com cinco longarinas.....	72
Tabela 5.7 - Coeficientes de Repartição para Ponte com sete longarinas.....	73
Tabela 5.8 - Coeficientes de Repartição para Ponte com oito longarina.....	74
Tabela 5.9 - Índice de Repartição para ponte com três longarinas	75
Tabela 5.10 - Índices de Repartição para ponte com cinco longarinas	76
Tabela 5.11 - Coeficientes de Repartição para Ponte com sete longarinas.....	77
Tabela 5.12 - Coeficientes de Repartição para ponte com três longarinas	78
Tabela 5.13 - Coeficientes de Repartição para ponte com cinco longarinas.....	79
Tabela 5.14 - Coeficientes de Repartição para Ponte com sete longarinas.....	80
Tabela 5.15 - Coeficientes de Repartição para ponte com três longarinas	81
Tabela 5.16 - Coeficientes de Repartição para ponte com cinco longarinas.....	82
Tabela 5.17 - Coeficientes de Repartição para Ponte com sete longarinas.....	83
Tabela 5.18 - Coeficientes de Repartição para Ponte com oito longarina.....	84
Tabela 5.19 - Coeficientes de Repartição para ponte com três longarinas	86
Tabela 5.20 - Coeficientes de Repartição para ponte com cinco longarinas.....	86
Tabela 5.21 - Coeficientes de Repartição para Ponte com sete longarinas.....	87
Tabela 5.22 - Coeficientes de Repartição para Ponte com oito longarina.....	88
Tabela 5.23 - Coeficientes de Repartição para ponte com três longarinas	89
Tabela 5.24 - Coeficientes de Repartição para ponte com cinco longarinas.....	90
Tabela 5.25 - Coeficientes de Repartição para Ponte com sete longarinas.....	91
Tabela 5.26 - Coeficientes de Repartição para Ponte com oito longarina.....	92
Tabela 5.27 - Coeficientes de Repartição para ponte com três longarinas	95
Tabela 5.28 - Coeficientes de Repartição para ponte com cinco longarinas.....	97
Tabela 5.29 - Coeficientes de Repartição para ponte com sete longarinas	99
Tabela 5.30 - Coeficientes de Repartição para ponte com oito longarinas	102

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	vii
LISTA DE TABELAS	xiii
1. Introdução	1
1.1 Justificativa.....	5
1.2 Objetivos da Pesquisa.....	6
1.2.1 Objetivo Geral.....	6
1.2.2 Objetivos Específicos	6
1.3 Estrutura da Pesquisa	7
2. Revisão Bibliográfica.....	8
2.1 Conceitos gerais	8
2.2 Métodos de Análise, Sistemas estruturais e ações em pontes	9
2.2.1 Pontes em vigas retas	11
2.2.2 Vinculações Típicas.....	12
2.2.3 Ações em pontes.....	14
2.2.3.1 Carga móvel segundo a NBR 7188:2013.....	14
2.2.3.2 Carga móvel segundo a AASHTO LRFD (2014).....	17
2.3 Pesquisas sobre repartição de cargas em Tabuleiros de pontes em vigas..	18
2.4 Métodos Analíticos de Cálculo (MAC).....	20
a) Método de Grelha.....	21
b) Método da Placa Equivalente	21
c) Método dos Elementos Finitos.....	22
2.4.1 Método de Engesser-Courbon.....	22
2.4.2 Método de Leonhardt.....	25
2.4.3 Método de Guyon-Massonet	28
2.4.4 Método de Homberg-Trenks	33
2.4.5 Processo de Fauchart.....	36

3.	Modelos Numéricos de Cálculo.....	38
3.1	Formulação Matemática da Barra	39
3.2	Formulação do Elemento Finito Barra.....	41
3.2.1	Matriz de Rigidez e Vetor de Forças.....	43
3.3	Modelagem de Lajes Utilizando Analogia de Grelhas.....	43
3.4	Modelo de placa.....	45
3.5	Modelo em Três Dimensões (Casca 3-D)	47
3.5.1	Elemento de Pórtico	48
3.5.2	Elemento de casca	50
4.	Modelos Propostos Analisados	53
4.1	Ponte Modelo e Dados de Entrada Utilizados.....	53
4.2	Modelagem Numérica	55
4.3	Modelagem como Grelha	56
4.4	Modelagem como Placa.....	59
4.5	Modelo 3D com elementos de Pórtico e Casca	60
4.6	Carregamentos utilizados na análise	65
5.	Resultados e Análise dos Resultados	67
5.1	Métodos Analíticos	67
5.1.1	Método de Engesser-Courbon.....	67
5.1.2	Método de Leonhardt.....	71
5.1.3	Método de Guyon-Massonet	75
5.1.4	Método de Homberg-Trenks.....	78
5.1.5	Processo de Fauchart.....	81
5.2	Métodos computacionais.....	85
5.2.1	Método da Grelha	85
5.2.2	Método de Placa.....	89
5.2.3	Método de 3D-Casca / Pórtico.....	93

5.3	Comparação dos resultados entre os métodos usados	102
5.3.1	Modelo com três longarinas.....	103
5.3.2	Modelo com cinco longarinas	108
5.3.3	Modelo com sete longarinas	113
5.3.4	Modelo com oito longarinas.....	117
	Conclusões e sugestões	123
	Referências bibliográficas	125

CAPÍTULO 1

1.Introdução

O Brasil é um país de dimensões continentais, com diferentes perfis de relevo e rico em recursos hídricos. Somado a isso, é dotado de uma extensa e preponderante malha rodoviária. A sobreposição destas características com a tendência à metropolização e conurbação dos centros urbanos, indica a importância de obras viárias como pontes, definidas segundo a ABNT NBR 7188:2013 - Carga Móvel Rodoviária e de Pedestres em Pontes, Viadutos, Passarelas e outras Estruturas - como estruturas sujeitas a ação de carga em movimento, com posicionamento variável, utilizada para transpor obstáculos, tais como vales e rios, a fim de ligar lugares e encurtar distâncias, possibilitando desenvolvimento para cidades e povoados. As pontes são elementos essenciais para os sistemas rodoviário e ferroviário de transporte, em especial no Brasil onde estes modais são muito relevantes. Segundo o relatório do Plano Nacional de Logística e Transporte (PNLT, 2011), na distribuição modal da matriz brasileira de transportes regionais de carga predominam os modais rodoviário, em torno de 52% e o ferroviário em torno de 30%, em quantidades de toneladas-quilômetro-úteis (TKUs) em relação aos outros modais. Sendo assim, projetos e execuções dessas Obras de Arte Especiais (OAE) são de grande importância para o desenvolvimento socioeconômico do país.

As diversas definições sobre pontes encontradas na literatura geralmente são consideradas corretas. Desta forma, o que as diferencia, é a forma com a qual estão redigidas. Com isso, Leonhardt (1979), traz diversos conceitos dessas estruturas de acordo com sua tipologia, seja por:

- Obstáculo: pontes fluviais, encostas, viadutos;
- Tráfego suportado: pontes rodoviárias, ferroviárias, em canal;
- Sistema estrutural: pontes em vigas, arco, estaiadas, pênsil ou tabuleiros;
- Materiais utilizados: madeira, metálicos, concreto armado.

Dentre as literaturas disponíveis acerca do estudo qualitativo e quantitativo das estruturas de pontes, existe uma classificação de seus elementos constituintes mais

antiga, a qual cita a divisão básica em infraestrutura e superestrutura (Leonhardt, 1979). Entretanto, nos estudos mais recentes, tem-se que esses elementos podem ser subdivididos em: infraestrutura, mesoestrutura e superestrutura (Mendes, 2003).

O projeto de uma ponte requer conhecimentos em diversas áreas da engenharia como hidrologia (para a determinação da seção de vazão e enchente máxima caso a obra seja de uma ponte), geotecnia, topografia, projeto de estradas, materiais construtivos e fundações. Além desses conhecimentos específicos, devem ser analisados os seguintes requisitos para tornar a construção da ponte de uma forma mais desejável e evitar eventuais problemas:

- Funcionalidade: satisfazer de forma perfeita as exigências de tráfego, vazão, dentre outras;
- Segurança: obter materiais constituintes solicitados por esforços que neles provoquem tensões menores que as admissíveis ou que possam provocar ruptura;
- Estética: apresentar algo agradável e que se harmonize com o ambiente em que se situa;
- Durabilidade: atender às exigências de uso durante certo período previsto;
- Economia: realizar um estudo comparativo de várias soluções, escolhendo-se a mais econômica, desde que atenda aos requisitos anteriores.

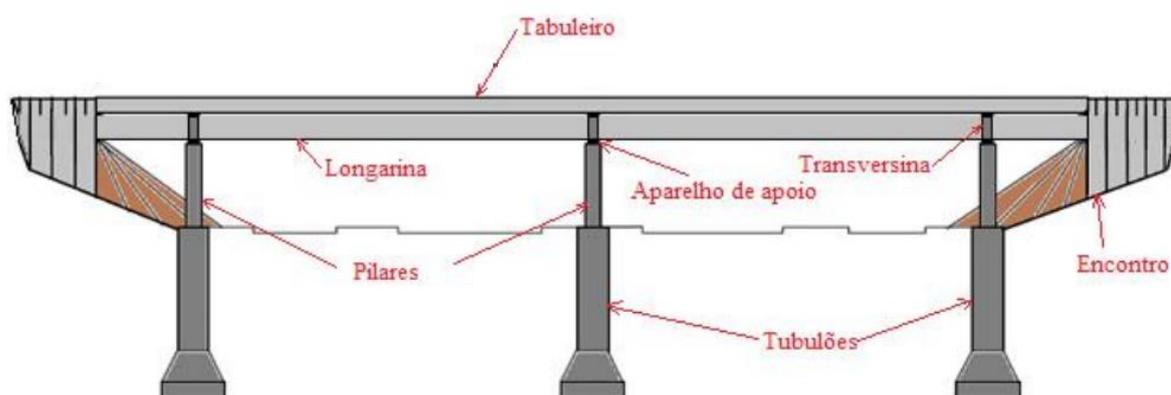
Essas informações permitem ao engenheiro uma maior clareza no conhecimento, tanto do conceito de cálculo estrutural, como da análise de uma estrutura, pois quaisquer aspectos que envolvam a ponte (dimensionamento, aparência, custo) devem ser levados em consideração durante a sua construção.

As pontes, conforme Pfeil (1979) e Marchetti (2008) e visualizado na Figura 1, são divididas em três partes:

- Superestrutura: localizada na porção superior de uma ponte, que é responsável pelo transporte horizontal das cargas e sua transmissão à mesoestrutura, absorvendo diretamente os esforços resultantes do tráfego rodoviário, ferroviário, cicloviário ou pedonal. A superestrutura de uma ponte é, em geral, formada pelo tabuleiro, incluindo lajes e vigas.

- Mesoestrutura: localizado na porção média da estrutura de uma ponte, que é responsável pela transmissão dos esforços da superestrutura para a infraestrutura. A mesoestrutura de uma ponte é, em geral, formada pelos pilares, aparelhos de apoio e encontros, estando frequentemente sujeita a forças externas hidráulicas e eólicas relevantes.
- Infraestrutura: localizada na porção inferior da estrutura de uma ponte, que é responsável pela transmissão dos esforços da mesoestrutura para o solo. A infraestrutura de uma ponte é, em geral, formada pelos elementos de fundação, como sapatas, estacas ou tubulões.

Figura 1.1 - Divisão estrutural de uma ponte ou viaduto



Fonte: Autor (2016)

O tabuleiro para as pontes em lajes é composto apenas por lajes, enquanto que para as pontes em viga, é composto por lajes, longarinas e transversinas. As lajes são os primeiros elementos estruturais a serem solicitados pelas forças externas. A sua principal função é distribuir os esforços até as vigas, em caso de pontes em vigas, e/ou para os pilares, em caso de pontes em lajes.

As longarinas são as vigas que possuem o papel de receber os esforços oriundos das lajes e transmiti-los, por sua vez, para os pilares. Elas se encontram localizadas segundo a direção longitudinal da ponte. As transversinas, por sua vez, são vigas que se encontram na direção transversal aos tabuleiros de pontes e conferem um melhor travamento ao tabuleiro como um todo.

Ao se comparar os processos de desenvolvimento de projeto e de construção entre estruturas usais (edifícios) e pontes, verifica-se que estas últimas apresentam algumas particularidades. Com relação às ações, deve-se considerar o efeito

dinâmico das cargas, pois parte das cargas que nelas atuam são móveis. Por isto, torna-se necessário a determinação de envoltória de esforços solicitantes e, por conseguinte, a verificação da possibilidade de fadiga dos materiais. Por causarem efeitos deletérios à estrutura, verificações normativas devem ser satisfeitas para garantir o seu bom funcionamento, segurança e durabilidade.

Nesse contexto, se insere o sistema estrutural de pontes e viadutos com longarinas principais múltiplas que ocupa lugar de destaque no mundo, por ser relativamente simples e eficiente, com vantagens econômicas e construtivas notadamente conhecidas (Figura 1.2). Apesar disso, poucos são os estudos que objetivam analisar a distribuição de cargas em tabuleiros das pontes e viadutos que levam em conta a rigidez à flexão das longarinas; a rigidez à flexão das transversinas e o seu impacto para a rigidez à torção e flexão da grelha resultante da associação das longarinas e transversinas.

Figura 1.2 - Viaduto do anel viário Parnamirim/Natal-RN



Fonte: Autor (2016)

Assim, nesta pesquisa serão analisados quatro modelos de pontes hiperestáticas: **(a)** o primeiro com seção transversal com três longarinas retas de alma cheia, **(b)** o segundo com cinco longarinas retas de alma cheia, **(c)** o terceiro com sete longarinas retas de alma cheia e **(d)** o quarto com oito longarinas retas de alma cheia, em ambos os casos considerando a superestrutura isolada da mesoestrutura e da infraestrutura. Esses modelos serão avaliados pelos Métodos Analíticos Clássicos

(MAC) de repartição transversal de cargas de Engesser-Courbon, Leonhardt, Guyon-Massonet, Homberg-Trenks e o Processo de Fauchart. Os mesmos serão comparados com os resultados obtidos pelos modelos numéricos modelados nos *softwares* SAP 2000 e CSi Bridge V18.

1.1 Justificativa

A análise de estruturas de pontes com longarinas principais múltiplas ocupam um lugar de destaque na construção de pontes no Brasil e no mundo. A utilização desse tipo de sistema estrutural é extremamente difundida no Brasil em função das vantagens econômicas e construtivas desta solução. De uma maneira geral a análise estrutural é efetuada usualmente em etapas, sendo que a primeira delas se desenvolve o estudo da superestrutura, separando-a dos demais elementos integrantes do conjunto estrutural: meso e infraestrutura. Na segunda etapa faz-se uma nova simplificação assimilado o modelo estrutural da grelha formada por longarinas e transversinas a um modelo menos rigoroso, representado por vigas biapoiadas. Para que esta assimilação seja feita, aplicam-se métodos analíticos tradicionais, por meio dos quais são determinadas as parcelas de carregamento correspondentes à cada uma das longarinas. Esses métodos normalmente apresentam limitações visto que neles a rigidez à torção ou é desprezada ou não representam bem o comportamento conjunto da superestrutura da ponte. Essa limitação pode ocasionar em um levantamento equivocado, às vezes contra a segurança, das cargas utilizadas no dimensionamento das longarinas principais que dissiparão para a meso e infraestrutura. Atualmente, existe uma quantidade relativamente pequena de estudos de distribuição de cargas em tabuleiros de pontes com longarinas principais que levam em conta a rigidez à flexão das longarinas, a rigidez à flexão das transversinas, a rigidez à torção do conjunto e o travejamento longarina/transversina. Assim estudar e analisar os parâmetros supracitados poderá trazer um melhor entendimento da distribuição das ações no tabuleiro, gerando seções mais econômicas e eficientes, e com isso, proporcionar soluções estruturais globais que gerem economia sem comprometer a segurança da ponte.

1.2 Objetivos da Pesquisa

1.2.1 Objetivo Geral

O objetivo geral desta pesquisa é realizar o estudo dos modelos analíticos e numéricos de distribuição de cargas em tabuleiros de pontes rodoviárias em concreto armado utilizando um sistema estrutural do tipo longarinas múltiplas retas, a fim de averiguar qual é o modelo mais representativo da repartição de cargas nesse tipo de ponte.

1.2.2 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos desta pesquisa são:

- Analisar a distribuição de cargas em quatro modelos idealizados de pontes retas com seções transversais contendo três, cinco, sete e oito longarinas, através de Métodos Analíticos Clássicos (MAC);
- Simular e analisar modelos numéricos através dos *softwares* SAP 2000 e CSI Bridge V18 com objetivo de obter os coeficientes de repartição de cargas para cada uma das longarinas das pontes estudadas;
- Comparar para cada um dos modelos idealizados os resultados obtidos entre os Métodos Analíticos Clássicos (MAC) e os modelos numéricos para os coeficientes de repartição de cargas;
- Comparar os resultados obtidos por todos os modelos com os valores oriundos da modelagem 3D via CSI Bridge V18.

1.3 Estrutura da Pesquisa

A pesquisa está desenvolvida em seis capítulos, incluindo este primeiro introdutório.

O segundo capítulo trata da revisão da literatura sobre os Métodos de Analíticos Clássicos (MAC) e traz o resultado de algumas pesquisas realizadas sobre distribuição transversal de cargas, através da influência do número de transversinas.

O capítulo 3 traz a formulação e definição dos elementos finitos que serão utilizados na análise e a forma como os *softwares* utilizados realizam as análises obtidas.

No capítulo 4 é mostrado o estudo de caso de pontes que serão utilizadas para a aplicação dos métodos descritos no capítulo 3. Neste capítulo, são mostradas as dimensões e características das pontes.

No capítulo 5 é realizada a análise e comparação dos resultados obtidos pelos diferentes modelos utilizados.

Finalmente, no sexto e último capítulo são feitas as considerações finais, conclusões do estudo realizado e sugestões para trabalhos futuros nesta linha de pesquisa.

CAPÍTULO 2

2.Revisão Bibliográfica

Neste capítulo serão apresentados os conceitos gerais da análise do comportamento estrutural das pontes com vigas longarinas múltiplas retas, os métodos analíticos de cálculo de distribuição de carga e os resultados de algumas pesquisas considerando a distribuição de cargas no tabuleiro das pontes.

2.1 Conceitos gerais

As definições de pontes constantes na bibliografia são muito semelhantes e consistem em classificá-las como obras de engenharia projetadas para dar continuidade à via por onde passam, em que se faz necessário vencer obstáculos líquidos, como rios e braços de mar (Marchetti, 2008). No caso de outros obstáculos, como vales, utiliza-se o termo viaduto.

Costuma-se separar a estrutura de uma ponte em três principais partes. A superestrutura refere-se à parte do estrado, onde efetivamente são aplicados os carregamentos do trem-tipo. A mesoestrutura recebe as cargas verticais da superestrutura (peso próprio das vigas, lajes, revestimento, barreiras e passeios, além dos efeitos das cargas móveis e do vento) e também está sujeita a solicitações horizontais (ação dinâmica da água, ação do vento, frenagem e aceleração de veículos, atrito nos apoios, empuxo de terra e sobrecarga nos aterros de acesso, dilatação térmica e retração) e transfere os carregamentos para a fundação, geralmente por meio de pilares. Finalmente, a infraestrutura transmite os esforços da mesoestrutura para o terreno, por meio de elementos de fundação como tubulões, estacas, blocos e sapatas.

Spornau (2012) classifica as pontes segundo alguns critérios:

- Finalidade a que se destinam:
 - Rodoviária;
 - Ferroviária;

- Passarela.
- Material de Construção Empregado:
 - Concreto Armado ou Protendido;
 - Aço;
 - Madeira.
- Processo de Execução:
 - Moldada in loco;
 - Pré-moldada;
 - Balanços Sucessivos.
- Sistema Estrutural:
 - Ponte em Laje;
 - Ponte em Viga;
 - Ponte em quadro ou pórtico;
 - Ponte em arco;
 - Ponte em abóbada;
 - Ponte Pénsil;
 - Ponte Estaiada.

2.2 Métodos de Análise, Sistemas estruturais e ações em pontes

O objetivo principal da análise estrutural é determinar os esforços devido as cargas aplicadas. Portanto, para encontrar uma forma de análise estrutural realista, ou seja, que represente bem a estrutura que está sendo estudada deve ser feita uma avaliação prévia de três aspectos importantes: o modelo matemático, as condições de contorno do modelo e o modo de aplicação das cargas.

A AASHTO LRFD (2014) ressalta que no sistema estrutural, toda superestrutura deve ser considerada, incluindo os aparelhos de apoio, com as condições de contorno representando de forma precisa as restrições promovidas por cada um deles.

De acordo com Fu & Wang (2013) um sistema estrutural de ponte pode ser modelado de três formas diferentes:

- I. Modelagem em uma dimensão, definida pela AASHTO LRFD (2014) como modelos de análise aproximada;
- II. Modelagem em duas dimensões, utilizando métodos numéricos de disposição plana;
- III. Modelagem em três dimensões, geralmente utilizando o método dos elementos finitos.

A análise do comportamento estrutural das pontes pode de uma forma simplificada, ser subdividida em duas etapas:

- I. Análise da distribuição dos esforços na direção transversal da ponte, que depende fundamentalmente do tipo de seção transversal;
- II. Análise do efeito das cargas equivalentes, obtidas a partir da análise da distribuição dos esforços na direção transversal, no sistema estrutural principal.

Em face do exposto, conclui-se que é possível abordar de uma forma genérica, os sistemas estruturais separadamente das seções transversais, embora sabendo que existe uma interdependência de maior ou menor grau, entre eles.

Os sistemas estruturais normalmente empregados nas pontes de concreto são:

- Pontes em viga de alma cheia;
- Ponte em viga caixão celular;
- Pontes em balanços sucessivos;
- Pontes estaiadas.
- Pontes em arco;
- Pontes pênses.

Neste trabalho serão abordadas as pontes em vigas retas de alma cheia. Mais detalhes sobre os outros tipos de sistemas estruturais abordados acima podem ser vistos em Mason (1977), Leonhardt (1982), Pfeil (1990), Vitério (2002), Marchetti (2008) e Chen (2014).

2.2.1 Pontes em vigas retas

No tabuleiro de uma ponte de vigas retas, podem-se identificar três elementos: as vigas longitudinais (também chamadas de vigas principais ou longarinas), as vigas transversais (também chamadas de transversinas) e a laje.

De acordo com Mason (1977), as superestruturas de pontes em vigas são compostas por um conjunto de vigas longitudinais, chamadas de longarinas, que sustentam o tabuleiro, e as vigas transversais, chamadas de transversinas, que podem ser ligadas à laje ou não, e são dispostas para aumentar a rigidez da estrutura e contribuir para a distribuição transversal das cargas móveis (Felippe Filho, 2008).

Normalmente, esses três elementos formam um conjunto monolítico, cujo cálculo exato é de tal modo complexo e laborioso, tanto que a sua realização utilizando processos analíticos é bastante trabalhosa. Essa complexidade motivou o desenvolvimento de diversos métodos simplificados conhecidos como “método dos coeficientes de repartição” onde a análise da superestrutura é realizada separadamente dos demais elementos constituintes da ponte, a meso e a infraestrutura, a fim de tentar quantificar as parcelas de cargas que efetivamente seriam atribuídas a cada longarina da ponte com objetivo de possibilitar o seu dimensionamento. Uma vez conhecida a parcela do carregamento que cabe a cada elemento, chamada também de “quinhão de carga”, faz-se o cálculo de cada elemento isoladamente com o seu correspondente quinhão de carga (Medino, 2016).

Os processos aproximados podem ser classificados em três categorias: **(1)** processo que considera as longarinas independentes, **(2)** processo que considera o chamado efeito de grelha e, **(3)** processo que supõe que o tabuleiro é uma placa ortótropa.

O processo que considera as longarinas independentes pode ser utilizado em tabuleiros com duas longarinas, onde se obtêm resultados satisfatórios próximos dos obtidos experimentalmente, mas nos tabuleiros com mais de duas longarinas, não é recomendável a sua utilização.

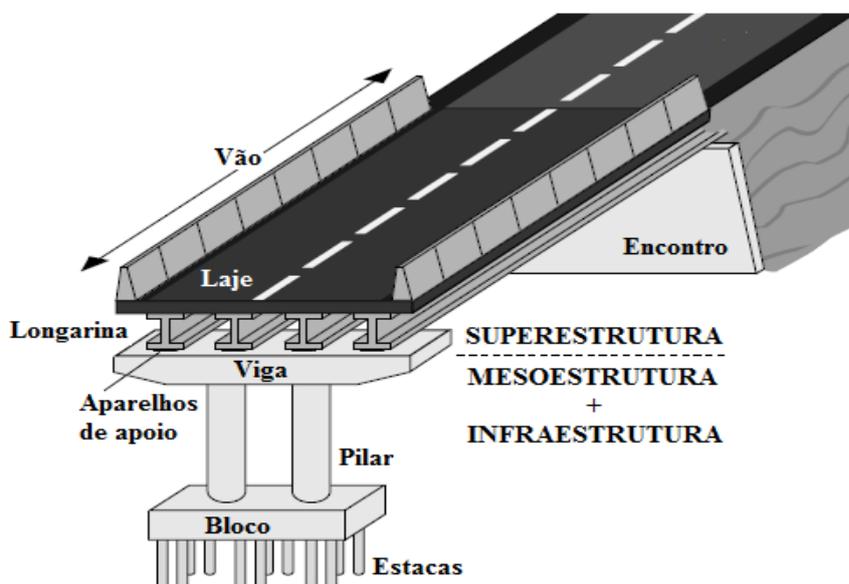
O dimensionamento dos esforços e deslocamentos das longarinas pode ser realizado analiticamente pela teoria de vigas, acrescidas pelos métodos das forças ou deslocamentos para estruturas hiperestáticas. Em análises numéricas é comum se

discretizar as lajes e vigas como elementos de barras, formando grelhas, ou utilizar soluções em elementos finitos para o tabuleiro.

Analiticamente é comum o uso de linhas de influência criadas a partir do estudo da variabilidade gerada pela carga móvel ao longo da seção transversal nos esforços das longarinas.

A Figura 2.1 exibe os componentes de uma ponte em viga com vigas em seções “I”, indicando os aparelhos de apoio, vigas de travamento, longarinas, blocos de fundação, estacas, encontros e a separação entre superestrutura, mesoestrutura e infraestrutura.

Figura 2.1 - Componentes de uma ponte em viga com vigas “I” pré-moldadas ou metálicas



Fonte: Cavalcanti (2016)

2.2.2 Vinculações Típicas

a) Vigas simplesmente apoiadas sem balanços

Neste caso pode-se ter um tramo único ou uma sucessão de tramos, conforme ilustra a Figura 2.2. A sucessão de tramos simplesmente apoiados é usualmente empregada nas pontes em que se utiliza o processo construtivo com vigas pré-moldadas.

Figura 2.2 - Esquemas estáticos de pontes em vigas simplesmente apoiadas sem balanços: (a) Tramo único; (b) Sucessão de tramos



Fonte: Takeya & El Debs (2007)

As vigas simplesmente apoiadas sem balanços se constituem num tipo estrutural relativamente pobre, pois imposto um determinado vão, existem poucas possibilidades de melhorar a distribuição dos esforços. Em razão disto, os vãos empregados com este tipo estrutural, dificilmente ultrapassam 50 metros de extensão. O comprimento do balanço deve ser fixado de forma a se ter uma boa distribuição de esforços, atendendo, no entanto, às condições topográficas. Como valor inicial, em fase de pré-dimensionamento, pode-se adotar para o comprimento do balanço um valor igual a cerca de 15% a 20% do comprimento da ponte. Devem ser evitados balanços muito grandes para não introduzir vibrações excessivas nas suas extremidades, e também para que não haja prejuízos em relação à já comentada contenção do solo nas extremidades da ponte.

b) Vigas Contínuas

Quando o comprimento da ponte pode ser subdividido em vãos parciais, o esquema de vigas contínuas, ilustrado na Figura 2.3, aparece como solução natural.

Figura 2.3 - Esquema estático de ponte em viga contínua



Fonte: Takeya & El Debs (2007)

Se não houver restrições de ordem urbanística, topográfica ou construtiva, deve-se fazer os vãos extremos cerca de 20% menores que os vãos internos de forma que os máximos momentos fletores sejam aproximadamente iguais, resultando assim numa melhor distribuição das solicitações.

Em concreto protendido, tem-se empregado também a alternância de vãos longos com vãos curtos, na proporção de 1: 0,3 a 1: 0,1. Neste caso procura-se o maior confinamento dos efeitos da carga móvel nos tramos longos, com a maior

rigidez promovida pelos apoios pouco espaçados dos tramos curtos. (Takeia & El Debs, 2007)

A distribuição de momentos fletores pode também ser melhorada através da adoção de momentos de inércia das seções variáveis ao longo dos vãos. O aumento do momento de inércia das seções junto aos apoios implicará no aumento do momento fletor negativo dessas seções, e na diminuição do momento fletor positivo das seções do meio dos vãos; o que possibilitará a redução da altura das seções nestas posições. Essa redução da altura das seções no meio dos vãos poderá facilitar o atendimento dos gabaritos relativos à transposição do obstáculo.

Outro aspecto relevante das pontes de vigas contínuas é o fato de não se ter normalmente juntas no tabuleiro. No entanto, quando o comprimento da ponte é muito grande, os efeitos de variação de temperatura se tornam importantes, e neste caso é conveniente introduzir juntas. Em princípio, como indicação inicial, pode ser adotado espaçamento de 100 m entre as juntas, no caso de se empregarem aparelhos de apoio comuns. No caso de aparelhos de apoio especiais à base de teflon, o espaçamento entre as juntas pode ser aumentado chegando até cerca de 400 m, como por exemplo, é o caso da ponte Rio-Niterói.

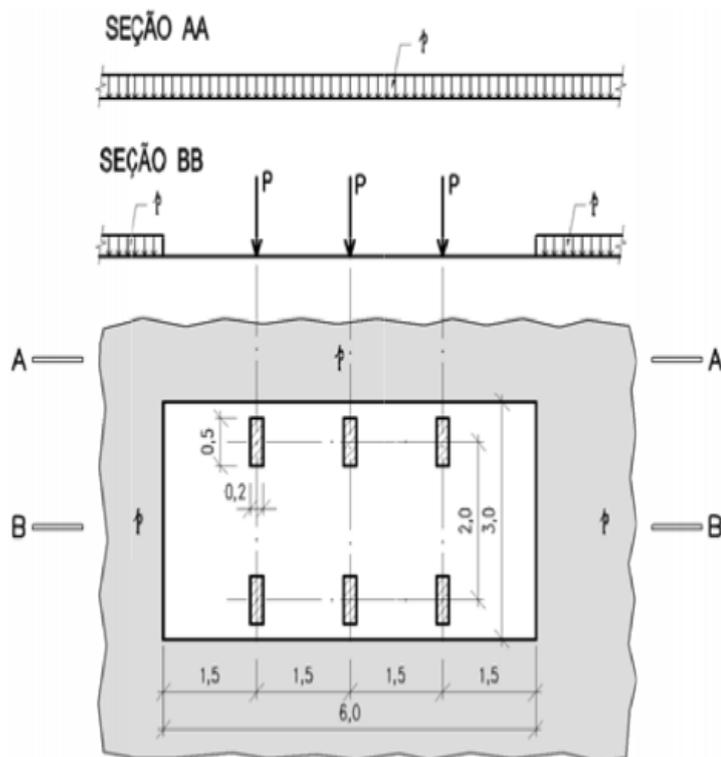
Em princípio, as pontes de vigas contínuas devem ser evitadas em situações nas quais estão previstos deslocamentos de apoio significativos, pois recalques diferenciais irão introduzir esforços adicionais neste tipo de estrutura.

2.2.3 Ações em pontes

2.2.3.1 Carga móvel segundo a NBR 7188:2013

A NBR 7188:2013 - *Carga móvel rodoviária e de pedestres em pontes, viadutos, passarelas e outras estruturas* - define como carga rodoviária padrão um veículo tipo TB-450 com seis rodas ($P = 75 \text{ kN}$), com área de ocupação de $18,0 \text{ m}^2$, circundada por uma carga uniformemente distribuída constante $p = 5 \text{ kN/m}^2$, conforme Figura 2.4.

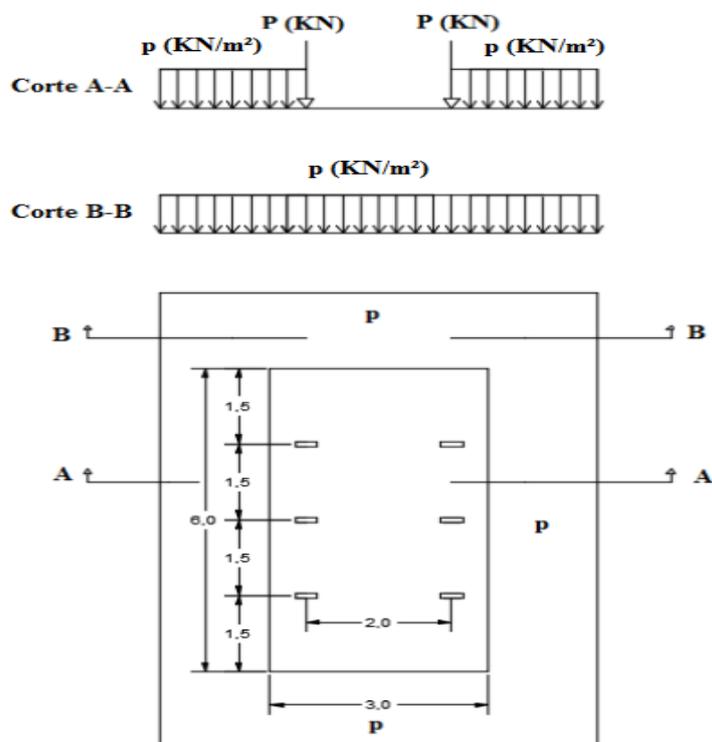
Figura 2.4 - TB-450



Fonte: NBR 7188 (2013)

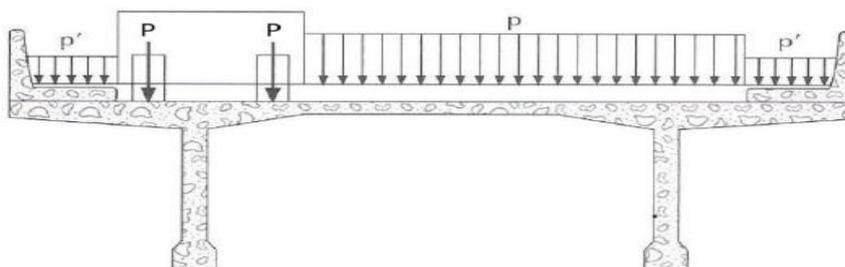
Essas cargas são aplicadas nos tabuleiros das pontes e distribuídas para as longarinas. Para casos de pontes com duas longarinas, a distribuição é feita de forma proporcional considerando a pior situação de posicionamento do carregamento transversal de norma. Em outras palavras, a carga móvel assume posição qualquer em toda a pista rodoviária com as rodas na posição mais desfavorável. A carga distribuída deve ser aplicada na posição mais desfavorável, independentemente das faixas rodoviárias. Para obter a configuração do veículo tipo longitudinal, são analisados dois cortes transversais sobre o tabuleiro, onde um corta a faixa do veículo tipo (corte A-A) e o outro passa por fora da faixa do veículo tipo (corte B-B). A Figura 2.5 ilustra a obtenção das cargas equivalentes na direção transversal, em uma ponte com duas vigas principais.

Figura 2.5 - Representação dos cortes A-A e B-B no tabuleiro da ponte



Fonte: Autor (2016)

Figura 2.6 - Ilustração da distribuição dos esforços na direção transversal

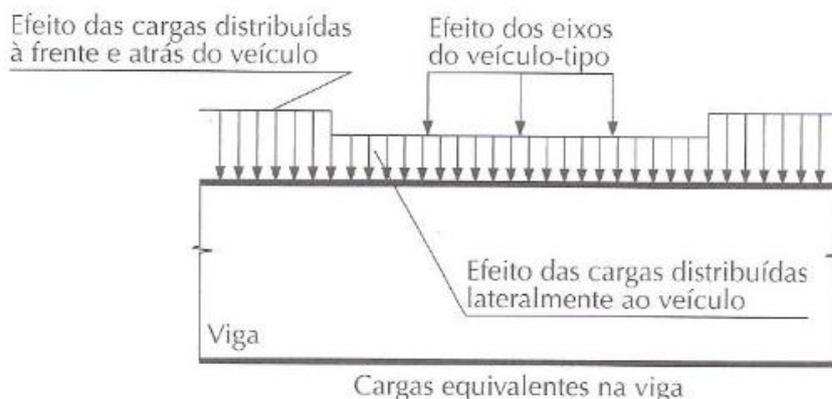


Fonte: Marchetti (2008)

Nesse caso admite-se, por simplificação, as longarinas funcionando como apoios de primeiro e segundo gêneros, gerando como consequência o trem-tipo longitudinal aplicado ao longo da ponte no sentido do tráfego do veículo. Essa simplificação funciona bem para pontes com duas longarinas retas apoiadas em pilares com transversinas de apoio. Para casos de pontes com mais de duas longarinas deve-se utilizar os Métodos Analíticos de Clássicos (MAC) ou modelos numéricos a fim de obter com o trem tipo normatizado os esforços em cada uma das

longarinas. A figura 2.7 apresenta o trem-tipo de flexão para uma ponte com duas longarinas retas.

Figura 2.7 - Ilustração da distribuição dos esforços na direção longitudinal



Fonte: Marchetti (2008)

2.2.3.2 Carga móvel segundo a AASHTO LRFD (2014)

Os fatores de distribuição de carga móvel contidos na especificação de projeto de ponte da norma americana são mais complexos e consideram mais parâmetros, como o comprimento da ponte, rigidez e a espessura da laje, sendo aplicados a todos os tipos de pontes. A carga móvel no LRFD consiste em um veículo tipo hipotético (HL-93) em conjunto com uma carga da pista de rolamento, o qual consiste em uma combinação de cargas mais desfavorável. Ambos, caminhão e pista, têm uma largura do eixo de 1,82 m; que é o fator o mais importante que afeta a distribuição transversal das cargas móveis. Por conseguinte, assume-se que a diferença na configuração da carga móvel não afeta a sua distribuição.

Três cargas básicas para pontes, compõem o chamado HL-93, à saber:

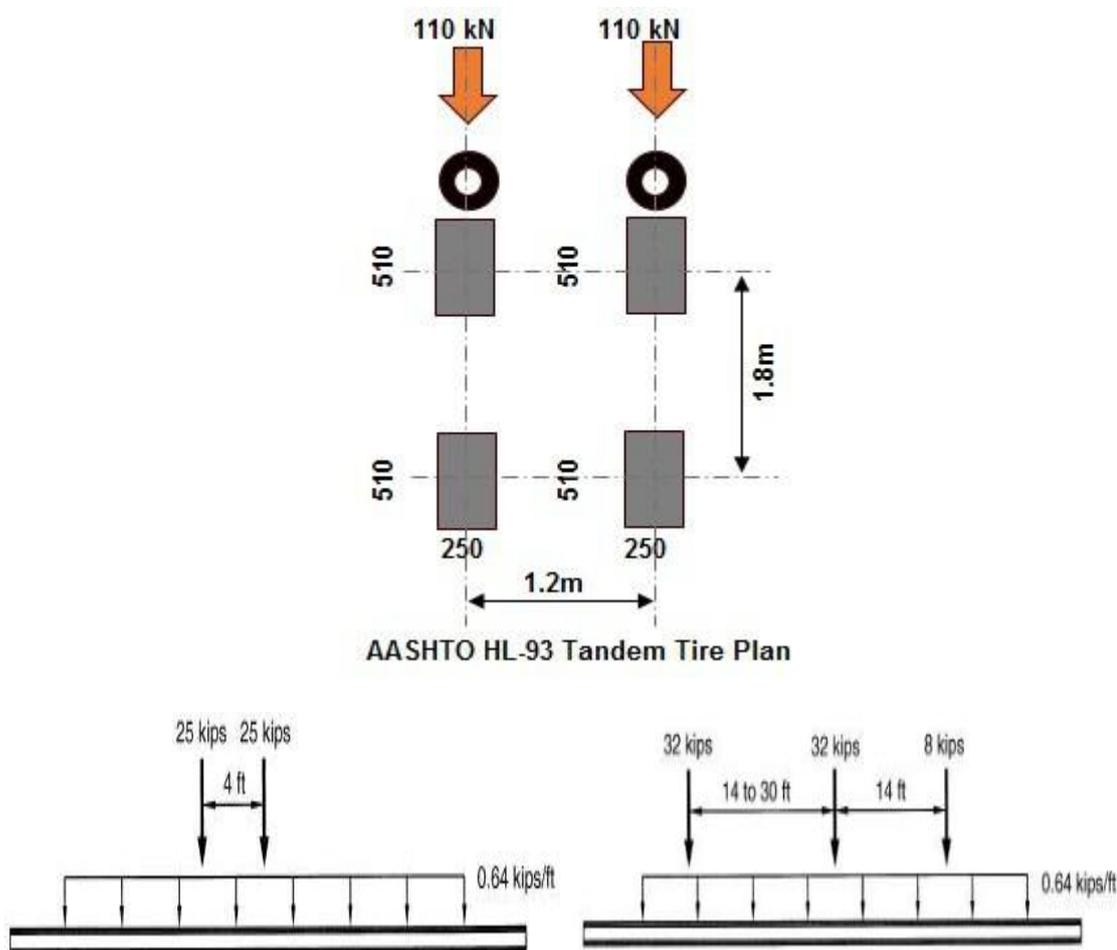
- Veículo-tipo: HS-20-44, com 20 toneladas de carga nos primeiros dois eixos;
- Tandem: consiste em dois eixos pesando 110 KN, cada, espaçados 1,2 m;
- Carga da Pista de Rolamento: carga uniformemente distribuída de 9,3 KN/m, ocupando 3 m, transversalmente.

O HL-93 será o máximo entre as duas combinações:

- Tandem + Carga da pista de rolamento;
- Veículo tipo + Carga da pista de rolamento.

Os detalhes do veículo tipo hipotético, são mostrados na figura abaixo:

Figura 2.8 - Veículo Tipo Hipotético, HL-93 e combinação mais desfavorável



Fonte: AASHTO LRFD (2014)

2.3 Pesquisas sobre repartição de cargas em Tabuleiros de pontes em vigas

Algumas pesquisas têm sido feitas nas últimas décadas com intuito de determinar a distribuição de cargas em tabuleiros de pontes com longarinas retas, sendo a maior parte destes trabalhos direcionados à influência do número de transversinas e seus efeitos na repartição de carga transversal e efeito na rigidez formado pelas mesmas e o tabuleiro das pontes,

De acordo com Cho *et al.* (2014), o conceito de fatores de distribuição de carga móvel foi introduzido por Newmark em 1948. Os primeiros estudos realizados sobre os fatores de distribuição de cargas foram definidos considerando a análise estrutural

em uma dimensão e aplicados apenas para pontes com traçados longitudinais retilíneos. Eles podiam ser calculados através da relação S/D , em que S representava o espaçamento entre as longarinas em "pés" e D uma constante que dependia do tipo da ponte e do número de linhas de carga. Vale salientar que esses fatores só foram incluídos na AASHTO no início dos anos 90. Entretanto, Zokaie *et al.* (1991) mostraram que essa formulação fornecia valores de esforços internos menores que o esperado para vigas com espaçamento lateral pequeno e superestimava os valores de esforços internos para aquelas pontes com maior espaçamento entre as longarinas. Desse modo, Zokaie *et al.* (1991) desenvolveram formulações novas para diversos tipos de pontes retas, que são a essência dos fatores de distribuição de carga até hoje utilizados pela norma americana.

Almeida & Machado (1996) observaram a influência das transversinas nos tabuleiros em pontes com vigas múltiplas com seção transversal composta por oito vigas pré-fabricadas ligadas pela laje. De acordo com os resultados observados, os momentos fletores, nas vigas principais, não demonstraram mudanças na presença de uma, duas ou a ausência das transversinas intermediárias. O contrário ocorreu nos painéis da laje, tendo sido verificado a diminuição da rigidez do conjunto formado pelas lajes e transversinas.

Barr *et al.* (2001) avaliaram a distribuição das cargas em pontes formadas por vigas protendidas pré-moldadas. Os autores comparam os resultados obtidos em ensaios de estruturas reais com os modelos numéricos calculados. Foi concluído que a continuidade entre vãos e a presença das transversinas intermediárias não apresentaram influência na distribuição de cargas, mas os fatores como esconidade e o tipo de carregamento afetaram a distribuição das cargas de maneira significativa.

Araújo *et al.* (2005) comparam os fatores da distribuição das cargas, através de um modelo computacional com elementos finitos, de acordo com as prescrições da AASTHO LRFD (1998), da AASHTO (2002) e da NBR 6118 (2003), com a utilização ou não das transversinas de apoio e intermediárias. Os pesquisadores concluíram que as mudanças na distribuição de cargas ocorreram quando a carga foi disposta sobre a longarina central com a presença da transversina intermediária.

Souza Lima *et al.* (2006), mostraram um estudo de comportamento a respeito das cargas móveis em um viaduto sem a transversina central. Os resultados observados com a ausência da transversina central não exerceram qualquer esforço

nas longarinas, contudo os esforços de flexão na laje tiveram seu valor alterado significativamente.

Judice *et al.* (2008), realizaram a distribuição de cargas em pontes e viadutos, com e sem transversinas internas. No estudo proposto, aplicou-se uma carga unitária distribuída ao longo da ponte, analisando modelos em elementos finitos, baseados em tabuleiros reais com seção transversal em vigas múltiplas e os resultados obtidos comparados com aqueles propostos na literatura técnica. Nesta pesquisa, concluíram que modelos realizados com modelagem computacional, geraram resultados mais refinados, e que a utilização, ou não, das transversinas não interferiu ou teve pouca importância nos resultados dos carregamentos das longarinas.

Cavalcanti *et al.* (2016), propuseram um estudo numérico realizado nos programas SAP 2000 e CSi Bridge V17 via método dos elementos finitos, para pontes de vigas pré-moldadas e moldadas in loco para diferentes quantidades de transversinas, variando as ligações do tabuleiro com os pilares intermediários como flexíveis e monolíticas, com o intuito de estudar a influência das transversinas no desempenho estrutural das pontes. Os autores verificaram deslocamentos e esforços máximos nas longarinas e pilares e concluíram que o uso de transversinas intermediárias aumentou os deslocamentos verticais no tabuleiro, mas reduziu os deslocamentos relativos entre longarinas a partir da redistribuição de esforços.

2.4 Métodos de Cálculo

A repartição transversal das cargas em estruturas tipo laje depende da eficácia da ligação transversal entre os elementos de suporte principais. Os métodos utilizados para análise da repartição podem ser classificados como analíticos e numéricos. Nos métodos analíticos normalmente considera-se uma estrutura sujeita a cargas concentradas, do gênero das originadas pelos veículos correntes, uma vez que desta forma qualquer carga num ponto indiferenciado da estrutura será suportada não apenas pelo elemento principal, mas também com o auxílio dos elementos adjacentes. Nos métodos numéricos pode ser feita a mesma consideração supracitada ou pode-se fazer a representação dos veículos e de outras cargas solicitando o tabuleiro das pontes.

Os métodos de análise de distribuição de carga em tabuleiros de pontes podem ser agrupados em três categorias: **(a)** Método de Grelha, **(b)** Método da Placa Equivalente e **(c)** Método dos Elementos Finitos.

a) Método de Grelha

No método de grelha, o tabuleiro composto pela laje apoiada nas longarinas (vigas longitudinais) e transversinas (vigas transversais) forma uma grelha de vigas equivalentes. Tal sistema passou a ser bastante utilizado devido a fácil assimilação por parte dos engenheiros principalmente após o advento dos microcomputadores. De acordo com Gavioli (1998) a vantagem deste método é que a esconsidade, chaves de cisalhamento entre os elementos pré-moldados, diafragmas e rigidez da viga de borda podem ser facilmente modelados. Por outro lado, o método apresenta desvantagens tais como a necessidade do cálculo das características geométricas das barras equivalentes e a necessidade de aumentar o número de barras em regiões onde se deseja a análise local do tabuleiro sob efeito de um carregamento. Dentre os modelos analíticos de distribuição de carga em tabuleiros com vigas múltiplas a utilizar o método de grelha, destacam-se os métodos de Engesser-Engesser-Courbon e o de Leonhart. Tais métodos consideram as hipóteses básicas da Teoria das Estruturas:

- **Comportamento Linear Elástico:** as deformações são linearmente proporcionais aos carregamentos aplicados (Lei de Hooke);
- **Pequenas Deformações:** As deformações são muito pequenas quando comparadas com as dimensões da estrutura;
- **Seções Planas:** A seção transversal, após a deformação, permanece plana e normal ao eixo deformado;
- **Princípio de Saint-Venant:** Sistemas de forças estaticamente equivalentes causam efeitos idênticos em pontos suficientemente afastados da região de aplicação das cargas.

b) Método da Placa Equivalente

Esse método baseia-se na teoria geral das placas ortotrópicas onde o tabuleiro como um todo, constituído por laje, longarinas e transversinas, é substituído por uma placa ortotrópica equivalente, na qual as propriedades longitudinais e transversais

representam a média das propriedades do modelo. Desde que os espaçamentos entre as longarinas e transversinas sejam suficientemente pequenos.

Desprezando o efeito da torção e utilizando o efeito dos coeficientes de repartição na consideração das cargas, em 1946 Guyon propôs o método da placa equivalente que foi posteriormente aprimorado por Massonnet através da consideração do efeito de torção nas vigas. Segundo Gavioli (1998) o método é conveniente porque permite a análise de vários tipos de tabuleiro considerando-se apenas a geometria e parâmetros de rigidez, que podemos representar por um pequeno número de tabelas dimensionais. A utilização do método é ainda mais eficaz quando o tabuleiro é composto por elementos justapostos, onde as rigidezes tornam-se uniformes.

c) Método dos Elementos Finitos

O método dos elementos finitos (MEF) é um método aproximado e aplicado normalmente em problemas onde as soluções por métodos analíticos não são satisfatórias. O MEF trata o problema contínuo como discreto. O capítulo 4 desta pesquisa discorrerá com mais profundidade sobre este método.

2.4.1 Método de Engesser-Courbon

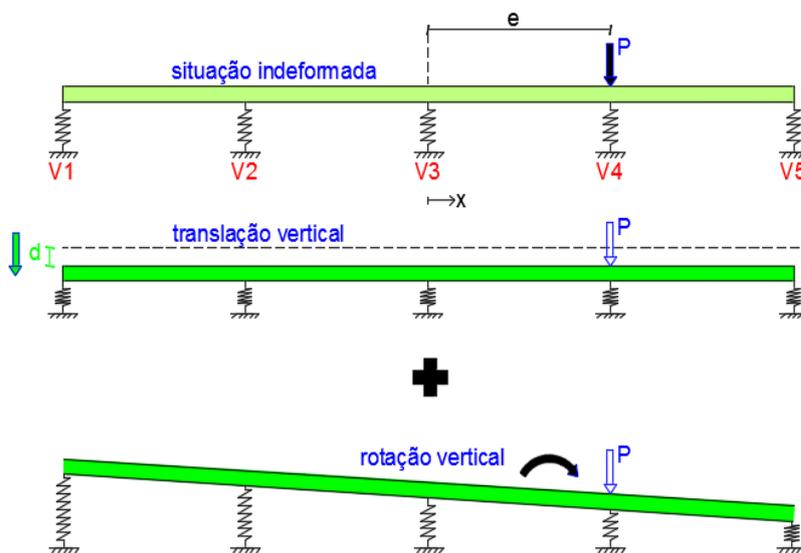
O método de Engesser-Courbon baseia-se no método de grelha para a análise da distribuição de carga em pontes de tabuleiro de vigas múltiplas. Os resultados obtidos pelo uso deste método são satisfatórios quando o tabuleiro analisado possui a dimensão longitudinal predominante em relação à dimensão transversal (vão da obra maior do que o dobro da largura da mesma $L/b > 2$), a altura das transversinas é da mesma ordem de grandeza das longarinas e as espessuras das longarinas e das lajes são pequenas. Isso se deve às hipóteses simplificadoras adotadas para o presente método em estudo. Segundo Alves (2004), além das hipóteses básicas relativas à Teoria das Estruturas (comportamento linear elástico, pequenas deformações, seções planas e Princípio de Saint-Venant) foram ainda assumidas as abaixo descritas:

- as longarinas são paralelas, ligadas entre si perpendicularmente por transversinas e possuem inércia constante;
- as transversinas estão simplesmente apoiadas nas longarinas e admite-se que estas possuem rigidez infinita a flexão, desprezando-se suas deformações em relação às deformações das longarinas;
- desprezam-se os efeitos de torção: a reação mútua nos cruzamentos das vigas longitudinais com as transversais é unicamente uma força vertical.

Além disso, as restrições na geometria da seção transversal para aplicação do modelo são citadas por Stucchi (2006):

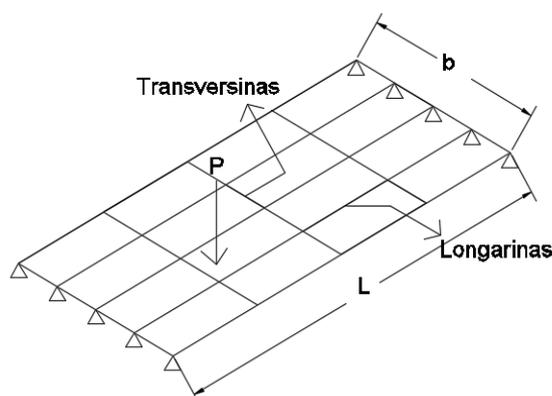
- a largura da seção transversal é menor que metade do vão;
- a altura das transversinas é da mesma ordem de grandeza daquela das longarinas;
- as espessuras das longarinas e das lajes são pequenas.

Figura 2.9 - Deslocamento de corpo rígido da transversina para uma seção com cinco longarinas



Fonte: Jovem *et al.* (2016)

Figura 2.10 - Representação do tabuleiro de vigas múltiplas para aplicação do método de Engesser-Courbon



Fonte: Autor (2016)

Assim, com base nestas hipóteses, as transversinas comportam-se como barras rígidas, permanecendo com seus eixos retilíneos após a deformação do conjunto. Admitindo-se proporcionalidade entre o produto "flecha (y) \times rigidez (J)" e as reações das longarinas (R), tem-se, para as cargas aplicadas nas transversinas:

$$R_i \alpha J_i y_i = J_i (a + b \cdot x_i) \quad (2.1)$$

A solução do problema consiste em se determinar os valores de R_i , a partir do equilíbrio do conjunto. Assim, uma vez equacionados os valores de "a" e "b", obtém-se:

$$R_i = \frac{P}{n} \left[1 + 6 \frac{2 \cdot i - (n+1) e}{n^2 - 1} \frac{e}{\varepsilon} \right] \quad (2.2)$$

que é a expressão geral para uma reação R_i relativa ao apoio constituído por uma longarina genérica i , sendo ($i = 1, \dots, n$) e considerando-se as longarinas idênticas e igualmente espaçadas entre si.

Onde:

P é a carga atuante na transversina;

n é o número total de longarinas;

i é a longarina genérica;

e é a abscissa do ponto de aplicação da carga P ; ε é o espaçamento entre as longarinas.

Assim, a totalidade da carga P é absorvida pelas longarinas (como se não houvesse transversinas no tabuleiro) segundo um coeficiente de repartição transversal r_{ie} dado por:

$$r_{ie} = \frac{1}{n} \left[1 + 6 \frac{2i-(n+1)e}{n^2-1} \frac{e}{\varepsilon} \right] \quad (2.3)$$

Uma vez conhecidos os coeficientes r_{ie} , torna-se possível obter as solicitações e reações de apoio nas longarinas através do carregamento das linhas de influência de reação r_{ie} (na transversal) e, posteriormente, do carregamento das linhas de influência das longarinas na direção longitudinal. O método também permite o estudo de casos mais genéricos, onde as longarinas são desiguais (em inércia) e desigualmente espaçadas.

Nestes casos, toma-se como origem do eixo x o centroide das seções das longarinas, afetadas de massas proporcionais às inércias correspondentes. Os resultados obtidos por este método serão mais satisfatórios, na medida em que o parâmetro λ for reduzindo, sendo:

$$\lambda = \frac{1}{2L} \sqrt[4]{\frac{Ln\rho_L}{lt\rho_T}} \quad (2.4)$$

Onde: L é o comprimento do tabuleiro; l é a largura do tabuleiro; n é o número de longarinas; t é o número de transversinas; ρ_L é a rigidez média das longarinas (EJ); ρ_{TL} é a rigidez média das transversinas (EJ).

Para casos de carga (P_h) aplicada nas longarinas (h), substitui-se a carga (P_h) por um sistema equivalente, constituído por diversas cargas (P_{h1} , P_{h2} , etc....) aplicadas nos pontos de cruzamento da longarina carregada (h) com as transversinas que constituem a grelha. A partir desta substituição procede-se da forma descrita no caso de cargas aplicadas nas transversinas.

2.4.2 Método de Leonhardt

Leonhardt propôs um método, baseado nas deformações elásticas, para obter a LIE (Linha de Influência Elástica) de reações no viga principal da superestrutura, sob as seguintes condições:

- longarinas com momento de inércia constante em toda a sua extensão;

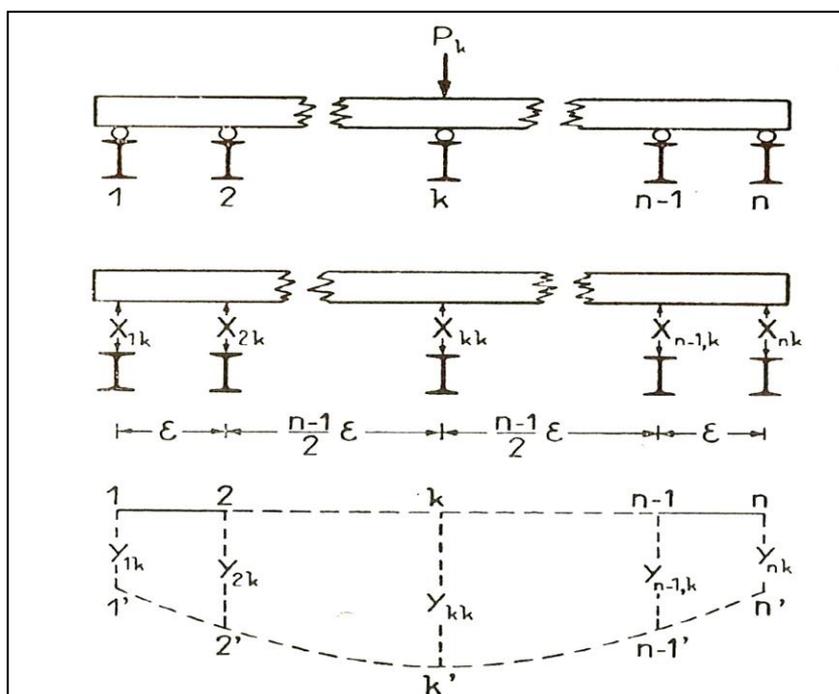
- longarinas simplesmente apoiadas em suas extremidades;
- transversinas igualmente espaçadas.

Neste método, além das hipóteses básicas da Teoria das Estruturas, foram ainda admitidas as seguintes:

- todas as transversinas do tabuleiro são representadas por uma única transversina fictícia, apoiada no meio dos vãos das diversas longarinas;
- esta transversina fictícia é considerada como simplesmente apoiada nas longarinas;
- desprezam-se os efeitos de torção.

Sob ação de uma carga P_k unitária, o conjunto se deforma, originando reações $r_{1k}, r_{2k}, \dots, r_{ik}, \dots, r_{nk}$ denominadas “coeficientes de repartição transversal”, onde r_{ik} é a reação correspondente à longarina “i” quando a carga unitária atua na transversina “k” (Figura 2.11).

Figura 2.11 - Esquema ilustrativo do método



Fonte: Leonhardt (1979)

Uma vez obtidos os coeficientes r_{ik} , a determinação dos esforços seccionais e reações de apoio nas longarinas pode ser feita de forma idêntica à do método de Engesser-Courbon. A deformabilidade do conjunto e, portanto, os valores dos

coeficientes, r_{ik} , mostrados na figura 2.12, dependem nos casos normais das seguintes grandezas:

- (a) da relação entre inércias da transversina (J) e longarinas (J), expressa pelo parâmetro η , onde:

$$\eta = \frac{J}{J} \quad (2.5)$$

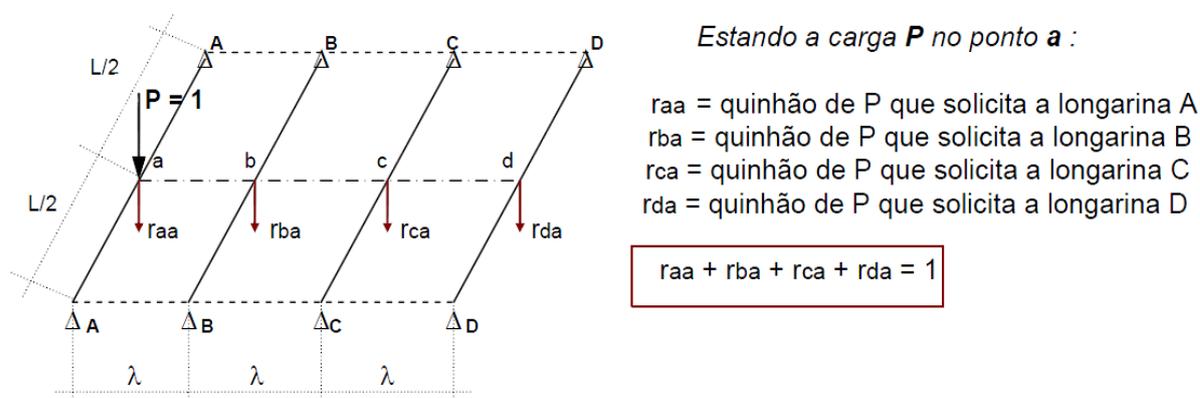
- (b) da relação entre o afastamento recíproco das longarinas (ε) e o vão (L), expressa pelo parâmetro λ , onde:

$$\lambda = \frac{\varepsilon}{L} \quad (2.6)$$

Assim, os coeficientes de repartição transversal serão função do grau de rigidez da estrutura, expresso pelo parâmetro ζ , onde:

$$\zeta = \frac{\eta}{(2.\lambda)^3} = \frac{J}{J} \cdot \left(\frac{L}{2.\varepsilon}\right)^3 \quad (2.7)$$

Figura 2.12 - Coeficientes de repartição transversal do método de Leonhardt



Fonte: Antonio Neto (2015)

Tomando-se ζ como parâmetro de entrada, podem-se obter os coeficientes de repartição transversal tabelados para diversos casos, inclusive aqueles com longarinas externas com rigidez diferente das internas. Podem ainda ser analisados casos especiais com diferentes tipos de vinculação nas longarinas.

Segundo Antonio Neto (2015), existem algumas observações importantes, a respeito da utilização do método:

- a)** quando a viga principal tem momento de inércia variável, o cálculo dos coeficientes de distribuição deve ser feito diretamente pelos processos das grelhas. De um modo

aproximado, o problema poderá ser resolvido multiplicando-se o momento de inércia I_c no centro da viga principal pela relação ψ_V . No qual ψ_V é a relação entre as flechas, no centro, devida a uma carga concentrada na viga sobre dois apoios de altura constante e na viga real; portanto substituímos a viga real por uma viga com momento de inércia igual a $\psi_V I_c$;

b) se houver várias transversinas, substituem-se estas por uma só transversina virtual com momento de inércia majorado pelo fator i dado pela tabela 2.1 que apresenta a relação entre o número de transversinas e o fator i ;

Tabela 2.1 - Relação entre o número de transversinas e o fator i

Número de Transversinas	i
1 ou 2	1,0
3 ou 4	1,6
5 ou mais	2,0

c) para as vigas contínuas com momento de inércia constante, podemos usar os fatores dados nas tabelas encontradas em Leonhardt (1979), permitindo corrigir o momento de inércia da viga real, para efeito de uso das Tabelas de Coeficiente de Distribuição (ver anexo);

d) quando tivermos longarinas extremas mais reforçadas, não poderemos aplicar as Tabelas dadas em Leonhardt (1979). Neste caso, o mesmo autor fornece dados para a obtenção dos coeficientes de distribuição transversal.

2.4.3 Método de Guyon-Massonet

O Método de Guyon-Massonet consiste na assimilação da estrutura do tabuleiro de ponte como um todo, composto por laje, vigas principais e transversinas, a uma placa ortotrópica equivalente, atribuindo-lhe diferentes rigidezes nos sentidos longitudinal e transversal, para a determinação dos esforços e deslocamentos. A resolução da placa ortotrópica é feita por meio da interpolação entre os casos extremos: grelha ortotrópica sem resistência à torção e laje maciça isotrópica.

Para que a assimilação do tabuleiro a uma laje homogênea ortotrópica seja utilizada com maior exatidão, é necessário que o tabuleiro seja composto por um

número suficiente de longarinas, ou seja, os espaçamentos entre longarinas e transversinas devem ser suficientemente pequenos.

Alves (2004) explica que a teoria geral das lajes ortotrópicas admite as seguintes hipóteses básicas:

- a espessura da placa é constante e pequena em relação às outras dimensões;
- as deformações são puramente elásticas, obedecendo assim a lei de Hooke;
- os deslocamentos são pequenos em relação à espessura da laje;
- pontos alinhados segundo uma normal à superfície média da laje indeformada encontram-se também linearmente dispostos em uma normal à superfície média na configuração deformada;
- pontos situados na superfície média da laje deslocam-se somente normalmente à mesma;
- as propriedades elásticas em relação ao material são constantes, podendo ser diferentes nas duas direções ortogonais.

O estudo do problema foi desenvolvido, a partir destas hipóteses de comportamento da placa ortotrópica, baseando-se ainda nas premissas abaixo enunciadas:

a) o tabuleiro como um todo, composto por laje, longarinas e transversinas é substituído por uma placa ortotrópica equivalente. Tal associação se faz admitindo-se que os espaçamentos entre longarinas e transversinas são suficientemente pequenos para que se possa assimilar o tabuleiro a um sistema estrutural contínuo (placa);

b) considera-se que os espaçamentos entre longarinas e transversinas sejam suficientemente pequenos para que o sistema se assemelhe a uma placa. Assim sendo, o tabuleiro composto por laje, longarinas e transversinas é substituído por uma placa ortotrópica equivalente. Além disso, admite-se que qualquer distribuição de carregamento ao longo do sistema equivalente seja aproximada por meio da expressão:

$$p(x) = p \cdot \text{sen} \frac{\pi \cdot x}{L} \quad (2.8)$$

Onde:

$p(x)$ é uma função senoidal do carregamento distribuído;

p é um valor máximo do carregamento distribuído; x = Distância longitudinal, partindo de uma borda.

Segundo Guyon & Massonet *apud* San Martin (1981), um tabuleiro com diversas longarinas e transversinas é fisicamente uma estrutura intermediária entre uma laje ortotrópica e uma grelha com vinculação rígida a torção. Contudo, devido ao valor do coeficiente de Poisson do concreto ser relativamente baixo, é possível desprezar a rigidez a torção ρ_{xy} . Obtém-se, então, uma equação diferencial específica do método:

$$\rho_x = \frac{\partial^4 w}{\partial^4 x} + 2\varphi\sqrt{\rho_x\rho_y} \frac{\partial^4 w}{\partial^2 x \partial^2 y} + \rho_y \frac{\partial^4 w}{\partial^4 y} \quad (2.9)$$

Sendo:

- Rigidez à flexão das longarinas:

$$\rho_x = \frac{EJ}{l_x} \quad (2.10)$$

- Rigidez à flexão das transversinas:

$$\rho_y = \frac{EJ}{l_y} \quad (2.11)$$

- Parâmetro de torção:

$$\varphi = \frac{\rho_x + \rho_y}{2\sqrt{\rho_x\rho_y}} \quad (2.12)$$

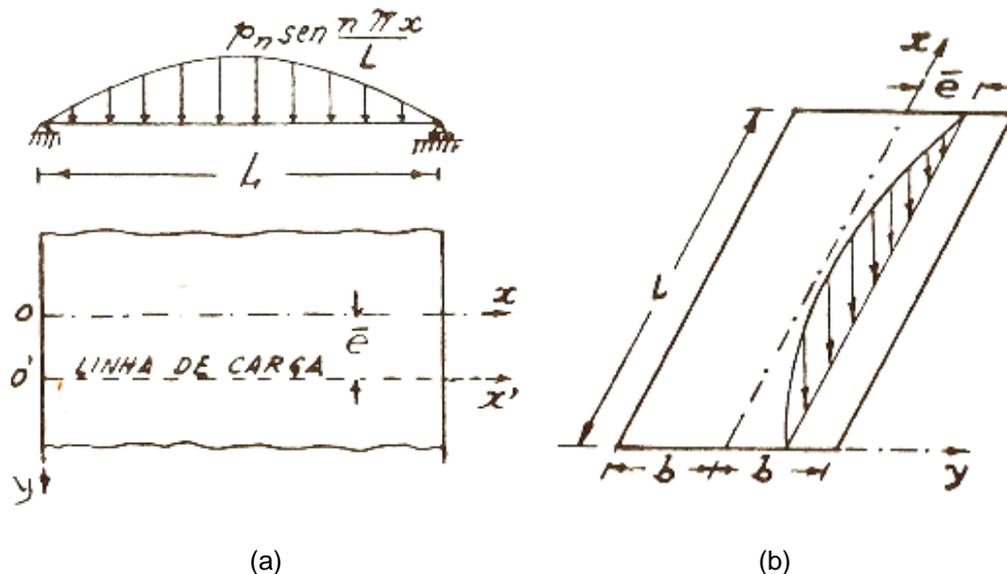
Onde:

$\varphi = 0 \rightarrow$ Grelha sem torção;

$\varphi = 1 \rightarrow$ Placa ortotrópica.

Desse modo, com base num tabuleiro de largura infinita e comprimento finito L (2.13.a) e em outro de dimensões finitas (Figura 2.13.b) procurou-se obter uma solução exata para a equação (2.9).

Figura 2.13 -Tabuleiro: (a) de largura infinita; (b) de dimensões finitas



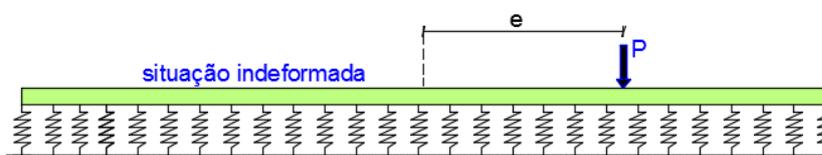
Fonte: San Martin (1981)

Com o objetivo de possibilitar a resolução da equação diferencial acima, Guyon & Massonet *apud* San Martin (1981) levaram em consideração a composição de um trem tipo de pontes rodoviárias usuais acrescidas do peso próprio e concluíram que a melhor aproximação seria a de um carregamento senoidal aplicado de duas formas diferentes: em forma de carga linear aplicada a certa excentricidade a partir da origem e como carregamento distribuído variável ao longo de x e constante em y , ambos na forma:

$$p(x) = p \cdot \text{sen} \frac{\pi x}{L} \quad (2.13)$$

Com isso, os autores conduziram a solução do problema baseando-se em duas premissas: tabuleiro com poucas longarinas e com muitas longarinas. Para o primeiro caso, a solução encontrada é idêntica à do método de Leonhardt. Já no segundo caso, considera-se uma transversina elementar de largura dx como uma viga apoiada sobre uma base elástica (Figura 2.14).

Figura 2.14 - Transversina sobre base elástica



Fonte: Jovem *et al.* (2016)

Dessa modelagem obtém-se a equação:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{\rho_L \pi^4}{\rho_T L^4} f(y) = 0 \quad (2.14)$$

Observa-se que a equação (2.14) é realmente análoga a de uma viga simplesmente apoiada sobre base elástica com módulo de recalque:

$$\bar{\mu}_0 = \rho_L \frac{\pi^4}{L^4} \quad (2.15)$$

Assim, a repartição transversal da carga senoidal pode ser caracterizada pelo índice de repartição transversal ou índice de Guyon-Massonet através da relação entre as funções de deslocamento.

$$\chi_0 = \frac{w}{w_m} \quad (2.16)$$

Onde:

$w(x,y)$ é deslocamento da placa ortotrópica devido à aplicação da carga senoidal segundo uma linha;

$w_m(x,y)$ é deslocamento da placa ortotrópica, com a mesma carga repartida sobre o tabuleiro de largura $2b$.

O índice de repartição transversal é um número sem dimensão, por isso que representa a relação entre o deslocamento vertical de um ponto da ponte carregada, excentricamente, com a carga linear senoidal e o deslocamento que corresponderia a esse mesmo ponto supondo a carga distribuída, uniformemente, em toda a largura do tabuleiro (Guyon & Massonet *apud* San Martin, 1981).

Com isso, é possível saber como a carga senoidal se distribui para as longarinas, já que o deslocamento é proporcional a reações das transversinas sobre as longarinas.

Diante da complexidade da expressão resultante da solução da equação diferencial da placa ortotrópica, que permite calculá-lo, Guyon e Massonet simplificaram o problema conduzindo a utilização de uma série de tabelas e gráficos nos quais são encontrados os valores dos índices de repartição transversal χ_0 que dependem dos seguintes parâmetros adimensionais:

- o coeficiente de travejamento θ , dado por:

$$\theta = \frac{b}{L} \sqrt[4]{\frac{\rho_x}{\rho_y}} \quad (2.17)$$

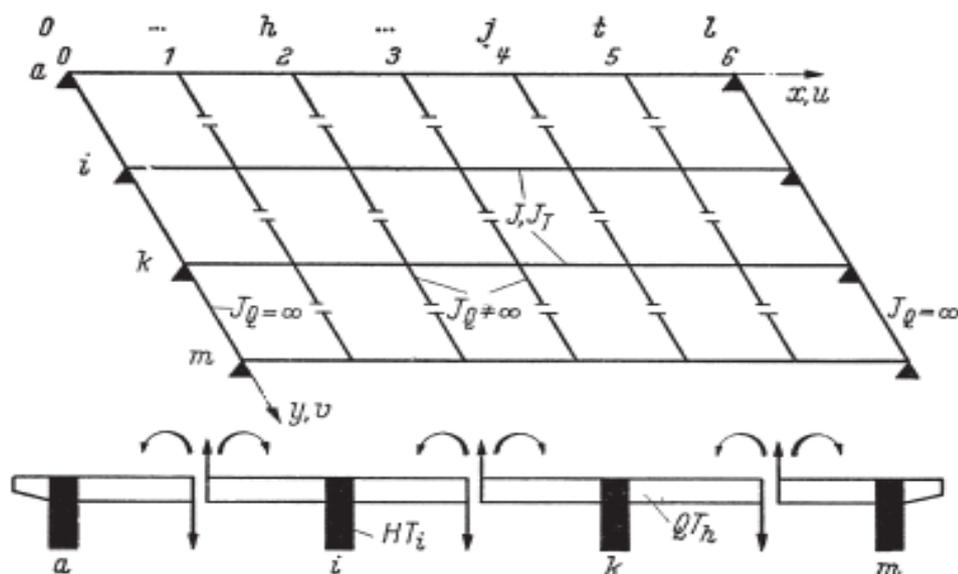
Onde quanto maior for o valor de θ , mais frágil é o travamento; b é a semi-largura da placa equivalente; L é o comprimento da placa equivalente; ρ_x e ρ_y são os parâmetros já definidos nas Eq. (2.10) e (2.11), respectivamente.

- o parâmetro de torção φ ;
- a posição da carga, definida por sua excentricidade (fração da semi-largura);
- a posição da viga que se quer obter o índice χ_φ (fração da semi-largura).

2.4.4 Método de Homberg-Trenks

O método baseia-se na teoria das grelhas e considera a rigidez torcional somente das longarinas, além da rigidez à flexão das transversinas e longarinas. A essência do método baseia-se na ortogonalização dos hiperestáticos (Figura 2.15).

Figura 2.15 - Sistema primário estaticamente determinado



Fonte: Homberg-Trenks (1962)

Uma grelha simplesmente apoiada com "m" longarinas e "t" transversinas é $2t(m-1)$ vezes hiperestática. Através da ortogonalização dos hiperestáticos, a matriz $2t(m-1)$ transforma-se em "t" matrizes independentes, cada uma associada a $2(m-1)$ equações e incógnitas. Nos casos estudados (número ilimitado de longarinas) a ortogonalização é possível com grupos de cargas e de momentos, sendo necessário

que as longarinas possuam inércia à flexão J e à torção \acute{J} constantes, e que as transversinas sejam idênticas e igualmente espaçadas entre si.

Forma-se o sistema principal estaticamente determinado, seccionando-se as longarinas em $(m-1)$ pontos. Em cada seção são aplicados os elementos dos grupos de carga e de momentos $\alpha_{h(n)}$, que são regidos pela seguinte formulação:

$$\alpha_{h(n)} = \alpha_{(n)}^0 \text{sen} \frac{n\pi x_h}{L}, \quad 0 \leq x_h \leq L \quad (2.18)$$

Onde: $h = [1, 2, \dots, t]$ abscissas de uma transversina; $n = [1, 2, \dots, t]$ número de termos da série; L é o vão das longarinas.

Os resultados deste trabalho foram apresentados na forma de tabelas que permitem sua utilização a partir do conhecimento dos seguintes parâmetros de entrada:

- Rigidez à flexão da grelha:

$$Z = \left(\frac{L}{2a}\right)^3 \frac{\acute{J}}{J} \quad (2.19)$$

- Rigidez à torção da grelha:

$$Z_T = \frac{L}{8a} \frac{E\acute{J}}{GJ_T} \quad (2.20)$$

Onde L é o vão das longarinas; a é o espaçamento entre longarinas; J é a inércia à flexão das longarinas; \acute{J} é a inércia à flexão das transversinas; J_T é a inércia à torção das longarinas.

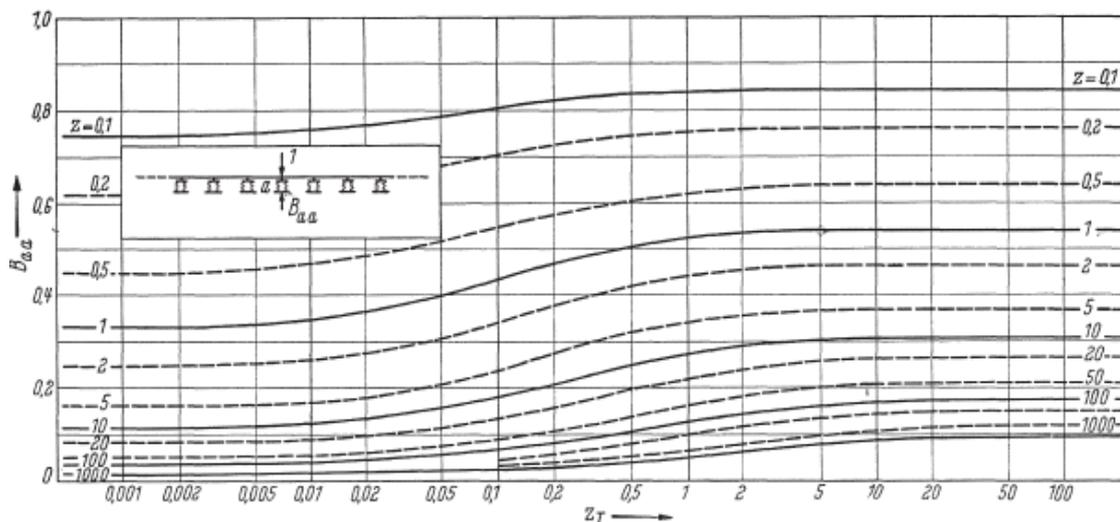
Tem-se como observação que as tabelas de Homberg-Trenks são disponíveis para um número infinito de longarinas e valores de Z , compreendidos entre 0 e ∞ .

Deve-se ter um cuidado maior quando a malha trabalha com apenas duas, ou até três vigas principais, em particular, se a rigidez de torção da viga principal é elevada e a rigidez à flexão do elemento transversal é baixa. Em tal caso, as linhas de influência terão consideráveis curvaturas, devido às reações das vigas secundárias. Deve-se, para estes casos, escolher seções que resultem em rigidezes das vigas, semelhantes.

Desta forma, o método é bastante eficiente para um número de vigas principais acima de 3 (três), com boa rigidez à torção das longarinas, já que a reação das vigas

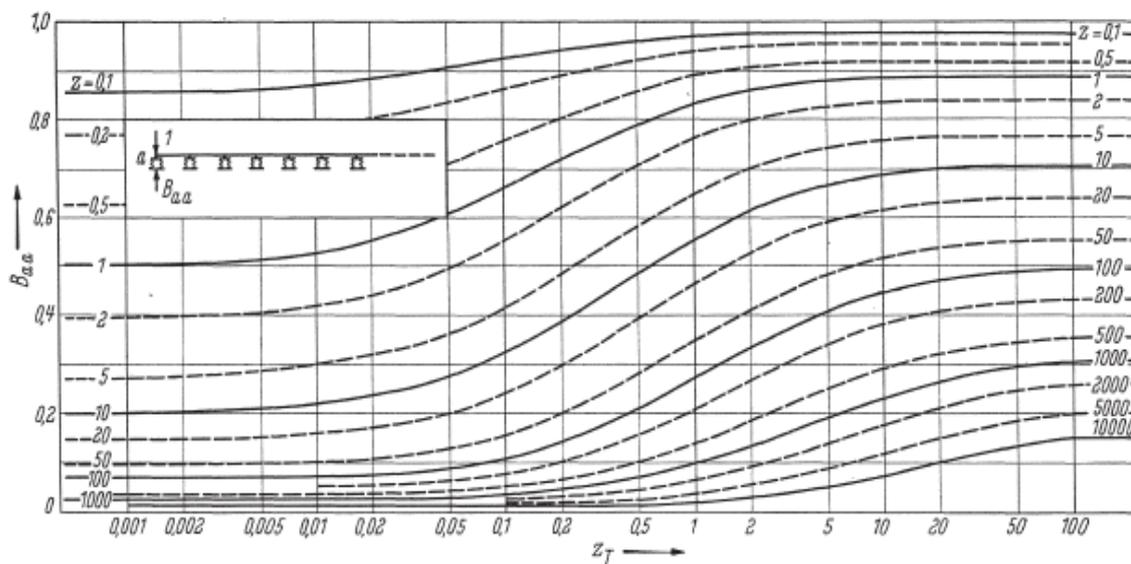
transversais será pequena. O aumento da resistência à torção ao longo de certo nível não traz vantagens substanciais, de acordo com as figuras 2.16 e 2.17, quando as reações de apoio assumem valores constantes, dentro de um certo limite.

Figura 2.16 - Força de reação ao longo da viga principal central em função de Z e Z_T



Fonte: Homberg-Trenks (1962)

Figura 2.17 - Força de reação ao longo da viga principal de extremidade em função de Z e Z_T



Fonte: Homberg-Trenks (1962)

Para Homberg-Trenks (1962), uma malha de análise infinitesimal pode ser arbitrada, desde que a resultante, para deformações e forças internas, siga as premissas da Teoria das Placas, para isotropia de rigidez do conjunto formado pelas longarinas e transversinas.

2.4.5 Processo de Fauchart

O Processo de Fauchart consiste em um procedimento de cálculo simples, cuja reconhecida eficácia permite transformar o problema bidimensional em séries unidimensionais. O processo adota algumas hipóteses que possibilitam a sua utilização, tais como: a desconsideração do trabalho longitudinal das lajes e a admissão de que as longarinas obedecem à hipótese das seções planas, que seu material segue a Lei de Hooke e que as mesmas são biapoiadas e têm inércia constante.

Partindo destas hipóteses de cálculo, apresentam-se as primeiras equações que dirigem o processo. Inicialmente, a viga longarina isolada deve obedecer à equação diferencial da linha elástica, dada por:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{M_x}{EI} \therefore \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \frac{q_x}{EI} \quad (2.21)$$

onde y é a flecha da viga em cada ponto x , $M(x)$ é o momento fletor, E é o módulo de elasticidade longitudinal, I é o momento de inércia e $q(x)$ é a carga distribuída.

Simultaneamente, a viga longarina é regida pela equação diferencial da torção, dada por:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{T}{GJ} \therefore \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{m(x)}{GJ} \quad (2.22)$$

onde θ é o ângulo de torção na posição x , T é o momento torçor aplicado no ponto x , G é o módulo de elasticidade transversal, J é a constante torcional da seção transversal e $m(x)$ é o momento torçor distribuído ao longo do eixo da viga.

Utilizando a série de Fourier, neste caso, a séries de senos devido às condições de contorno do sistema que devem ser respeitadas (vigas biapoiadas), é possível transformar essas equações diferenciais em algébricas. Este procedimento é semelhante à solução de Navier, aplicada para solução de placas finas, onde a constante de mola para o deslocamento vertical e a constante de mola para a rotação da viga em torno do seu eixo, valem respectivamente:

$$K_{vij} = EI_i \cdot \left(\frac{J\pi}{l}\right)^4 \quad (2.23)$$

$$K_{tij} = GJ_i \cdot \left(\frac{J\pi}{l}\right)^2 \quad (2.24)$$

Diante destas considerações, o problema se reduz a solução de uma faixa unitária de laje onde as vigas longarinas são substituídas por apoios flexíveis. A rigor, seria necessário resolver esta faixa para todos os termos da série e somar os resultados, porém a solução para o primeiro termo já é suficiente.

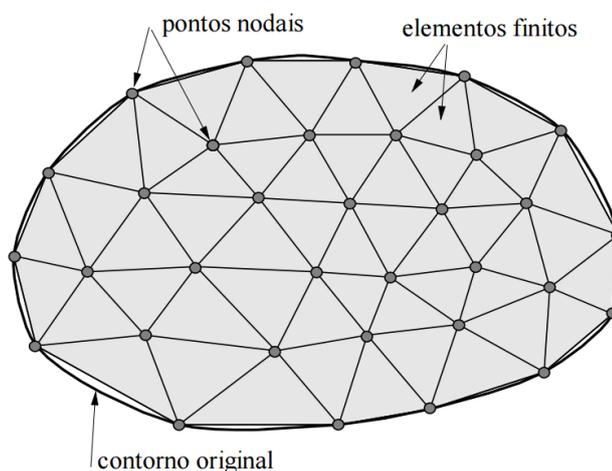
Para obter as linhas de influência que definem as cargas nas vigas, bem como as solicitações mais importantes na laje de ligação, basta resolver a viga sobre apoios elásticos, num programa conveniente, para uma série de posições de uma carga unitária. É importante considerar pelo menos uma posição para cada viga e cada seção considerada relevante. Para esta pesquisa, foi utilizado o software LIP da empresa TQS, desenvolvido por Cardoso Junior (2016).

CAPÍTULO 3

3. Modelos Numéricos de Cálculo

A análise numérica utilizando o método dos elementos finitos (MEF) pode ser aplicada em diversas áreas da engenharia, como por exemplo, problemas acústicos, térmicos, eletromagnéticos e estruturais. No âmbito da Engenharia de Estruturas, o MEF tem como objetivo a determinação do estado de tensão e de deformação de um sólido de geometria arbitrária sujeito a ações exteriores. Este tipo de cálculo tem a designação genérica de análise de estruturas e surge, por exemplo, no estudo de edifícios, pontes, barragens, etc. (Azevedo, 2003). Os elementos finitos são conectados entre si por pontos, os quais são denominados de nós, dando origem à malha. Essas divisões do domínio (meio contínuo) do problema em sub-regiões podem apresentar diferentes formas, tais como a triangular, quadrilateral, entre outras, como mostrado na figura 3.1, onde usualmente tenta-se resolver um problema complexo, subdividindo-o em uma série de problemas mais simples.

Figura 3.1 - Malha de Elementos Finitos



Fonte: Soriano (2003)

No caso específico de pontes, a avaliação da distribuição de esforços nos tabuleiros por meio do conceito de superfícies de influência utilizando o método dos elementos finitos (MEF) como ferramenta, parte do pressuposto que as lajes são representadas por elementos finitos de placa e as longarinas e transversinas pelo elemento finito de barra, de graus de liberdade que permitam o acoplamento com aqueles presentes nos nós da grelha.

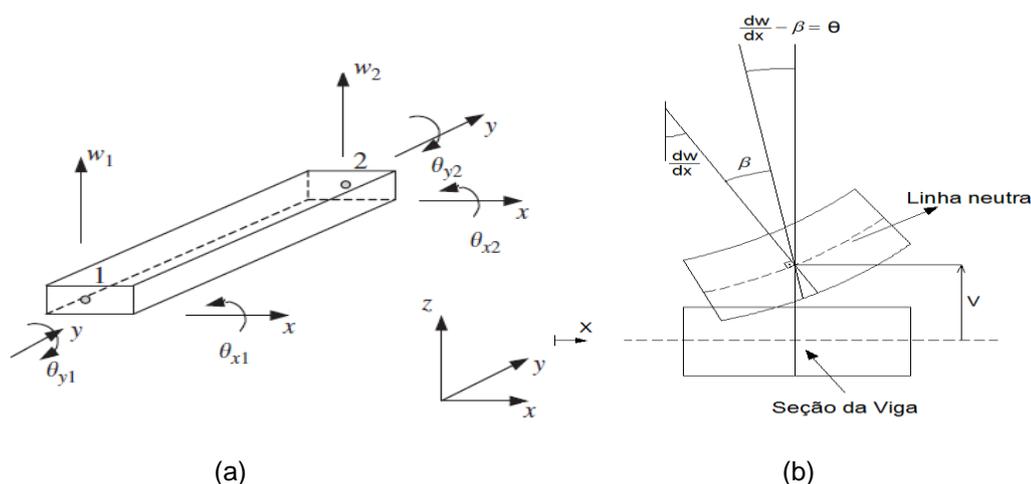
3.1 Formulação Matemática da Barra

Os elementos finitos de barra que serão utilizados nas análises derivam-se da formulação do elemento finito de viga de Timoshenko acrescentando o parâmetro referente à rotação em relação ao eixo longitudinal do elemento. Desta maneira, para os elementos finitos estudados, serão considerados três graus de liberdade por nó, totalizando em seis graus de liberdade para o elemento linear e nove graus de liberdade para o elemento quadrático.

Os possíveis deslocamentos que o elemento poderá apresentar referem-se ao deslocamento transversal ao eixo longitudinal da barra (w), e as rotações segundo os eixos longitudinal (θ_x) e transversal (θ_y). Na figura 3.2.1, se encontra esquematizado os graus de liberdade do elemento finito linear de barra.

Nas duas formulações define-se que as seções permanecem planas após as deformações, entretanto na viga de Timoshenko a seção plana rotacionada não necessariamente é perpendicular ao eixo deformado (linha neutra). Pode-se, portanto, afirmar que a distorção é diferente de zero (Figura 3.2.b).

Figura 3.2 - (a) Graus de liberdade do elemento finito cúbico; (b) Deformação em vigas com efeito do cisalhamento



Fonte: (a) Adaptado de Liu (2003) e (b) Adaptada de Branco (2002)

Desta maneira pode-se escrever a expressão deslocamento u em um ponto qualquer (x,z) diretamente em termos de (θ) :

$$u(x, z) = -z\theta(x) \quad (3.1)$$

Nota-se que a rotação(θ) é igual ao declive do eixo neutral ($\frac{\partial w}{\partial x}$) menos a rotação devido à consideração por deformação quanto ao cisalhamento, expressão (3.2).

$$\theta(x) = \frac{\partial w}{\partial x} - \beta \quad (3.2)$$

Nota-se também que o deslocamento transversal \acute{w} em qualquer ponto (x,z) é dado pelo deslocamento transversal do eixo neutral, relação (3.3).

$$\acute{w}(x, z) = w(x) \quad (3.3)$$

Na teoria de viga de Timoshenko, a relação de tensão e deformação usada é a do estado plano de tensões. Assumindo que a viga se encontra no plano xz e que o material é isotrópico elástico linear a relação tensão-deformação é definida conforme expressão (3.4).

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Se σ_z é assumido igual a zero, então:

$$\varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x \quad (3.5)$$

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \quad (3.6)$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} \quad (3.7)$$

Ao considerar pequenos deslocamentos, o deslocamento ao longo do eixo longitudinal da viga pode ser escrito a partir da equação (3.8):

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.8)$$

Substituindo a expressão (3.8) em (3.1), tem-se a expressão (4.9):

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (3.9)$$

De maneira similar tem-se que para a deformação devido ao cisalhamento a relação com o deslocamento é expressa conforme equação (3.10):

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.10)$$

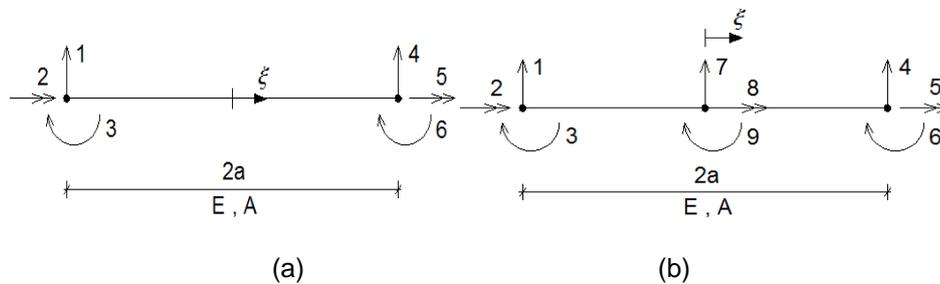
E substituindo a expressão (3.2) em (3.10), tem-se a relação (3.11):

$$\gamma_{xz} = -\theta + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.11)$$

3.2 Formulação do Elemento Finito Barra

O elemento finito de barra será desenvolvido considerando a energia de deformação de uma barra submetida à torção somada à energia de deformação da teoria de viga de Timoshenko. Para isso, a figura 3.3, a seguir, expõe o elemento de barra com as respectivas direções dos graus de liberdade do elemento linear e quadrático.

Figura 3.3 - Elementos Finitos de Barra: (a) Elemento Linear e (b) Elemento Quadrático



Fonte: Azevedo (2003).

As expressões escritas em (3.12) referem-se à aproximação adotada tanto para o deslocamento vertical quanto para as rotações em x e y.

$$w = \sum_{i=1}^4 N_i w_i \theta_x = \sum_{i=1}^4 N_i \theta_{xi} \quad \theta_y = \sum_{i=1}^4 N_i \theta_{yi} \quad (3.12)$$

As funções de forma N são dadas pela expressão a seguir, (4.13) e (4.14):

- Para o elemento linear

$$N_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad N_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (3.13)$$

- Para o elemento quadrático

$$N_1 = \frac{1}{2}(\xi^2 - 1) N_2 = \frac{1}{2}(\xi^2 + 1) N_3 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2) \quad (3.14)$$

Reescrevendo em forma matricial, as relações escritas em (3.12), e respeitando a ordem dos graus de liberdade expostos na Figura 3.3, têm-se as equações (3.15) e (3.16):

- Para o elemento linear

$$\begin{Bmatrix} W \\ \theta_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ W_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

- Para o elemento quadrático

$$\begin{Bmatrix} W \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix}^h = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ W_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ W_3 \\ \theta_{x3} \\ \theta_{y3} \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

Para o elemento de barra em questão a energia de deformação pode então ser obtida a partir da soma das energias de deformação da barra sob torção e da viga de Timoshenko, conforme equação (3.17).

$$U_e = \frac{1}{2a} \int_{-1}^1 \{d\}^T [B^t]^T GI_x [B^t] \{d\}^T d\xi + \frac{a}{2} \int_{-1}^1 \{d\}^T [B^c]^T GÁ [B^c] \{d\}^T d\xi + \frac{1}{2a} \int_{-1}^1 \{d\}^T [B^f]^T EI_y [B^f] \{d\}^T d\xi \quad (3.17)$$

onde \hat{A} é determinado segundo um fator de correção α e obtido pela relação $\hat{A} = \frac{A}{\alpha}$, que depende do tipo da geometria da seção transversal, equações (3.18) e (3.19).

- Para seções retangulares

$$\alpha = \frac{(12+11\nu)}{(10+10\nu)} \quad (3.18)$$

- Para seções circulares

$$\alpha = \frac{(7+6\nu)}{(6+6\nu)} \quad (3.19)$$

O parâmetro ν é o coeficiente de Poisson. De acordo com Owen & Hinton (1980) o parâmetro α pode ser aproximado, usualmente, por 1,5.

Observa-se que o primeiro termo da equação (3.17) se refere à energia de deformação da barra submetida à torção. Enquanto que, o segundo e terceiro termos correspondem à energia de deformação ao cisalhamento e a flexão, respectivamente.

3.2.1 Matriz de Rigidez e Vetor de Forças

A matriz de rigidez é obtida minimizando a energia de deformação e encontram-se nas relações descritas em (3.20), para o elemento linear, e (3.21), para o elemento quadrático.

- Para o elemento linear

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{GA}{2a} & 0 & \frac{GA}{2a} & \frac{-GA}{2a} & 0 & \frac{GA}{2} \\ 0 & \frac{GI_x}{2a} & 0 & 0 & \frac{GI_x}{2a} & 0 \\ \frac{GA}{2a} & 0 & \left(\frac{EI_y}{2a} + \frac{2GA}{3}\right) & \frac{-GA}{2a} & 0 & \left(\frac{GAa}{3} - \frac{EI_y}{2a}\right) \\ \frac{-GA}{2a} & 0 & \frac{-GA}{2a} & \frac{GA}{2a} & 0 & \frac{-GA}{2} \\ 0 & \frac{-GI_x}{2a} & 0 & 0 & \frac{GI_x}{2a} & 0 \\ \frac{GA}{2a} & 0 & \left(\frac{GAa}{3} - \frac{EI_y}{2a}\right) & \frac{-GA}{2a} & 0 & \left(\frac{EI_y}{2a} + \frac{2GA}{3}\right) \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Determina-se o vetor de forças a partir da expressão da energia externa que é escrita conforme expressão (3.21).

$$U_c = \int_v \{P\} \{d\} dv = |J| \int_{-1}^1 N^T \begin{Bmatrix} f_z \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} d\xi \quad (3.21)$$

3.3 Modelagem de Lajes Utilizando Analogia de Grelhas

A analogia de grelha é um método bastante usado para análise de lajes, principalmente devido a sua facilidade de compreensão e utilização, e tem apresentado resultados satisfatórios para uma grande variedade de lajes. Esta técnica foi inicialmente idealizada por Marcus, em 1932, que não dispunha, nesta época, de computadores e, portanto, era preciso se valer de processos aproximados para resolver as lajes.

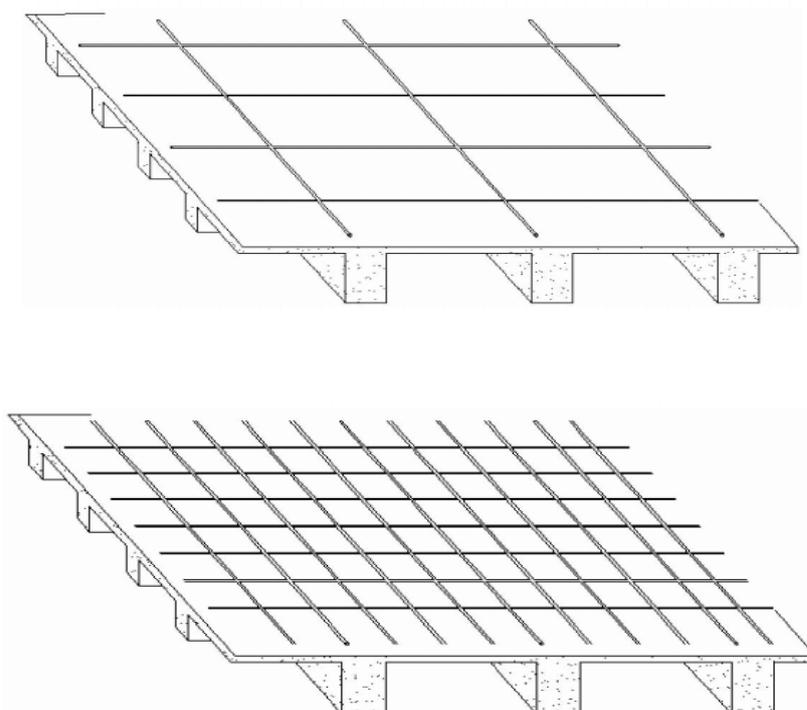
Em 1959, com a constatação de que a análise de grelhas e pórticos planos pelo método dos deslocamentos era bastante parecida, Lightfoot & Sawko adaptaram um programa de cálculo de pórtico plano para o cálculo de grelhas. Mais tarde, Hambly (1976) sistematizou este estudo para o cálculo de tabuleiros de pontes.

Conforme Park & Gamble (1980): a substituição de uma laje por uma série de vigas ortogonais que se cruzam, é provavelmente o mais antigo dos procedimentos. Os momentos fletores assim calculados podem diferir consideravelmente da distribuição verdadeira da teoria elástica devido à omissão dos momentos de torção atuantes em cada elemento da laje, que é comparável a omissão do termo cruzado da equação diferencial de equilíbrio das lajes.

Para analisar uma laje por Analogia de Grelha, deve-se discretizá-la em uma série de faixas com determinada largura. Considerando que as faixas podem ser substituídas por elementos estruturais de barras exatamente nos seus eixos, obtém-se, então uma grelha de barras plana.

As grelhas podem ser consideradas como um conjunto de vigas individuais, interconectadas nos seus nós ou pontos nodais (Figura 3.4).

Figura 3.4 - Discretização de uma laje em uma malha de grelha plana



Fonte: Figueiredo *et al.* (2010)

As rigidezes à torção e flexão em cada região da laje são tomadas, para efeito de análise, como concentradas na barra de grelha mais próxima. As rigidezes longitudinais da laje são concentradas nas barras longitudinais, enquanto as rigidezes transversais são concentradas nas barras transversais. Esses valores devem ser tais que quando a laje em questão e a grelha equivalente forem sujeitas ao mesmo carregamento, as duas estruturas devem apresentar a mesma deformação e os momentos fletores, torsões e esforços cortantes devem ser iguais em seções correspondentes nas duas estruturas. Entretanto, segundo Hambly (1991), isto se dá somente de forma aproximada, devido às diferentes características desses dois tipos de estrutura.

Para determinar a relação entre força e deslocamento, nos métodos clássicos de análise estrutural, utiliza-se o método das forças ou o método dos deslocamentos. No método dos deslocamentos, os deslocamentos são as incógnitas. Isto nos remete as equações anteriormente mencionadas para a resolução dos esforços nas Barras.

3.4 Modelo de placa

O uso placas é frequentemente associado ao cálculo de esforços em tabuleiros de pontes, sendo este uma peça estrutural contínua em duas dimensões com a finalidade de que um carregamento aplicado seja suportado por distribuições de forças de cisalhamento bidimensionais causadas pelo tráfego, fatores climáticos e afins (Hambly, 1991).

Uma abordagem matematicamente exata para um problema de placa fina carregada sobre sua superfície requer solução de equações diferenciais de grande complexidade. Porém a aplicação da teoria clássica de Kirchhoff-Love para estas placas produz resultados suficientemente precisos (Szilard, 2004) (Figura 3.5). Algumas considerações são feitas:

- a espessura da placa é pequena em comparação às outras dimensões;
- os deslocamentos transversais $w(x,y)$ são pequenos em relação à espessura da placa. Uma deflexão de até 1/10 da espessura é aceitável para uma teoria de pequenas deformações (Szilard, 2004);
- as inclinações da superfície média da placa são pequenas;

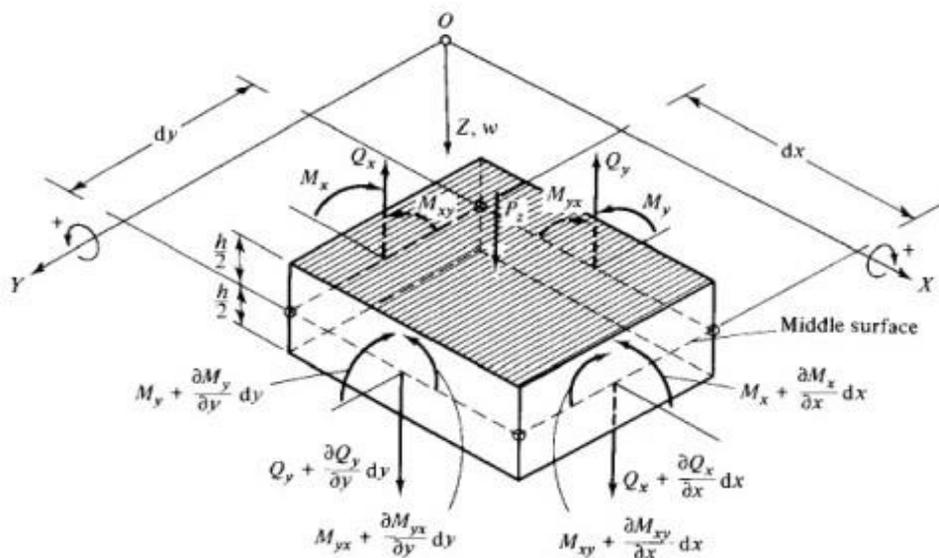
- as seções transversais da placa tendem a permanecerem normais à superfície média da placa – hipótese de Bernoulli;
- as tensões normais na direção do eixo Z (σ_z) podem ser negligenciadas.

O elemento *Shell* no SAP2000 é usado para modelar casca, membrana e placa em comportamento plano e estruturas tridimensionais e define elementos finitos, quadrangular, não distorcidos, por possuírem mais precisão.

O comportamento de flexão da placa inclui dois sentidos: um componente de rigidez da placa a rotação e um componente de rigidez de translação na direção normal ao plano do elemento.

Aplicando-se estas hipóteses nas equações gerais da Teoria das Placas (equações de equilíbrio, equações constitutivas e equações de compatibilidade), transforma-se um problema de análise tridimensional em um problema bidimensional.

Figura 3.5 - Placa carregada com a representação dos seus esforços internos



Fonte: Szilard (2004)

As hipóteses simplificadoras adotadas pela teoria para dedução da equação de placa e que são utilizadas na análise pelo SAP2000, são as seguintes:

- material homogêneo, isotrópico e elástico linear, obediente à Lei de Hooke;
- placa inicialmente plana;

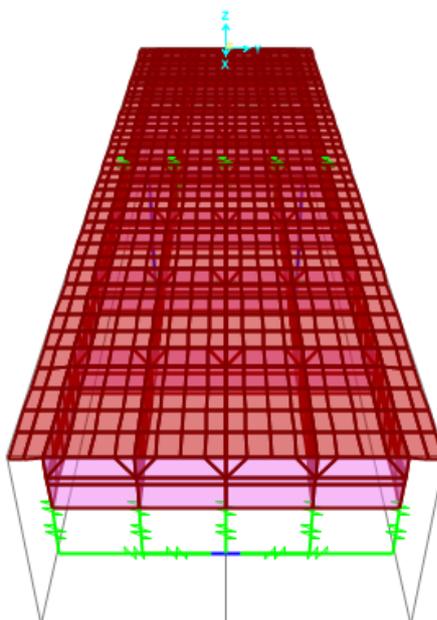
- a superfície média da placa permanece indeformável durante a flexão;

Portanto, para realização da modelagem como placa nesta pesquisa, foram calculadas as rigidezes equivalentes dos quatro modelos (3, 5, 7 e 8 longarinas), com o intuito de ter um modelo no SAP2000 que pudesse representar, aproximadamente, as aproximações feitas por Guyon, Massonet e Bares acerca do modelo de placa ortotrópica equivalente. O modelo foi construído com rigidezes diferentes na direção das longarinas e das transversinas, ambas equivalentes as das vigas.

3.5 Modelo em Três Dimensões (Casca 3-D)

Este tipo de modelagem representa melhor o comportamento da estrutura ao simular o funcionamento do conjunto laje, longarinas e transversinas, levando em conta a excentricidade existente entre os elementos estruturais. Como consequência deste funcionamento conjugado, a laje funciona, em termos globais e na direção longitudinal da ponte, como mesa de compressão. Nesta pesquisa, as vigas longarinas e as transversinas foram modeladas com elementos de barra tipo pórtico espacial, enquanto a laje foi modelada com o uso de elementos planos de casca, como se pode ver na figura 3.6.

Figura 3.6 - Ligação excêntrica entre nós da laje e nós da longarina / transversina



O software CSi Bridge V18 disponibiliza ao usuário uma grande variedade de elementos finitos, os quais devem ser convenientemente escolhidos de acordo com o tipo de problema a ser resolvido. A escolha dos tipos de elementos finitos a serem utilizados na simulação numérica deve ser feita levando-se em conta vários aspectos, tais como, a família a qual o elemento pertence, graus de liberdade, número de nós e, principalmente, o comportamento que ele apresentará perante a análise desejada.

Segundo o *CSi Analysis Reference Manual* (2013), os objetos podem ser modelados como:

a) objetos pontuais (nó): são automaticamente criados nas extremidades dos elementos e podem ser adicionados em locais específicos para se capturar esforços localizados;

b) objetos lineares (elementos de barra): são utilizados como elementos de pórtico espacial para modelar vigas, pilares e treliças, e de plano para estais sob peso próprio e tração e cabos de protensão;

c) objetos de área (elementos de cascas): São utilizados como chapas (teoria de membrana), placas (teoria de flexão) ou cascas (teoria de membrana e flexão) para discretizar lajes, paredes finas e sólidos bidimensionais.

Para modelar os pilares, longarinas pré-moldadas e vigas de travamento serão utilizados elementos de pórtico, enquanto as lajes, transversinas e longarinas moldadas no local serão modeladas por elementos de casca.

3.5.1 Elemento de Pórtico

Segundo *CSi Analysis Reference Manual* (2013), o elemento de pórtico ou *frame element* é um componente que pode ser usado para modelar vigas, pilares e treliças em um plano bidimensional ou tridimensional.

O elemento é definido por dois nós com seis graus de liberdade em cada nó: translações e rotações nodais nas direções x, y, e z. É possível se obter os seguintes esforços:

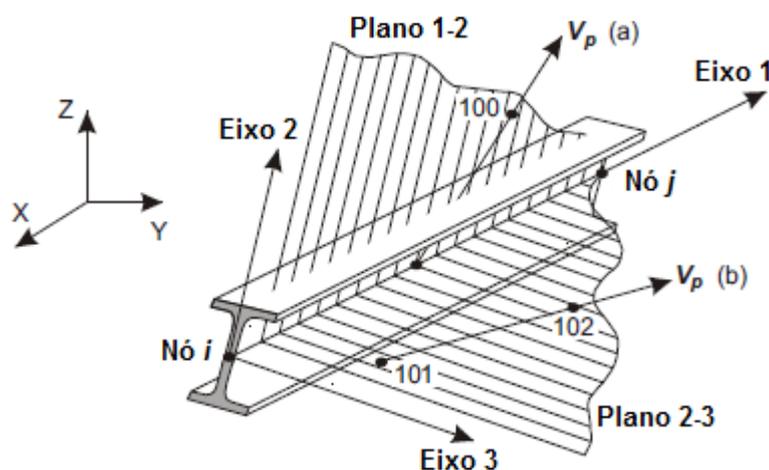
- a) momentos fletores nas duas direções;
- b) esforços axiais;

- c) esforços cortantes em duas direções;
- d) momentos torsores.

Cada membro é modelado como uma linha reta conectando dois nós i e j , no qual é possível descrever curvas a partir de várias subdivisões de barras retas, tendo um sistema local para cada para definir as propriedades, cargas e os resultados.

Com a definição dos nós é possível determinar os eixos locais do elemento, e assim, determinar a matriz de rotação, transformando as matrizes locais em globais para satisfazer o problema. A rotação do elemento em relação ao eixo principal (paralelo ao elemento) é definida a partir de vetores unitários perpendiculares ao comprimento da barra.

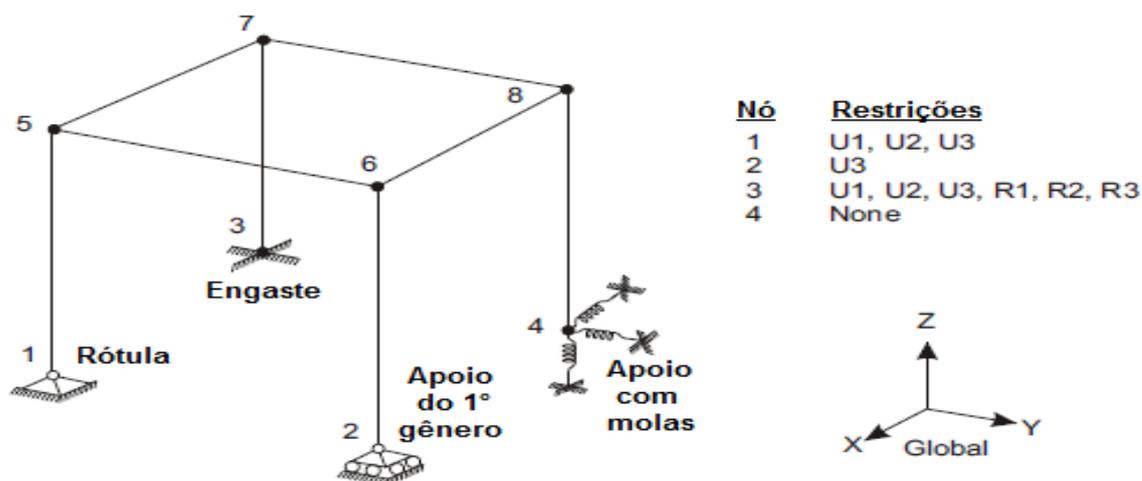
Figura 3.7 - Exemplo de nós para serem definidos os eixos locais do elemento de pórtico



Fonte: Adaptado de *CSI Analysis Reference Manual* (2013) apud Cavalcanti (2016)

As restrições cinemáticas dos nós são definidas como ilustrado a seguir, nos quais os pontos sólidos indicam continuidade de momentos fletores, enquanto os pontos abertos representam rótulas. Os apoios ou nós ao longo do elemento são definidos como fixos em deslocamentos e livres em rotações (1), deslocamento fixo em uma direção e livres em rotações e deslocamentos nas demais (2), fixo em todos os deslocamentos e rotações (3), parcialmente restritos em deslocamentos e rotações (4) e livres em deslocamentos e rotações (5, 6, 7 e 8).

Figura 3.8 - Graus de restrições cinemáticas dos nós do pórtico



Fonte: Adaptado de *CSI Analysis Reference Manual* (2013) apud Cavalcanti (2016)

3.5.2 Elemento de casca

Segundo o *CSI Analysis Reference Manual* (2013), o elemento de casca ou *shell element* é um tipo de objeto de área que é usado para discretizar membranas, placas e cascas planas ou tridimensionais.

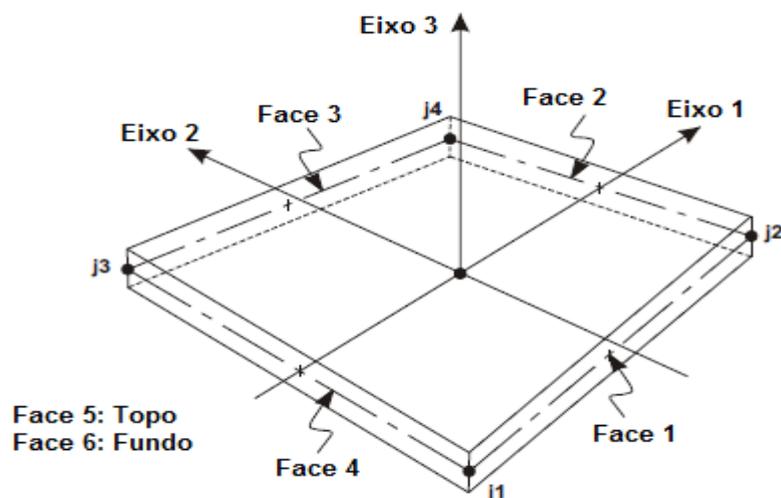
Cada elemento é modelado por formulações com três ou quatro nós, onde são combinados os comportamentos de membranas e placas sob flexão. Os elementos com quatro nós não precisam ser planos. Ambos apresentam sistemas locais próprios para que sejam definidos parâmetros dos materiais, carregamentos e os resultados.

As formulações podem ser “*homogeneous*” ou “*layered*”, sendo a primeira definida para materiais homogêneos e combina os comportamentos de membrana e de placas independentemente, já a segunda pode haver variações na espessura e nas características do material, inclusive incorpora comportamentos não lineares do material.

Serão utilizadas equações homogêneas regidas pela teoria de Kirchhoff, nas quais as deformações transversais da casca são desprezadas, porém é possível solucionar os problemas a partir da teoria de Mindlin e Reissner.

O elemento de quatro de nós apresenta seis faces e são definidas pelos nós j_1 , j_2 , j_3 e j_4 (Figura 3.9). Eventuais forças externas podem ser aplicadas em quaisquer faces do elemento.

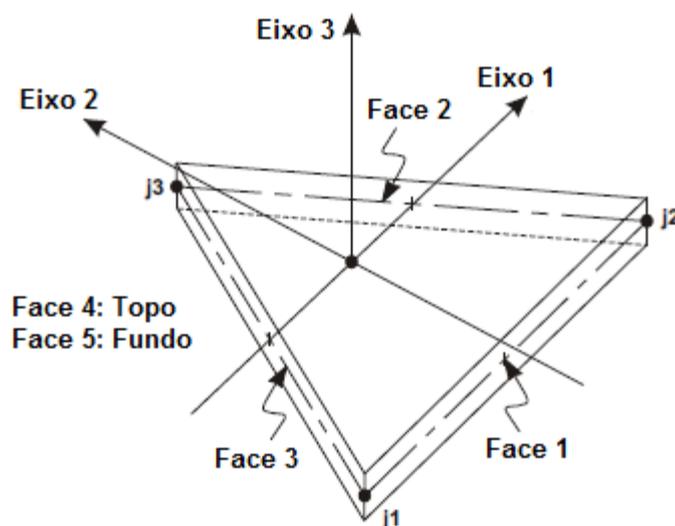
Figura 3.9 - Elemento de casca com quatro nós



Fonte: Adaptado de *CSi Analysis Reference Manual* (2013) apud Cavalcanti (2016)

Já o elemento de três nós apresenta cinco faces e são definidas pelos nós j_1 , j_2 e j_3 (Figura 3.10).

Figura 3.10 - Elemento de casca com três nós



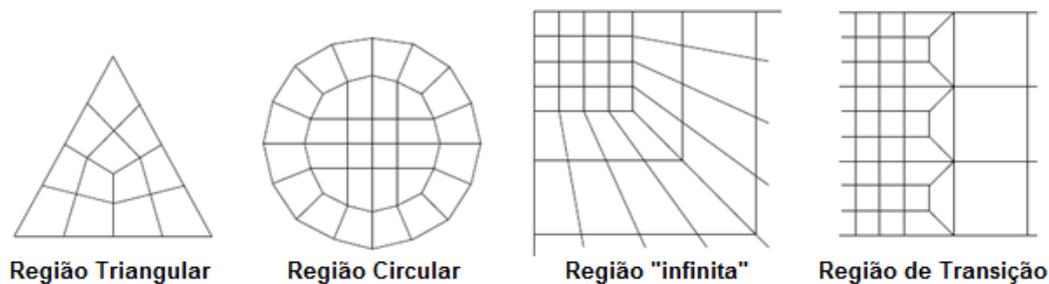
Fonte: Adaptado de *CSi Analysis Reference Manual* (2013) apud Cavalcanti (2016)

Os elementos a serem utilizados nos modelos serão com três e quatro nós, utilizando os comportamentos combinados de membrana e placas sob flexão. A utilização de um dos comportamentos isolados exige restrições cinemáticas adequadas, como em reservatórios com “pés deslizantes” ou em lajes planas submetidas à esforços paralelos à seção transversal.

Discretizações em elementos de quatro nós obtém melhores resultados com ângulos próximos à 90° , devendo ser lançados com ângulos entre 45° e 135° para

que os resultados sejam satisfatórios. Os elementos com três nós apresentam menor precisão, devendo ser utilizados em regiões com suaves mudanças nas distribuições de tensões (Figura 3.11).

Figura 3.11 - Exemplos de discretizações de elementos de casca com quatro nós



Fonte: Adaptado de *CSI Analysis Reference Manual* (2013) apud Cavalcanti (2016)

Cada nó possui seis graus de liberdade: translações e rotações nodais nas direções x , y , e z . É possível dimensionar os seguintes esforços:

- Momentos fletores nas duas direções;
- Esforços axiais;
- Esforços cortantes em duas direções;
- Momentos torsores.

CAPÍTULO 4

4. Modelos Propostos Analisados

Serão abordados neste capítulo os modelos propostos de estudos analíticos e numéricos e como foram realizadas as modelagens computacionais. As considerações feitas pelos *softwares* e a inserção de dados também serão explicitadas a fim de facilitar o entendimento da modelagem.

4.1 Ponte Modelo e Dados de Entrada Utilizados

Para a aplicação dos métodos analíticos e numéricos de repartição de carga descritos nos capítulos anteriores, foram estudados quatro casos de pontes em concreto armado. Os detalhes e características das pontes estão explicitados a seguir:

- **Caso I:** Ponte cuja superestrutura é composta por três longarinas, três transversinas de apoio, duas transversinas intermediárias e duas transversinas de extremidade (cortinas);

- **Caso II:** Ponte cuja superestrutura é composta por cinco longarinas, três transversinas de apoio, duas transversinas intermediárias e duas transversinas de extremidade (cortinas).

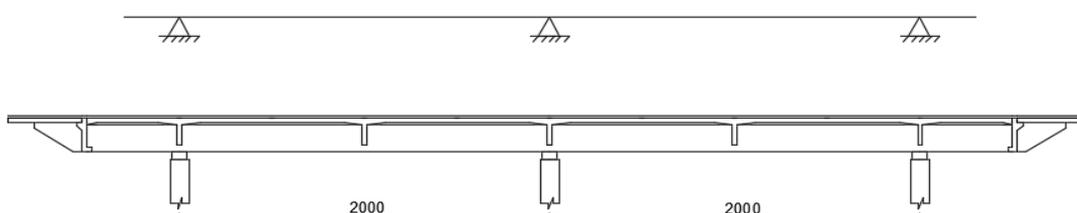
- **Caso III:** Ponte cuja superestrutura é composta por sete longarinas, três transversinas de apoio, duas transversinas intermediárias e duas transversinas de extremidade (cortinas);

- **Caso IV:** Ponte cuja superestrutura é composta por oito longarinas, três transversinas de apoio, duas transversinas intermediárias e duas transversinas de extremidade (cortinas).

As pontes estudadas apresentam as seguintes características gerais:

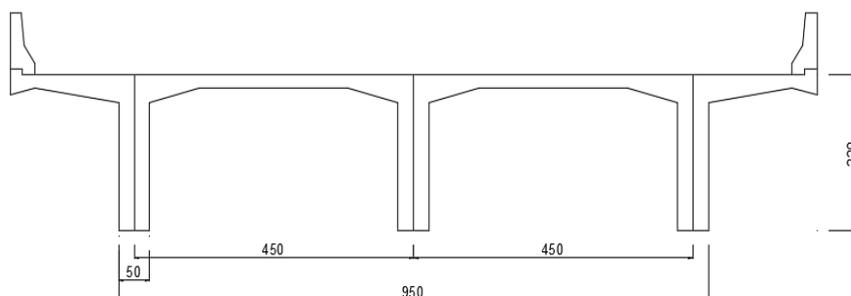
- Pontes com longarinas retas;
- Extensão total de 50 m sendo um vão de 20 m e balanços nas extremidades de 5 m;
- Lajes de transição de 3,0 m de comprimento em ambas as extremidades;
- Pilares de seção circular.

Figura 4.1 - Esquema longitudinal



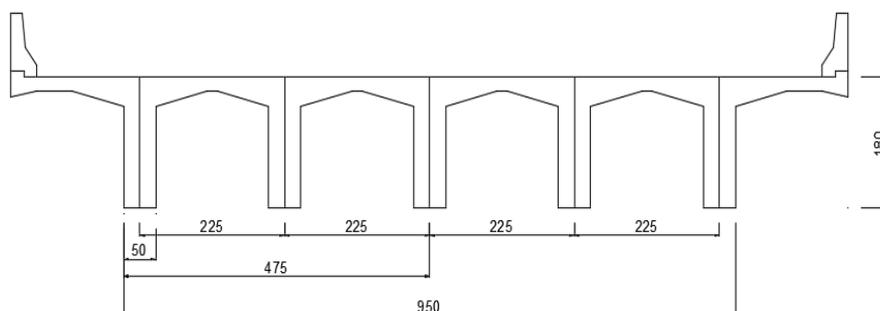
Fonte: Autor (2016)

Figura 4.2 - Seção transversal da ponte com três longarinas



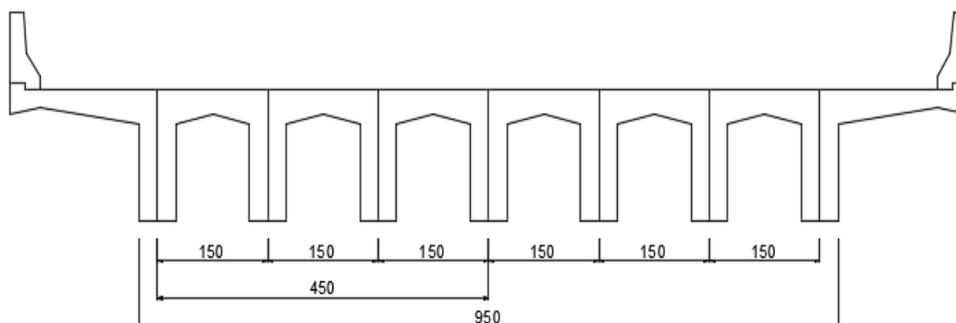
Fonte: Autor (2016)

Figura 4.3 - Seção transversal da ponte com cinco longarinas



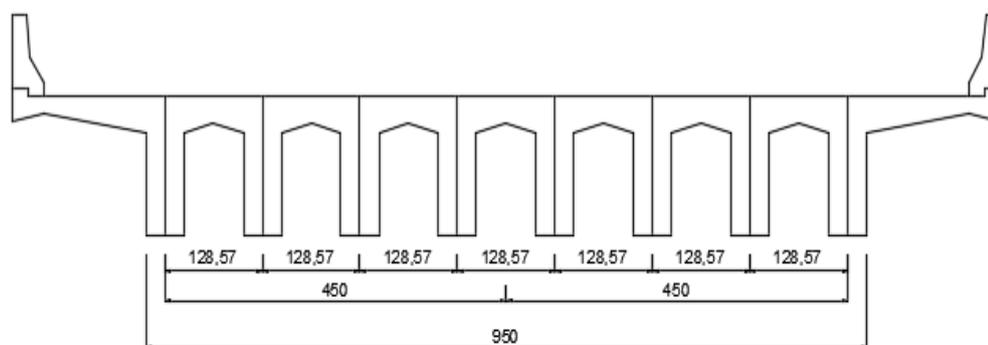
Fonte: Autor (2016)

Figura 4.4 - Seção transversal da ponte com sete longarinas



Fonte: Autor (2016)

Figura 4.5 - Seção transversal da ponte com oito longarinas



Fonte: Autor (2016)

4.2 Modelagem Numérica

Segundo Cavalcante (2016), justifica-se a utilização dos elementos finitos em pontes, por se tratarem de uma análise com menos simplificações que os modelos de grelha, pórtico e associação grelha-pórtico. Ele ressalta ainda que os elementos finitos tridimensionais geram resultados mais realistas, contudo, exigem maior tempo de processamento e os resultados principais são apresentados em tensões, não sendo comuns no dia a dia de projetos estruturais de pontes. Nesse contexto, as modelagens das pontes, em cada um dos quatro modelos idealizados, para obtenção das distribuições de carga no tabuleiro (modelagem como Grelha e como Placa) foram feitas primeiramente com o software da “Computers and Structures, Inc. (CSI)” SAP2000. Posteriormente foi utilizado software CSi Bridge V18, versão específica para modelagem de pontes via MEF, da mesma empresa.

Vale ressaltar que o programa CSI Bridge V18 permite a análise de vários elementos tais como: pontuais (como nó, carga pontual), de linha (vigas, tirantes, colunas), e de área (casca, lajes, paredes). A interface destinada especificamente na modelagem de pontes permite as atribuições de cargas móveis nos tabuleiros e as especificações dos materiais utilizados.

Nesta pesquisa foi utilizado concreto com peso específico de 25 kN/m^3 , módulo de elasticidade de $33,13 \text{ MPa}$, resistência à compressão de 35 MPa e coeficiente de Poisson de $0,2$. A figura 4.6, a seguir, mostra as características dos materiais utilizados para as modelagens.

Figura 4.6 - Valores dos parâmetros para os modelos estruturais

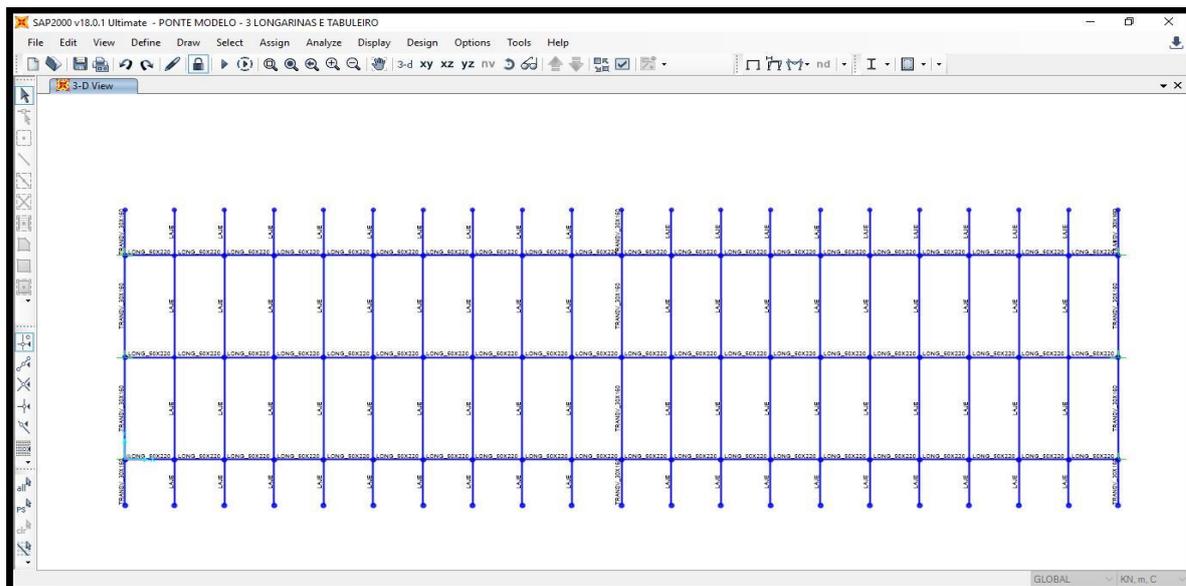
Property	Value
Material Name	FKK35MPA-1
Material Type	Concrete
Symmetry Type	Isotropic
Modulus of Elasticity (E)	331300,05
Poisson's Ratio (U)	0,2
Coeff of Thermal Expansion (A)	9,900E-06
Shear Modulus (G)	138041,69
Weight per Unit Volume	2,5
Mass per Unit Volume	0,2549
Units	Tonf, m, C
Specified Concrete Compressive Strength, f _c	3500
Expected Concrete Compressive Strength	3500
Lightweight Concrete	<input type="checkbox"/>
Shear Strength Reduction Factor	

Fonte: Software SAP2000

4.3 Modelagem como Grelha

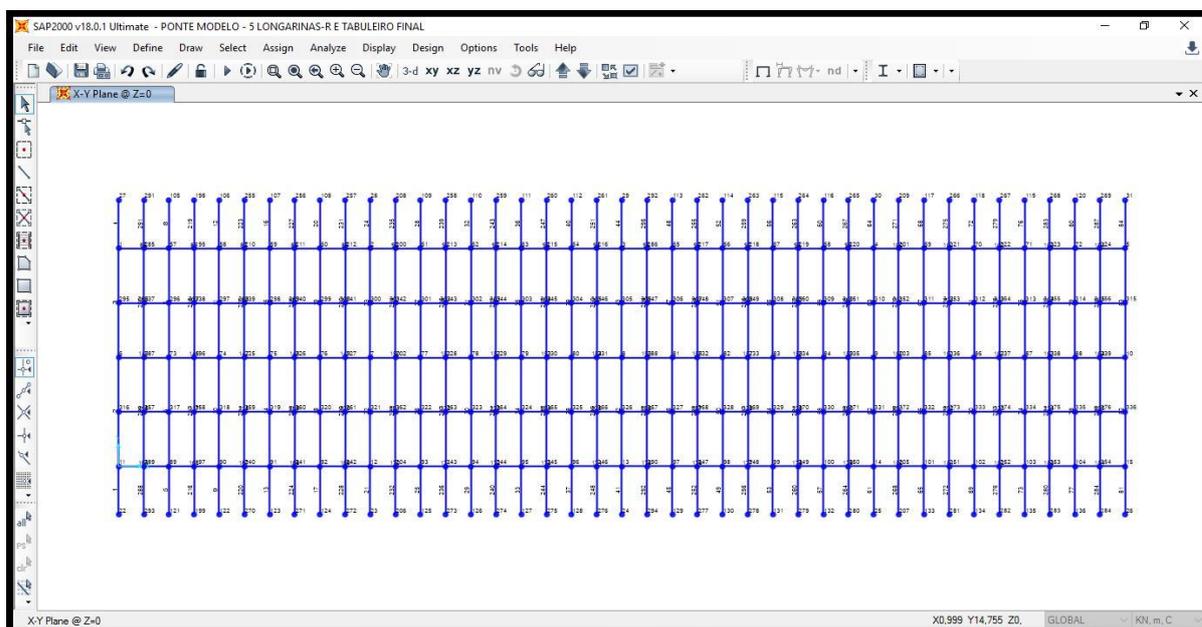
As malhas que foram utilizadas para as representações dos tabuleiros das pontes como grelhas, são mostradas a seguir, na figura 4.7, para três longarinas e, na figura 4.8, para cinco longarinas.

Figura 4.7 - Representação do tabuleiro da Ponte Modelo com 3 longarinas como Grelha



Fonte: Software SAP2000

Figura 4.8 - Representação do tabuleiro da Ponte Modelo com 05 longarinas como Grelha



Fonte: Software SAP2000

De modo semelhante, foram feitas as modelagens para as pontes com sete e oito longarinas.

As seções das longarinas, transversinas e do tabuleiro são apresentadas nas figuras 4.9 a 4.11, respectivamente:

Figura 4.9 - Seção das longarinas

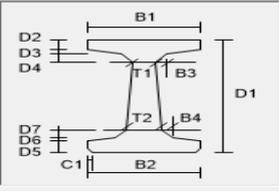
Precast Concrete I / Bulb Tee Girder

Section Name: LONG_50X220 Display Color: ■

Section Notes:

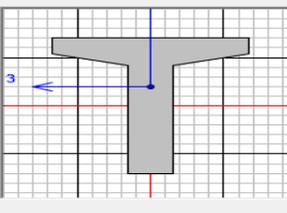
Source: User Defined

Section Dimensions



B1	2,1
B2	0,5
B3	0,
B4	0,
D1	2,2
D2	0,25
D3	0,2
D4	0,
D5	0,127
D6	0,127
D7	0,
T1	0,5
T2	0,5
C1	0,

Section



Properties

Concrete

Fonte: Software SAP2000

Figura 4.10 - Seção das transversinas

Rectangular Section

Section Name: TRANSV_30X180 Display Color: ■

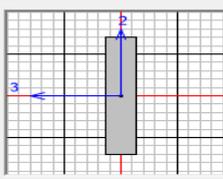
Section Notes:

Dimensions

Depth (t3): 1,6

Width (t2): 0,3

Section



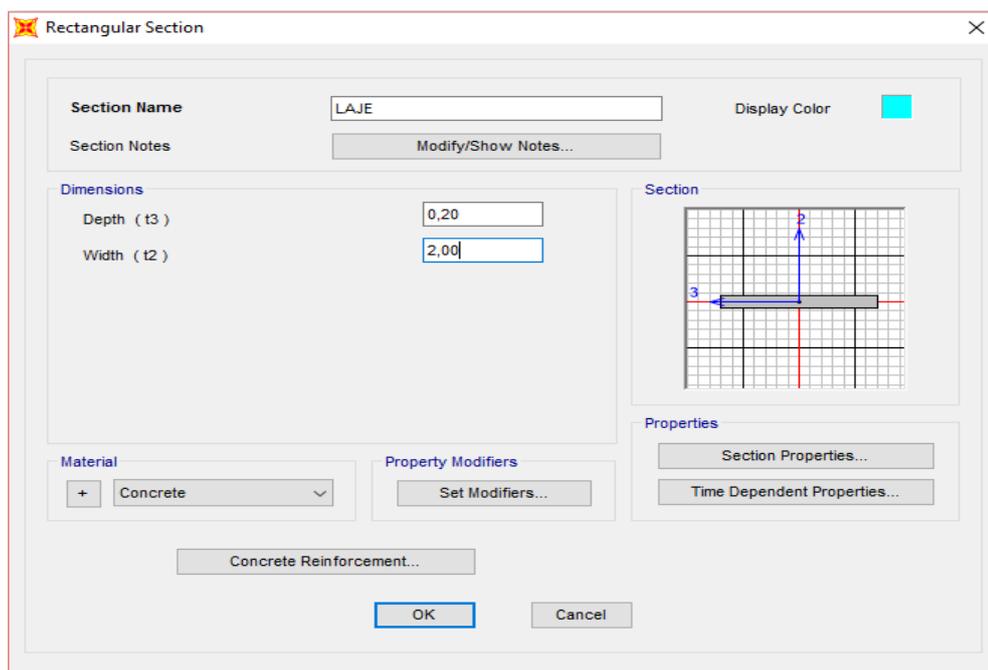
Properties

Material: Concrete

Property Modifiers:

Fonte: Software SAP2000

Figura 4.11 - Seção do tabuleiro

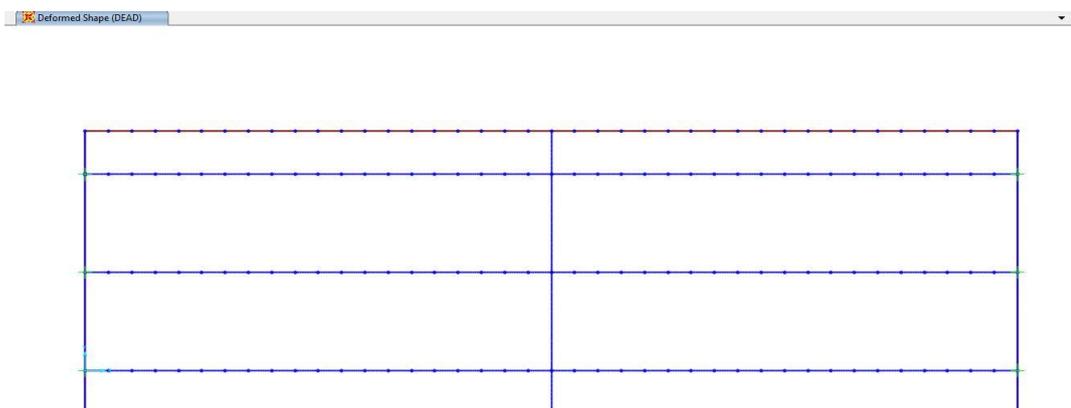


Fonte: Software SAP2000

4.4 Modelagem como Placa

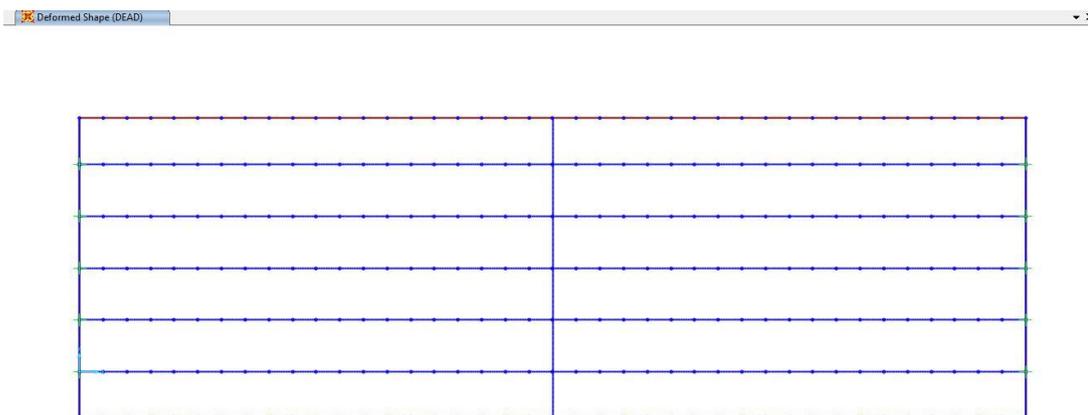
As placas que foram utilizadas para as representações dos tabuleiros, são mostradas a seguir, na figura 4.12, para três longarinas e na figura 4.13, para cinco longarinas:

Figura 4.12 - Representação do tabuleiro da Ponte Modelo com 3 longarinas como Placa



Fonte: Software SAP2000

Figura 4.13 - Representação do tabuleiro da Ponte Modelo com 5 longarinas como Placa



Fonte: Software SAP2000

De modo semelhante, foram feitas as modelagens para a ponte com sete e oito longarinas.

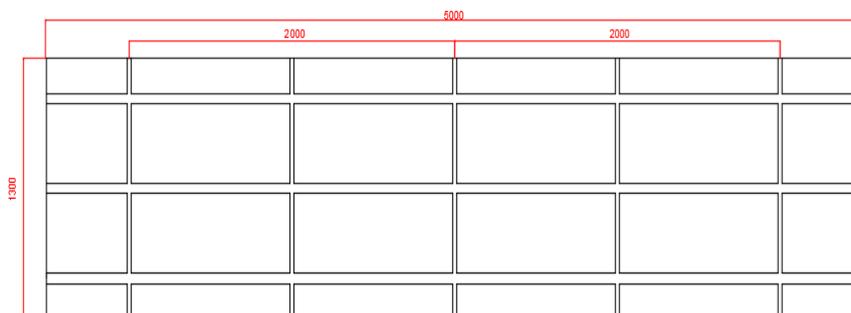
4.5 Modelo 3D com elementos de Pórtico e Casca

Para as modelagens foram atribuídos carregamentos devido às ações permanentes (peso próprio de todos os elementos estruturais e pavimentação) e ações variáveis relacionados com cargas móveis e seus efeitos dinâmicos e vento. As dimensões prescritas para as seções transversais do projeto foram as mesmas utilizadas na modelagem do tabuleiro como Grelha e Placa.

O modelo apresenta o perfil representado na figura 4.14. A espessura de todas as longarinas foi de 0,50 metros e das transversinas de 0,25 metros, como já descrito anteriormente. As longarinas possuíam vão de 20 metros, entre apoios e as transversinas vãos de 13,0 metros. A espessura da laje foi de 0,2 metros em todo tabuleiro. Toda a ponte foi constituída do mesmo material. O concreto utilizado possui as propriedades citadas na Figura 4.6, mostrada anteriormente.

Todas as dimensões foram inseridas a partir do comando "*layout line*". A definição da quantidade de vigas e composição do tabuleiro foi realizado na aba "*Components*", resultando nas imagens apresentadas nas Figura 4.15 e Figura 4.18, baseadas na figura 4.2 e figura 4.3, realizadas no *AutoCAD* (2016):

Figura 4.14 - Vista, em planta, do tabuleiro com 03 Longarinas

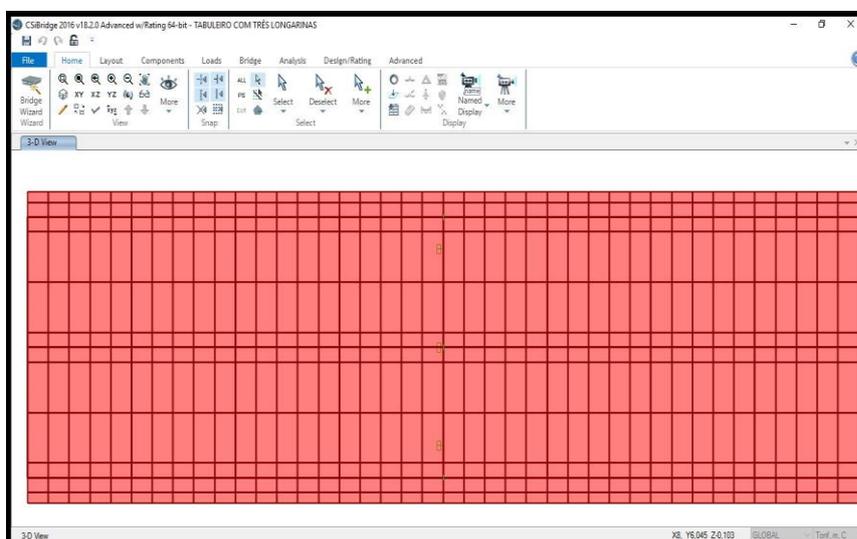


Vista do Tabuleiro

Medidas em cm

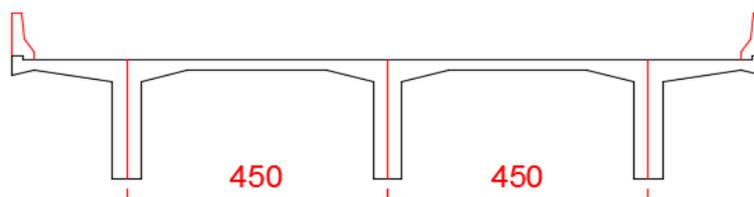
Fonte: Autor (2016)

Figura 4.15 - Tabuleiro com três longarinas-Malha



Fonte: Software CSi Bridge V18

Figura 4.16 - Seção transversal do tabuleiro com três longarinas

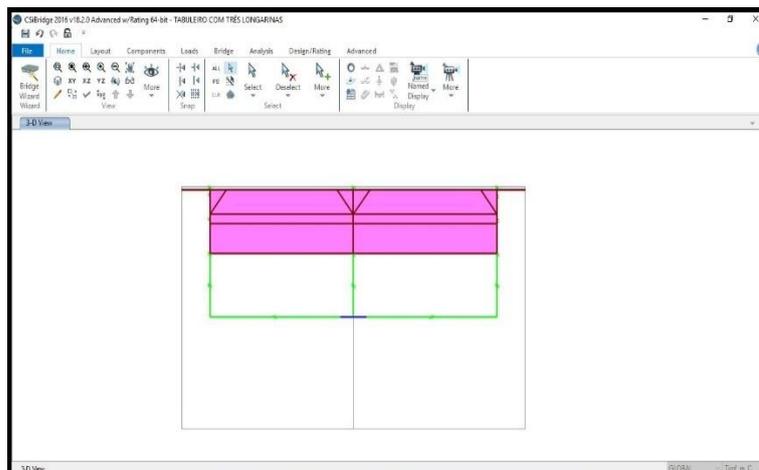


Seção Transversal

Medidas em cm

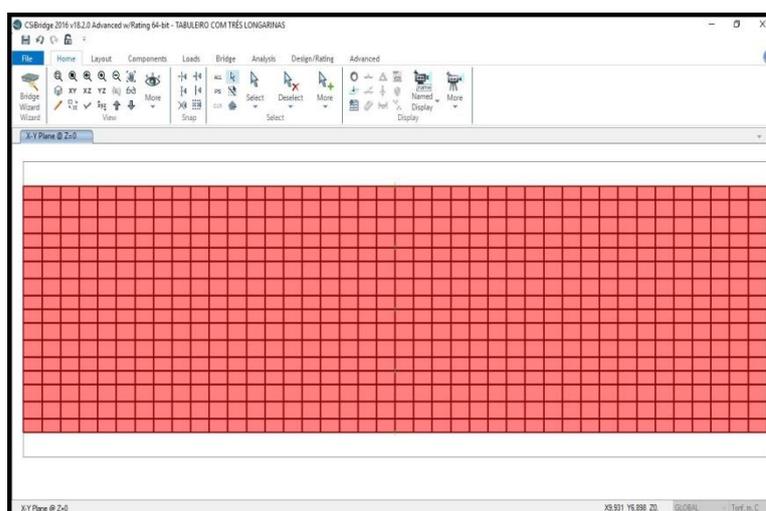
Fonte: Autor (2016)

Figura 4.17 - Seção transversal do tabuleiro com três longarinas, com elementos de pórtico



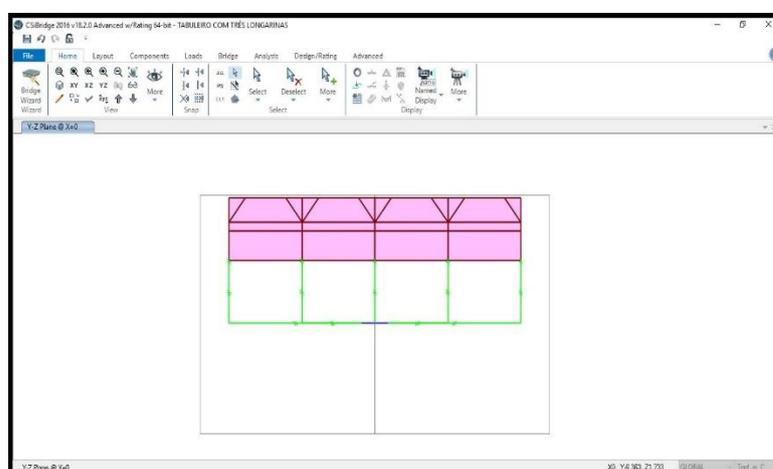
Fonte: Software CSi Bridge V18

Figura 4.18 - Tabuleiro com cinco longarinas-Malha



Fonte: Software CSi Bridge V18

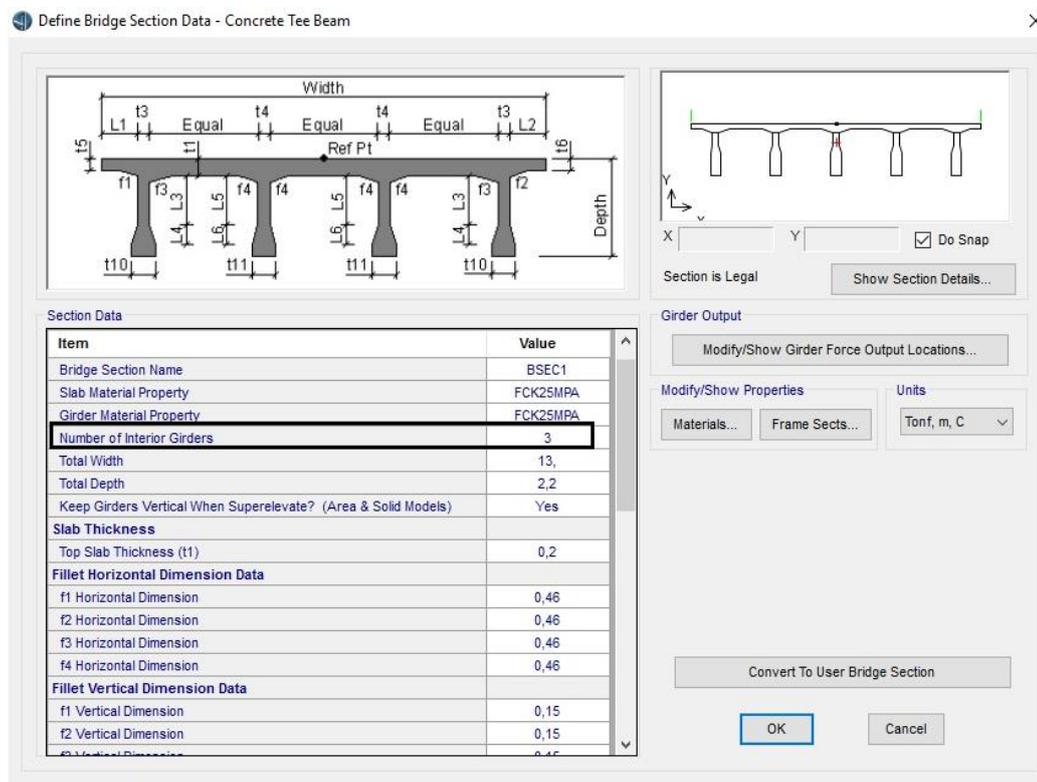
Figura 4.19 - Seção Transversal do tabuleiro com cinco longarinas, com elementos de pórtico



Fonte: Software CSi Bridge V18

As seções e dimensões do tabuleiro foram informadas na ferramenta “*deck sections*” (Figura 4.20).

Figura 4.20 - Entrada de dados da ponte modelo



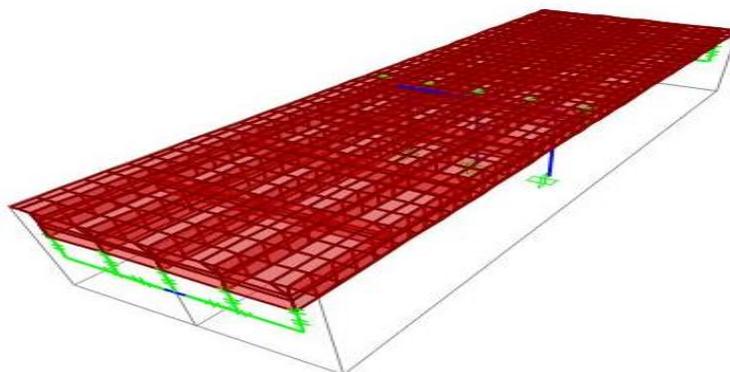
Fonte: Software CSi Bridge V18

As linhas de tráfego foram inseridas após definida a configuração em planta e em corte do tabuleiro. Dois fluxos foram inseridos com espessura de 3,3 m. Foi atribuído nas bordas limitação do movimento vertical e horizontal, contudo, a rotação foi liberada. A ligação entre vigas e vigas e pilares se deu através de engaste.

Após a modelagem completa, o tabuleiro apresentou a configuração da figura 4.21 (apenas “*wireframe*”) e figura 4.22 (estrutura com espessura real).

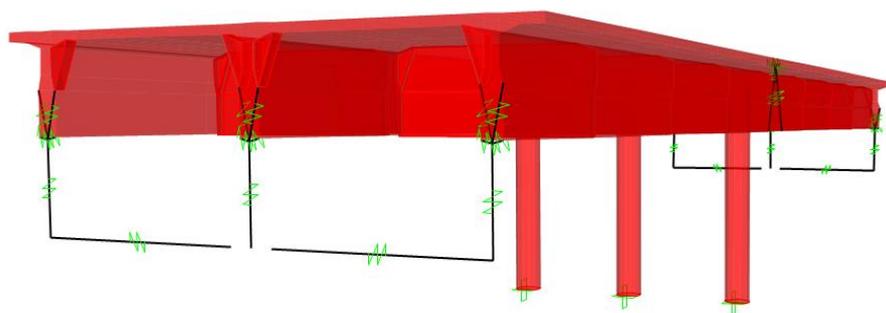
Na região central, as barras dos pilares foram lançadas até o centro de gravidade da viga de travamento. Vale salientar que as lajes foram consideradas contínuas na ligação. A união entre as vigas de travamento e as longarinas foi realizada a partir de molas, sendo necessário introduzi-las horizontalmente para conectar os nós da viga de travamento e a projeção dos nós do fundo do aparelho de apoio e verticalmente conectando-os com os do centro de gravidade dos aparelhos e, posteriormente, com os nós superiores das longarinas.

Figura 4.21 - Wireframe do tabuleiro



Fonte: Software CSi Bridge V18

Figura 4.22 - Modelagem com elementos tipo casca



Fonte: Software CSi Bridge V18

Os valores utilizados para as molas de coeficientes de rigidezes tornam os deslocamentos ao longo dos eixos x e z quase nulos e livres para o eixo y e para as rotações. Em síntese, os nós dos centros de gravidade dos aparelhos trabalham quase que estando vinculados a rótulas perfeitas com um sentido de deslocamento livre.

As molas que unem os nós dos centros de gravidade dos aparelhos de apoio com os nós superiores das longarinas apresentam estas constantes elástica:

$$K_{ux}=K_{uy}=K_{uz} = 10^{11} \text{ KN/m} \quad (4.1)$$

$$K_{rx}=K_{ry}=K_{rz} = 10^{11} \text{ KN/m} \quad (4.2)$$

As molas foram discretizadas como “*link elements*”. Segundo o “*CSi Analysis Reference Manual(2013)*”. Esses elementos são usados para fazer a junção entre dois

nós, podendo se comportar de formas lineares, não lineares e dependentes da frequência. Basicamente, cada link “*elemento*” é assumido como uma composição de seis molas independentes, uma para cada grau de liberdade relacionado as deformações. Em suma, o nó inferior do aparelho de apoio está travado, enquanto os nós do centro de gravidade e do fundo da longarina deslocam-se igualmente com restrições de deslocamentos verticais e transversais.

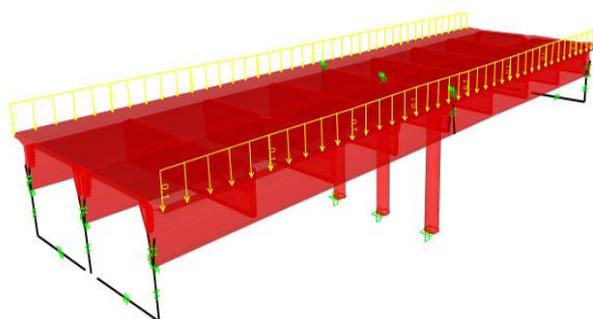
4.6 Carregamentos utilizados na análise

Para a composição das ações atuantes, levou-se em conta o peso próprio da estrutura, peso da pavimentação e defensas, carga móvel dos veículos, carga de frenagem e aceleração, e carga devido ao vento.

As ações foram aplicadas nas estruturas a partir dos “*load cases*” seguidos pelos “*load patterns*”, que definem os padrões de carga. Estes são distribuições espaciais específicas de forças, deslocamentos, temperaturas e outros efeitos que atuem sobre a estrutura (figura 4.23 a figura 4.25).

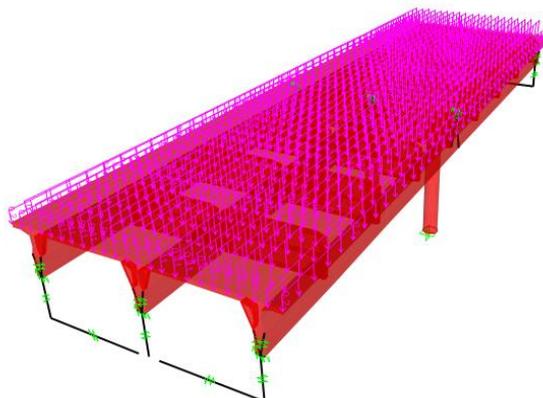
Como o que interessava na pesquisa era a distribuição de quinhões de cargas em cada uma das longarinas e não os seus efeitos em termos de tensões e deformações reais, optou por introduzir o Veículo-tipo, baseados na AASHTO LRFD (2014) ou invés do Veículo-tipo da NBR 7188:2013. Assim, neste caso a análise devido às cargas móveis foi feita através da opção “*step-by-step analysis*”, aplicando veículos nas duas pistas de rolamento, com diferença de 1,5 segundos de partida e velocidade média de 60 km/h.

Figura 4.23 - Carga devido às defensas



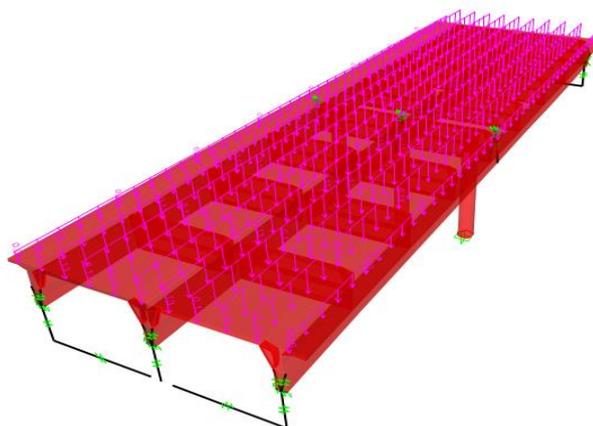
Fonte: Software CSi Bridge V18

Figura 4.24 - Carga devido ao peso próprio dos elementos estruturas e pavimentação



Fonte: *Software CSi Bridge V18*

Figura 4.25 - Cargas nodais aplicadas



Fonte: *Software CSi Bridge V18*

A utilização do Veículo-tipo da AASHTO LRFD (2014) só ocorreu na modelagem da ponte que foi utilizado o modelo de Casca, transformando, posteriormente, a totalidade dos momentos obtidos em coeficientes de repartição para que houvesse a perfeita comparação entre todos os modelos analisados.

CAPÍTULO 5

5. Resultados e Análise dos Resultados

Neste capítulo são apresentados e analisados os resultados dos modelos estudados para averiguação da distribuição das cargas nos tabuleiros de pontes com longarinas retas de concreto armado, obtidos mediante aplicação dos Métodos Analíticos de Cálculo (MAC) e das simulações numéricas realizadas nos *softwares* SAP 2000 e Csi Bridge V18.

5.1 Métodos Analíticos

5.1.1 Método de Engesser-Courbon

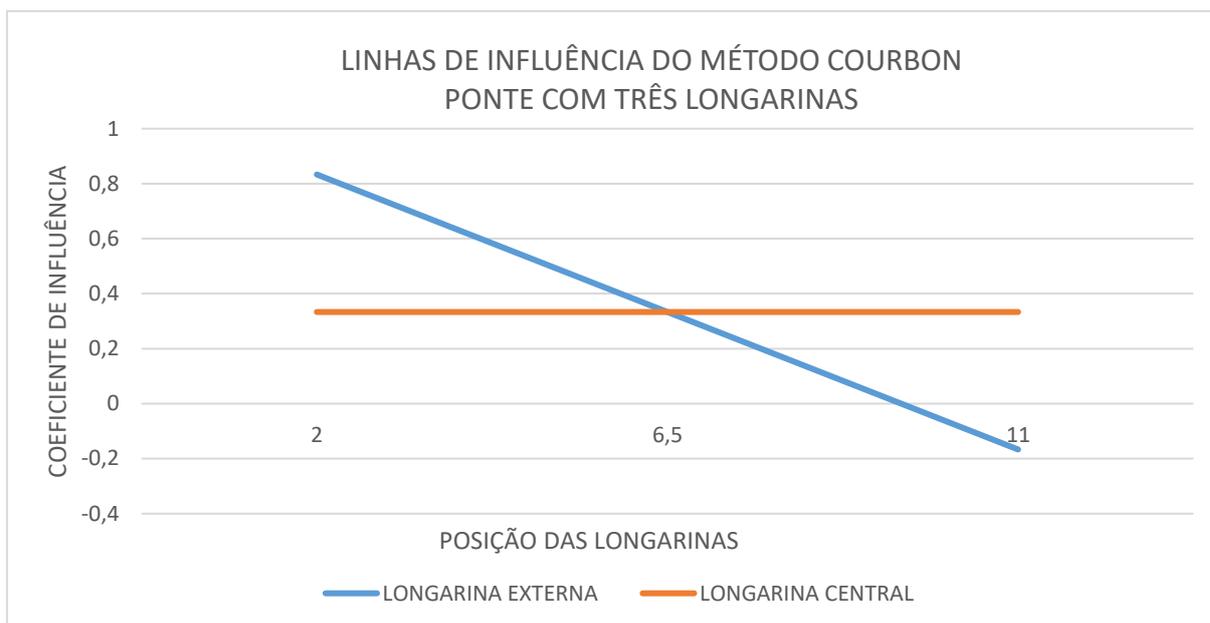
No método, a totalidade da carga P é absorvida pelas longarinas (como se não houvesse transversinas no tabuleiro) segundo um coeficiente de repartição transversal r_{ie} . Determinados esses coeficientes, torna-se possível obter as solicitações e reações de apoio nas longarinas da ponte.

Na tabela 5.1 e figura 5.1 encontram-se os valores dos coeficientes de repartição nos pontos 2,0; 6,5 e 11,0 em metros, para a longarina externa e central e suas linhas de influência, respectivamente, utilizando-se três longarinas no tabuleiro.

Tabela 5.1 - Coeficientes de Repartição para a ponte com três longarinas

Posição (m)	Coeficientes de Repartição Transversal (r_{ie}) Longarina Externa	Coeficientes de Repartição Transversal (r_{ie}) Longarina Central
	2.0	0.833333333
6.5	0.333333333	0,333333333
11.0	-0.166666667	0,333333333

Figura 5.1 - Linhas de Influência do Método Courbon para a ponte com três longarinas



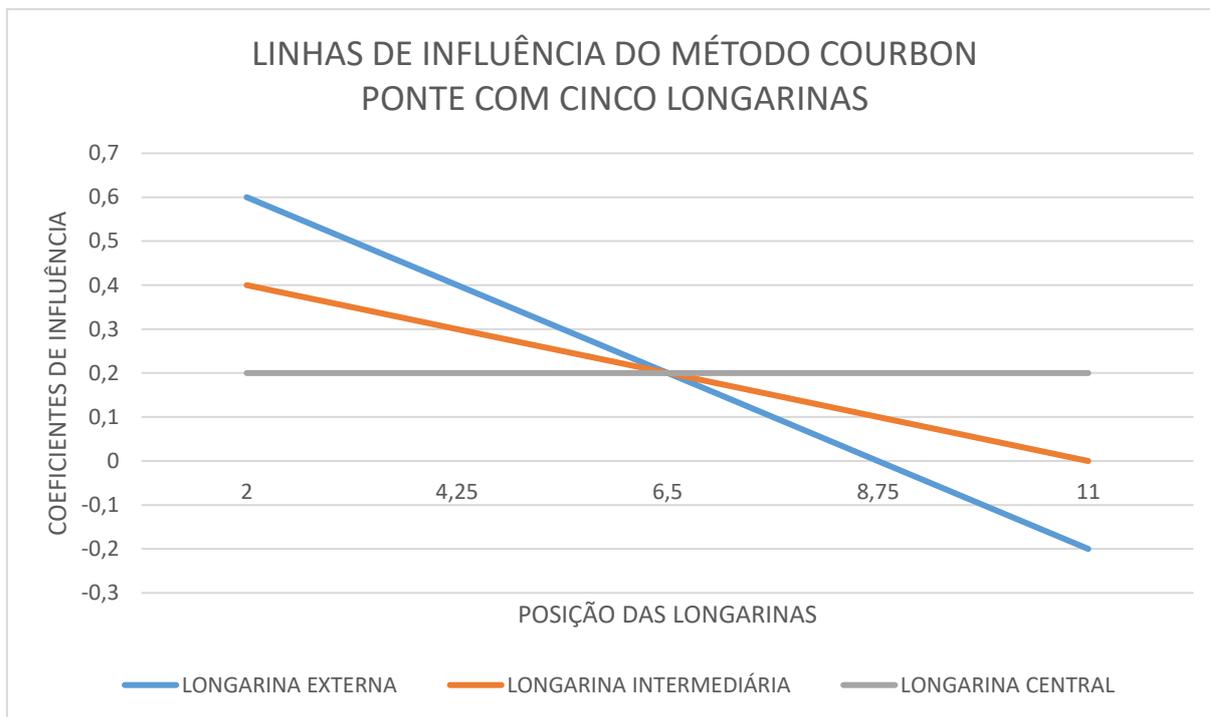
Fonte: Autor (2016)

Na tabela 5.2 e figura 5.2 encontram-se os valores dos coeficientes de repartição nos pontos 2,0; 4,25; 6,5; 8,75 e 11,0, em metros, para a longarina externa, intermediária e central e suas linhas de influência, respectivamente, utilizando-se cinco longarinas no tabuleiro.

Tabela 5.2 - Coeficientes de Repartição para a ponte com cinco longarinas

Posição (m)	Coeficientes de Repartição Transversal (r_{ie})	Coeficientes de Repartição Transversal (r_{ie})	Coeficientes de Repartição Transversal (r_{ie})
	Longarina Externa	Longarina Intermediária	Longarina Central
2.0	0.6	0.4	0.2
4.25	0.4	0.3	0.2
6.5	0.2	0.2	0.2
8.75	0.0	0.1	0.2
11.0	- 0.2	0.0	0.2

Figura 5.2 - Linhas de Influência do Método Courbon para a ponte com cinco longarinas



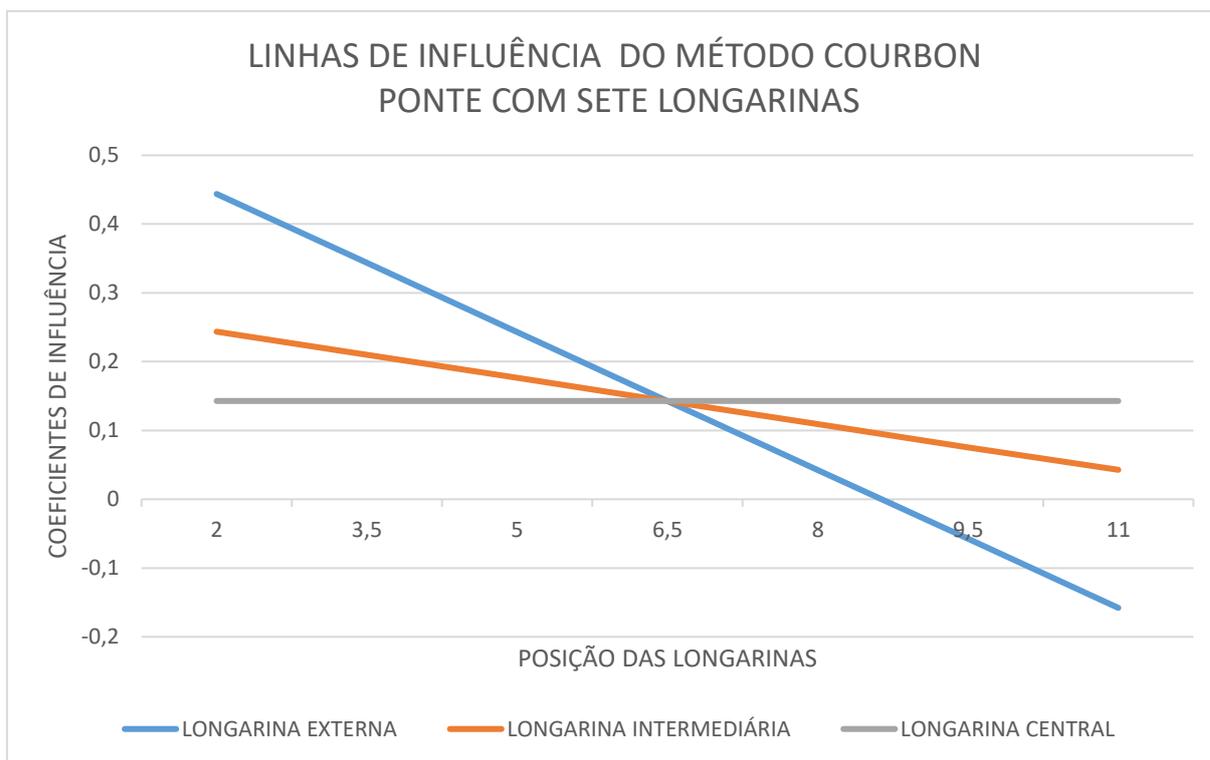
Fonte: Autor (2016)

Na tabela 5.3 e figura 5.3 encontram-se os valores dos coeficientes de repartição nos pontos 2,0; 3,5; 5,0; 6,5; 8,0; 9,5 e 11,0; em metros, para a longarina externa, intermediária e central e suas linhas de influência, respectivamente, utilizando-se sete longarinas no tabuleiro.

Tabela 5.3 - Coeficientes de Repartição para a ponte com sete longarinas

Posição (x) (m)	Coeficientes de Repartição Transversal (r_{ie}) Longarina Externa	Coeficientes de Repartição Transversal (r_{ie}) Longarina Intermediária	Coeficientes de Repartição Transversal (r_{ie}) Longarina Central
2.0	0,4438168	0,2435602	0,1428571
3.5	0,343596	0,2099769	0,1428571
5.0	0,2430871	0,1763552	0,1428571
6.5	0,1425783	0,1427336	0,1428571
8.0	0,0424214	0,1091119	0,1428571
9.5	-0,057559	0,0754902	0,1428571
11.0	-0,15794	0,042772	0,1428571

Figura 5.3 - Linhas de Influência do Método Courbon para a ponte com sete longarinas



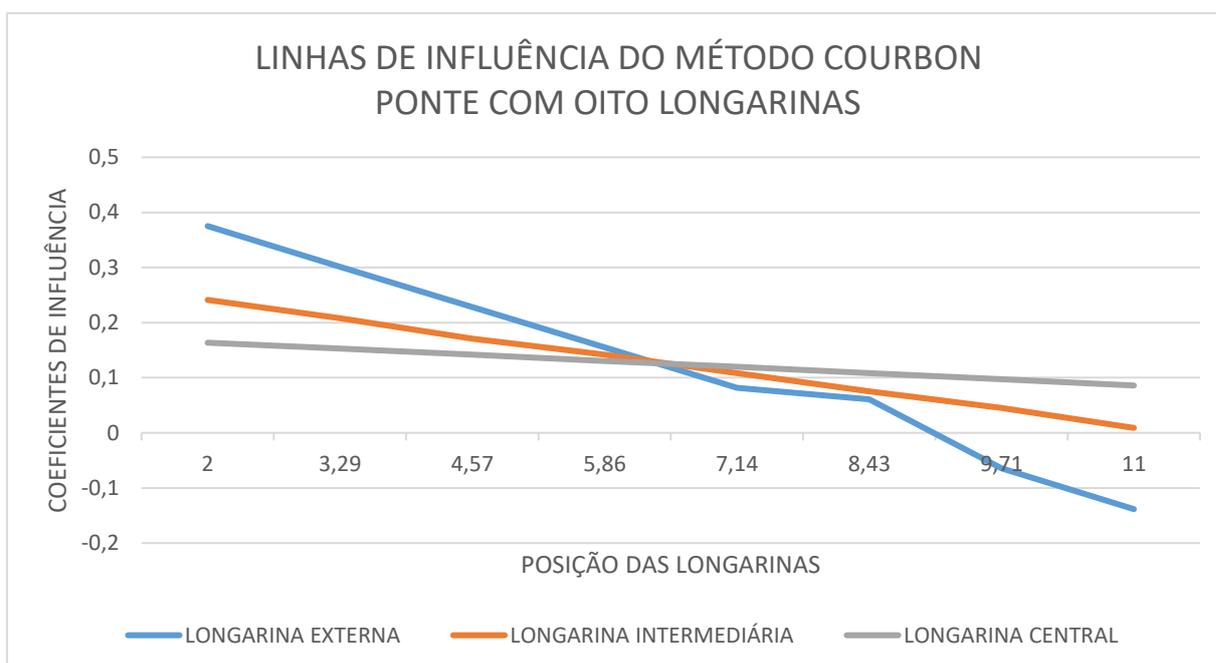
Fonte: Autor (2016)

Na tabela 5.4 e figura 5.4 encontram-se os valores dos coeficientes de repartição nos pontos 2,0;3,29;4,57;5,86;7,14;8,43; 9,7 e 11,0, em metros, para a longarina externa, intermediária e central e suas linhas de influência, respectivamente, utilizando-se oito longarinas no tabuleiro.

Tabela 5.4 - Coeficientes de Repartição para a ponte com oito longarina

Posição (x) (m)	Coeficientes de Repartição Transversal (r_{ie}) Longarina Externa	Coeficientes de Repartição Transversal (r_{ie}) Longarina Intermediária	Coeficientes de Repartição Transversal (r_{ie}) Longarina Central
2.0	0,3752189	0,2412286	0,1635667
3.29	0,3013073	0,2081732	0,1527651
4.57	0,2285567	0,1709472	0,1417571
5.86	0,1551005	0,1416767	0,1303219
7.14	0,0816981	0,10855	0,1198782
8.43	0,0610475	0,0750673	0,1086079
9.71	-0,064509	0,0453869	0,0971727
11.0	-0,138421	0,0089701	0,0859304

Figura 5.4 - Linhas de Influência do Método Courbon para a ponte com oito longarinas



Fonte: Autor (2016)

5.1.2 Método de Leonhardt

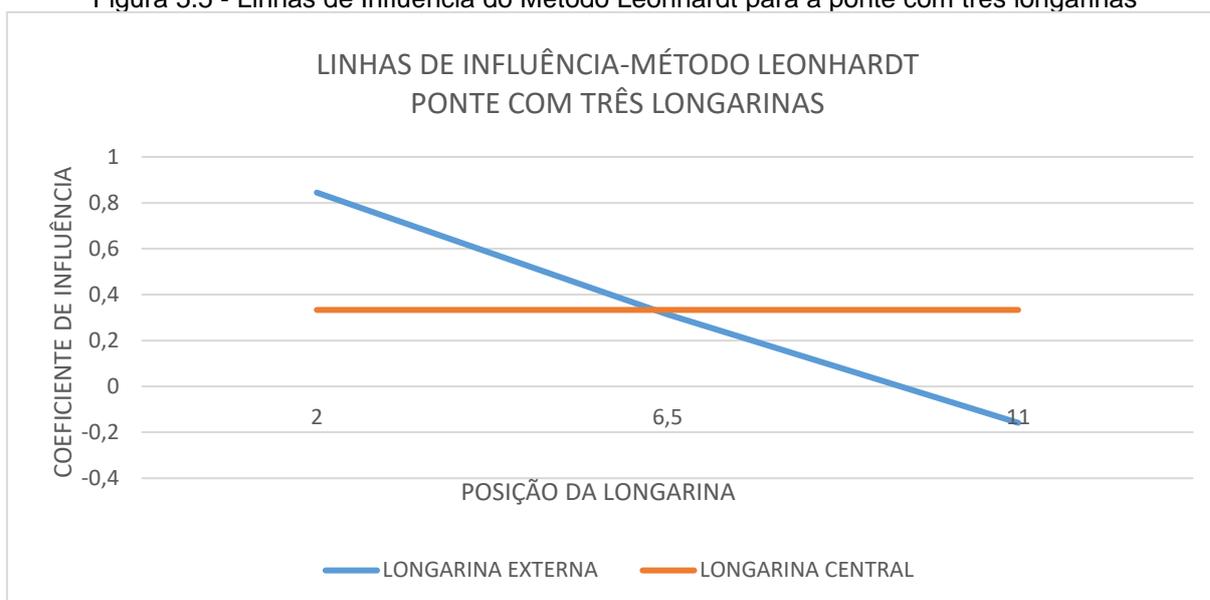
Para utilização do método foi calculado o parâmetro que mensura para o método o grau de rigidez da estrutura (ζ). Posteriormente foram utilizadas as tabelas apresentadas por San Martin (1981) para diversos casos de pontes com longarinas retas, inclusive aqueles com longarinas externas com rigidez diferente das internas, a fim de determinar os coeficientes de repartição transversal (r_{ik}) para cada longarina.

Na tabela 5.5 e figura 5.5 encontram-se os valores dos coeficientes de repartição nos pontos 2,0; 6,5e 11,0, em metros, para a longarina externa e central, e suas linhas de influência, respectivamente, utilizando-se três longarinas no tabuleiro.

Tabela 5.5 - Coeficientes de Repartição para a ponte com três longarinas

Posição (m)	Coeficientes de Repartição Transversal (r_{ie}) Longarina Externa	Coeficientes de Repartição Transversal (r_{ie}) Longarina Central
2.0	0.844533601	0,333333333
6.5	0.313941825	0,333333333
11.0	-0.15847543	0,333333333

Figura 5.5 - Linhas de Influência do Método Leonhardt para a ponte com três longarinas



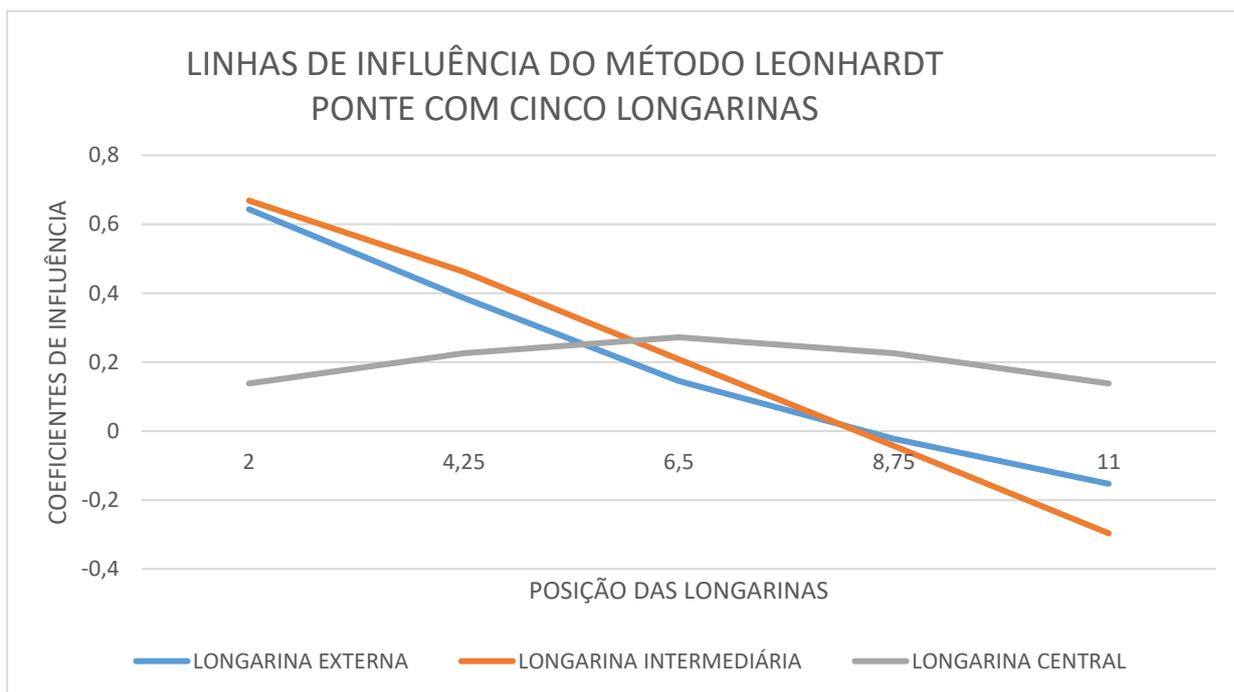
Fonte: Autor (2016)

Na tabela 5.6 e figura 5.6 encontram-se os valores dos coeficientes de repartição nos pontos 2,0; 4,25; 6,5; 8,75 e 11,0, em metros, para as longarinas externa, intermediária e central, e suas linhas de influência, respectivamente, utilizando-se cinco longarinas no tabuleiro.

Tabela 5.6 - Coeficientes de Repartição para a ponte com cinco longarinas

Posição (m)	Coeficientes de Repartição Transversal (r_{ie}) Longarina Externa	Coeficientes de Repartição Transversal (r_{ie}) Longarina Intermediária	Coeficientes de Repartição Transversal (r_{ie}) Longarina Central
2.0	0,668711656	0,668711656	0.138
4.25	0,462167689	0,462167689	0.226
6.5	0,208588957	0,208588957	0.272
8.75	-0,042944785	-0,042944785	0.226
11.0	-0,296523517	-0,296523517	0.138

Figura 5.6 - Linhas de Influência do Método Leonhardt para a ponte com cinco longarinas



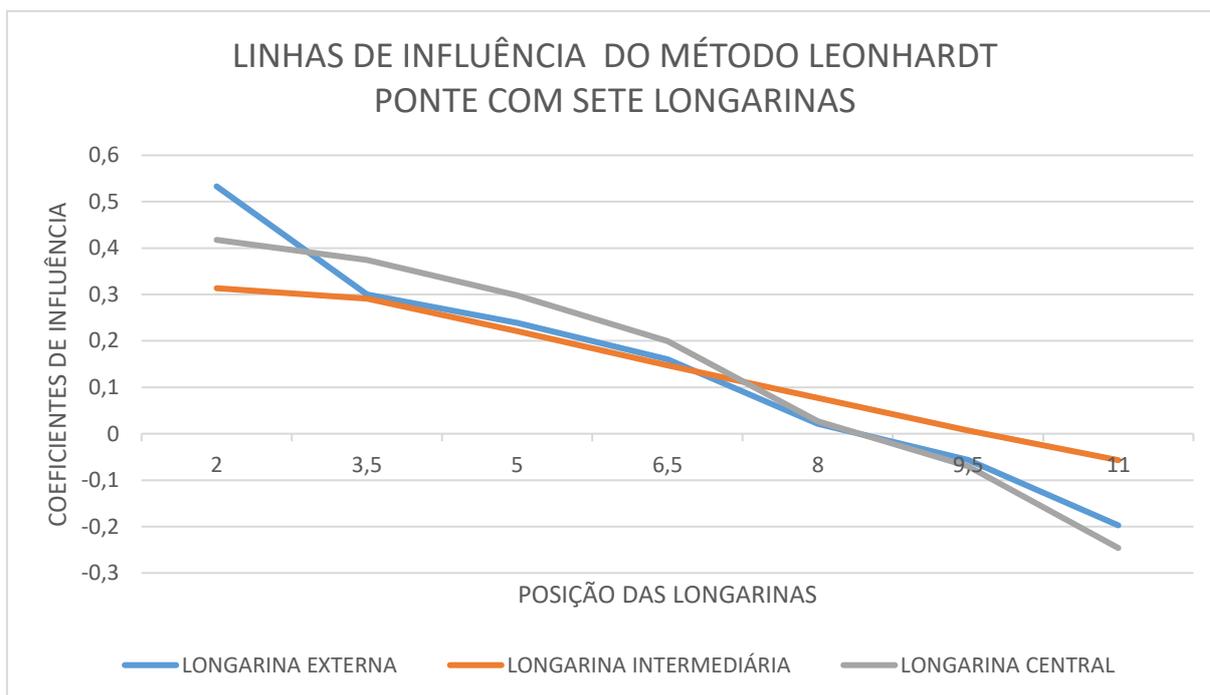
Fonte: Autor (2016)

Na tabela 5.7 e figura 5.7 encontram-se os valores dos coeficientes de repartição nos pontos 2,0; 3,5; 5,0; 6,5; 8,0; 9,5 e 11,0, em metros, para a longarina externa, intermediária e central e suas linhas de influência, respectivamente, utilizando-se sete longarinas no tabuleiro.

Tabela 5.7 - Coeficientes de Repartição para a ponte com sete longarinas

Posição (m)	Coeficientes de Repartição Transversal (r_{ie}) Longarina Externa	Coeficientes de Repartição Transversal (r_{ie}) Longarina Intermediária	Coeficientes de Repartição Transversal (r_{ie}) Longarina Central
2.0	0,533032497	0,313572543	0,417701053
3.5	0,300248088	0,290951638	0,374403239
5.0	0,238797742	0,22074883	0,297775911
6.5	0,160083309	0,147425897	0,199620619
8.0	0,021439729	0,077223089	0,026734904
9.5	-0,056151671	0,007020281	-0,070019988
11.0	-0,197449693	-0,056942278	-0,246215738

Figura 5.7 - Linhas de Influência do Método Leonhardt para a ponte com sete longarinas



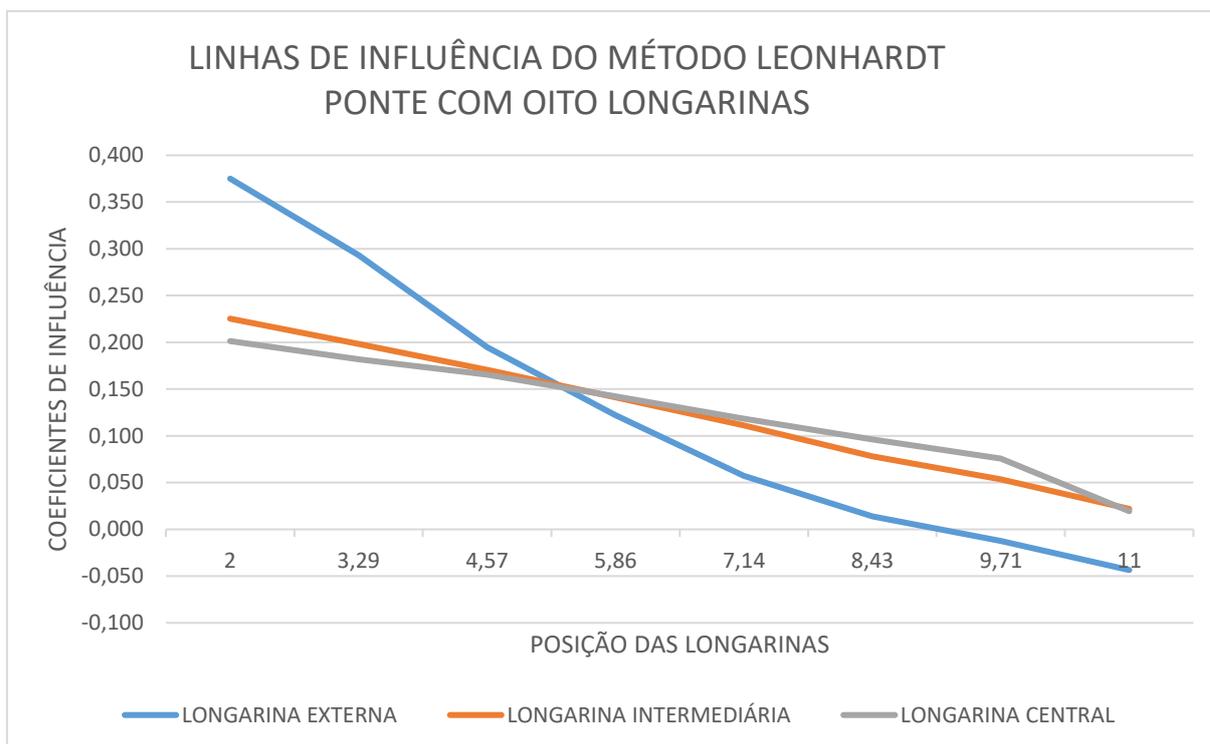
Fonte: Autor (2016)

Na tabela 5.8 e figura 5.8 encontram-se os valores dos coeficientes de repartição nos pontos 2,0; 3,29; 4,57; 5,86; 7,14; 8,43; 9,71 e 11,0, em metros, para a longarina externa, intermediária e central e suas linhas de influência, respectivamente, utilizando-se oito longarinas no tabuleiro.

Tabela 5.8 - Coeficientes de Repartição para a ponte com oito longarina

Posição (m)	Coeficientes de Repartição Transversal (r_{ie}) Longarina Externa	Coeficientes de Repartição Transversal (r_{ie}) Longarina Intermediária	Coeficientes de Repartição Transversal (r_{ie}) Longarina Central
2.0	0,375	0,225	0,201
3.29	0,293	0,198	0,182
4.57	0,195	0,171	0,165
5.86	0,122	0,141	0,142
7.14	0,057	0,111	0,118
8.43	0,014	0,078	0,096
9.71	-0,012	0,053	0,076
11.0	-0,044	0,022	0,019

Figura 5.8 - Linhas de Influência do Método Leonhardt para a ponte com oito longarinas



Fonte: Autor (2016)

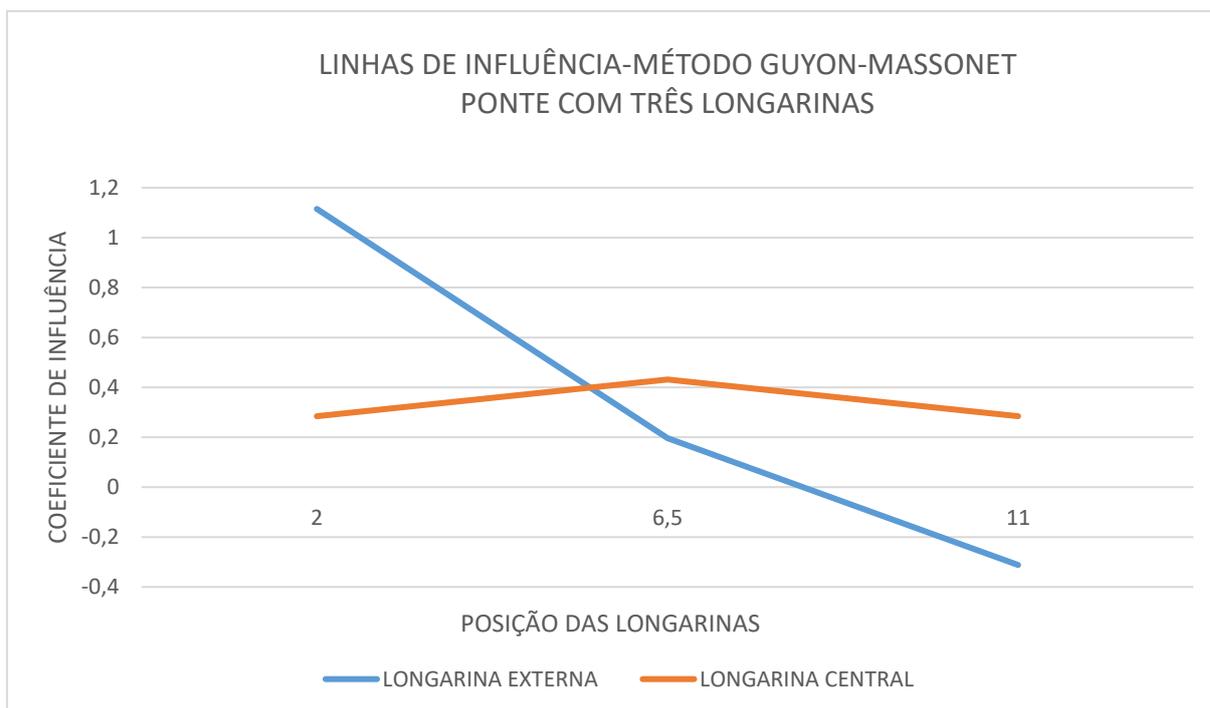
5.1.3 Método de Guyon-Massonet

Nesse método os índices de repartição transversal representam a relação entre os deslocamentos verticais de um ponto da ponte carregada, excêntrica, com a carga linear senoidal e os deslocamentos que corresponderiam a esses mesmos pontos supondo a carga distribuída uniformemente em toda a largura do tabuleiro. Assim, na tabela 5.9 e figura 5.9 encontram-se os valores dos índices de repartição nos pontos 2,0; 6,5; e 11,0; em metros, para as longarinas externa e central, e suas linhas de influência, respectivamente, utilizando-se três longarinas no tabuleiro.

Tabela 5.9 - Índice de Repartição para a ponte com três longarinas

Posição (m)	Índices de Repartição Transversal (χ_0) Longarina Externa	Índices de Repartição Transversal (χ_0) Longarina Central
2.0	1,115202	0,284294
6.5	0,196763	0,431413
11.0	-0,31196	0,284294

Figura 5.9 - Linhas de Influência do Método Guyon-Massonet para a ponte com três longarinas



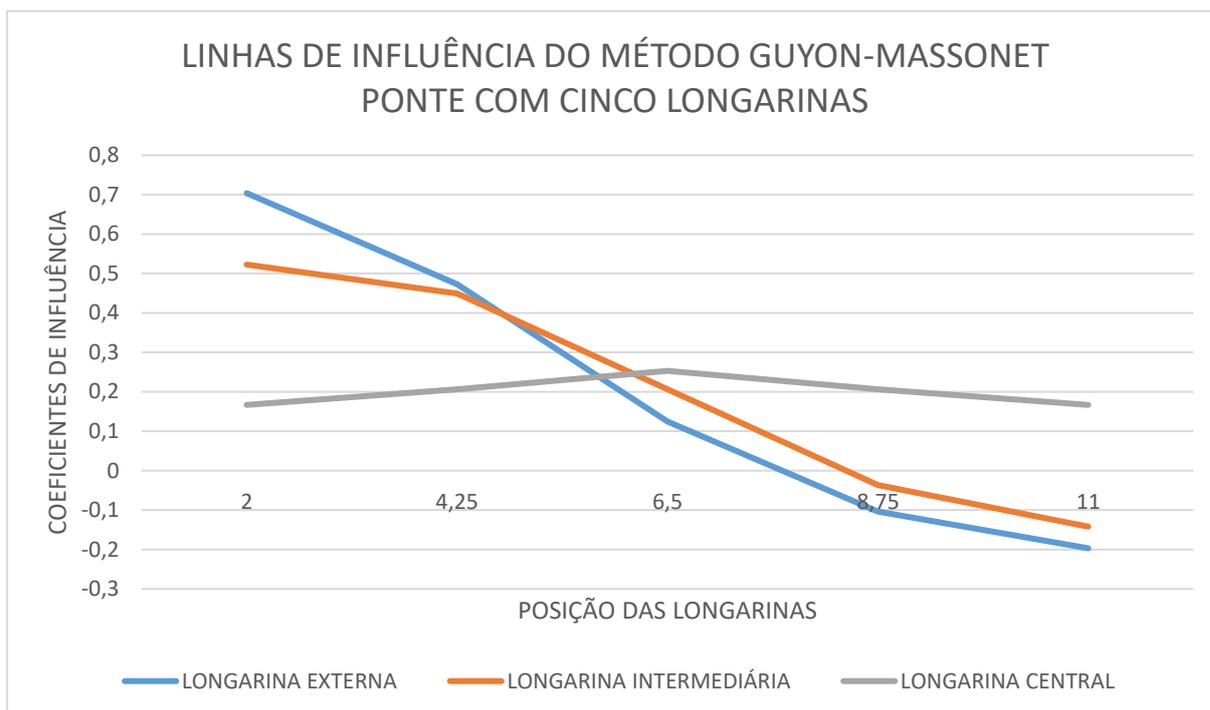
Fonte: Autor (2016)

Na tabela 5.10 e figura 5.10 encontram-se os valores dos índices de repartição nos pontos 2,0; 4,25; 6,5; 8,75; e 11,0, em metros, para a longarinas externa, intermediária e central, e suas linhas de influência, respectivamente, utilizando-se cinco longarinas no tabuleiro.

Tabela 5.10 - Índices de Repartição para a ponte com cinco longarinas

Posição (m)	Índices de Repartição Transversal (χ_0) Longarina Externa	Índices de Repartição Transversal (χ_0) Longarina Intermediária	Índices de Repartição Transversal (χ_0) Longarina Central
2.0	0.703926	0.522671	0.166801
4.25	0.472957	0.449427	0.20664
6.5	0.124199	0.206527	0.253119
8.75	-0.10417	-0.036622	0.20664
11.0	-0.19692	-0.142000	0.166801

Figura 5.10 - Linhas de Influência do Método Guyon-Massonet para a ponte com cinco longarinas



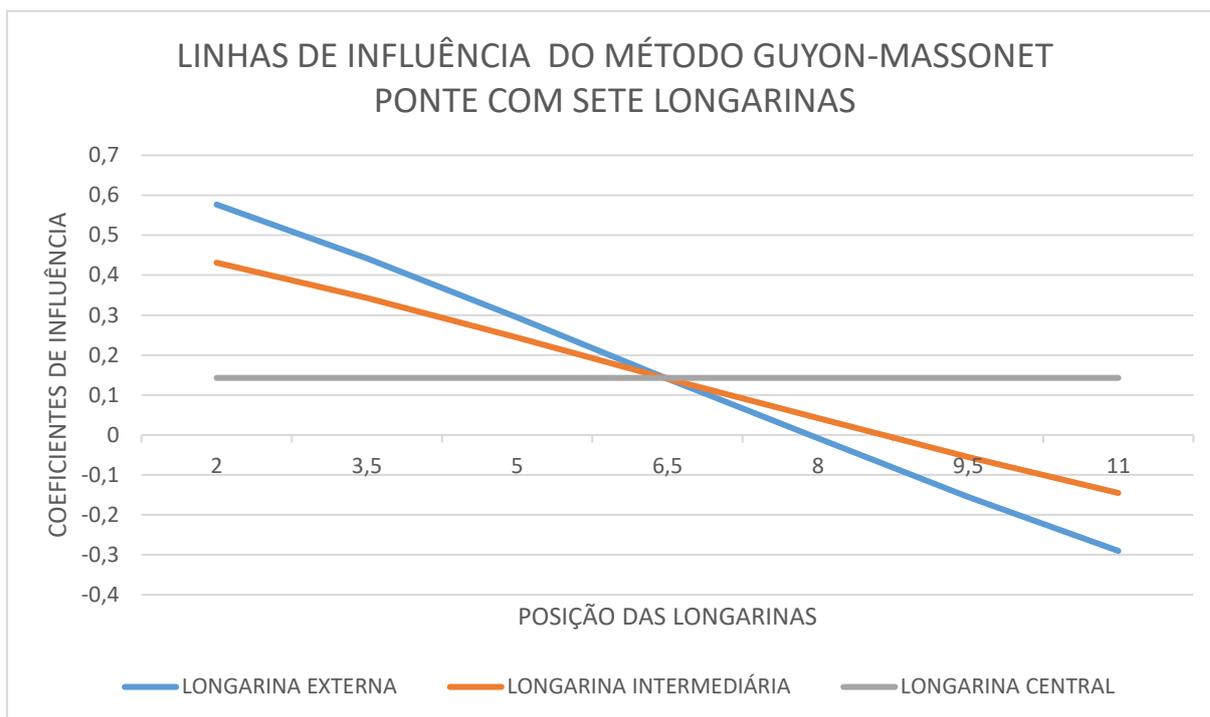
Fonte: Autor (2016)

Na tabela 5.11 e figura 5.11, abaixo, encontram-se os valores dos coeficientes de repartição nos pontos 2,0; 3,5; 5,0; 6,5; 8,0; 9,5 e 11,0, em metros, para a longarina externa, intermediária e central e suas linhas de influência, respectivamente, utilizando-se sete longarinas no tabuleiro.

Tabela 5.11 - Coeficientes de Repartição para a ponte com sete longarinas

Posição (m)	Coeficientes de Repartição Transversal (r_{ie}) Longarina Externa	Coeficientes de Repartição Transversal (r_{ie}) Longarina Intermediária	Coeficientes de Repartição Transversal (r_{ie}) Longarina Central
2.0	0,576655	0,431163	0,142857
3.5	0,441638	0,342583	0,142857
5.0	0,294425	0,24333	0,142857
6.5	0,140244	0,140875	0,142857
8.0	-0,00784	0,042689	0,142857
9.5	-0,15505	-0,0555	0,142857
11.0	-0,29007	-0,14514	0,142857

Figura 5.11 - Linhas de Influência do Método Guyon-Massonet para a ponte com sete longarinas



Fonte: Autor (2016)

5.1.4 Método de Homberg-Trenks

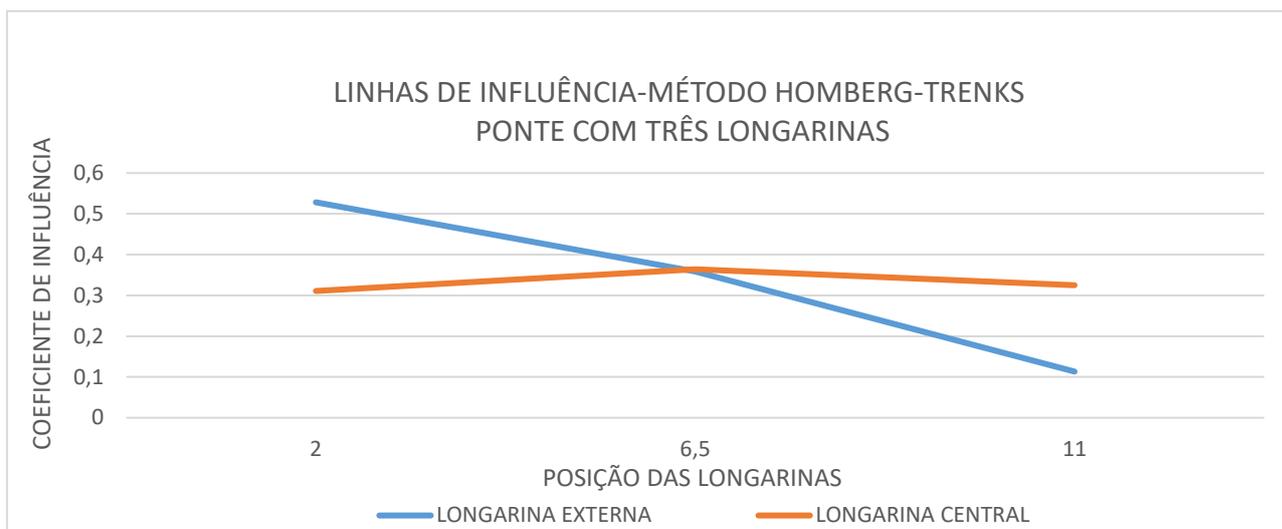
Neste método, uma vez calculados os parâmetros de rigidez à flexão da grelha (Z) e rigidez à torção da grelha (Z_T), obteve-se, através das tabelas propostas pelos autores, os índices de repartição transversal.

Na tabela 5.12 e figura 5.12 encontram-se os valores dos coeficientes de repartição nos pontos 2,0; 6,5 e 11,0; em metros, para as longarinas extrema e central, e suas linhas de influência, respectivamente, utilizando-se três longarinas no tabuleiro.

Tabela 5.12 - Coeficientes de Repartição para a ponte com três longarinas

Posição (m)	Coeficientes de Repartição Transversal (β_{ik}) Longarina Extrema	Coeficientes de Repartição Transversal (β_{ik}) Longarina Central
	2.0	0,528302
6.5	0,358491	0,364045
11.0	0,113208	0,325094

Figura 5.12 - Linhas de Influência do Método Hombertg-Trenks para a ponte com três longarinas



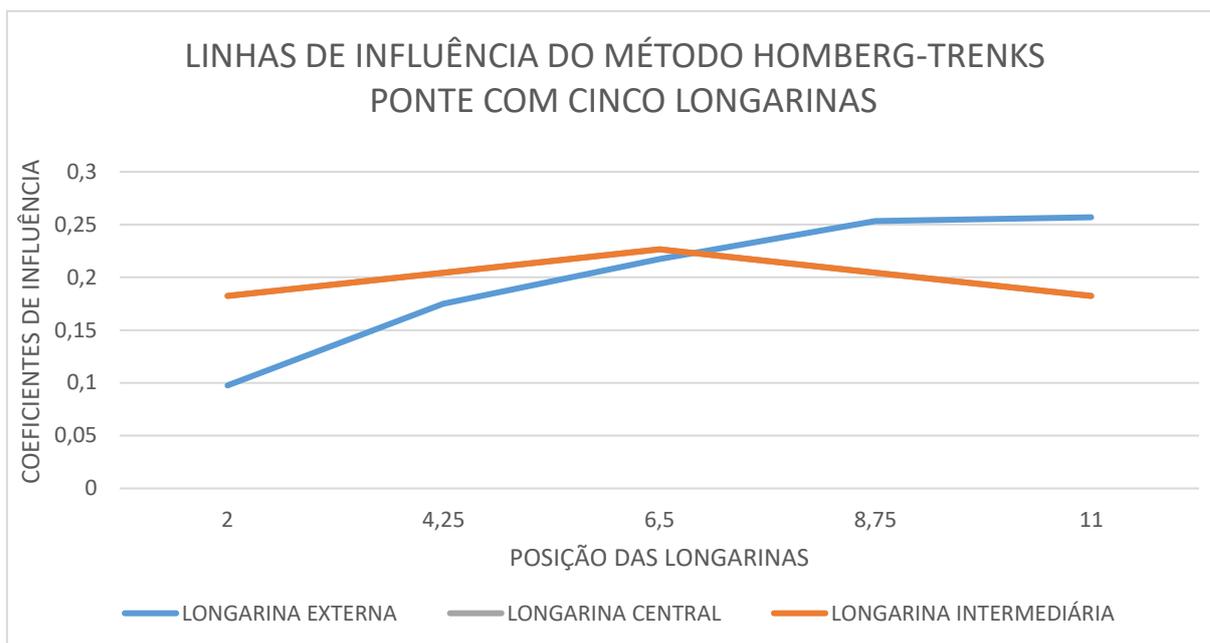
Fonte: Autor (2016)

Na tabela 5.13 e figura 5.13 encontram-se os valores dos coeficientes de repartição nos pontos 2,0; 4,25; 6,5; 8,75; e 11,0; em metros, para as longarinas externa, intermediária e central, e suas linhas de influência, respectivamente, utilizando-se cinco longarinas no tabuleiro.

Tabela 5.13 - Coeficientes de Repartição para a ponte com cinco longarinas

Posição (m)	Coeficientes de Repartição Transversal (β_{ik}) Longarina Externa	Coeficientes de Repartição Transversal (β_{ik}) Longarina Intermediária	Coeficientes de Repartição Transversal (β_{ik}) Longarina Central
	2.0	0,097568	0,182374
4.25	0,174911	0,20435	0,20435
6.5	0,217272	0,226552	0,226552
8.75	0,253348	0,20435	0,20435
11.0	0,256901	0,182374	0,182374

Figura 5.13 - Linhas de Influência do Método Hombertg-Trenks para a ponte com cinco longarinas



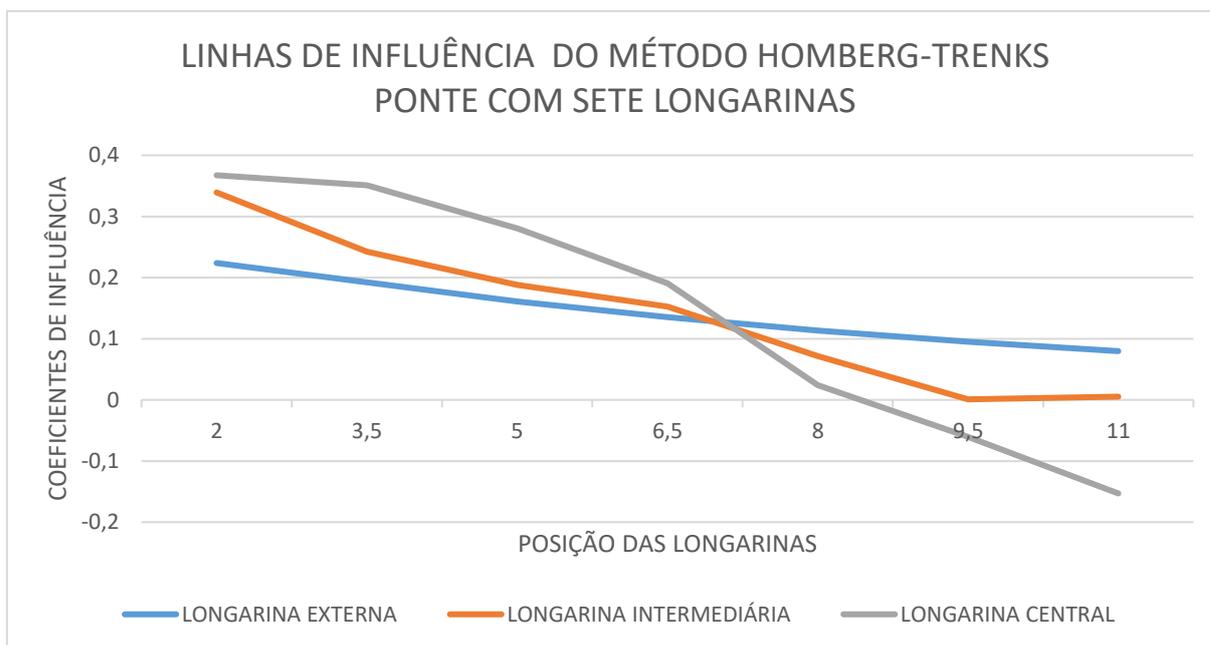
Fonte: Autor (2016)

Na tabela 5.14 e figura 5.14 encontram-se os valores dos coeficientes de repartição nos pontos 2,0; 3,5; 5,0; 6,5; 8,0; 9,5 e 11,0; em metros, para a longarina externa, intermediária e central e suas linhas de influência, respectivamente, utilizando-se sete longarinas no tabuleiro.

Tabela 5.14 - Coeficientes de Repartição para a ponte com sete longarinas

Posição (m)	Coeficientes de Repartição Transversal (r_{ie}) Longarina Externa	Coeficientes de Repartição Transversal (r_{ie}) Longarina Intermediária	Coeficientes de Repartição Transversal (r_{ie}) Longarina Central
2.0	0,223785	0,339219	0,367336
3.5	0,19201	0,242465	0,351083
5.0	0,161107	0,187903	0,280649
6.5	0,13511	0,152634	0,190711
8.0	0,113309	0,071552	0,023947
9.5	0,094997	0,000869	-0,06068
11.0	0,079682	0,005359	-0,15305

Figura 5.14 - Linhas de Influência do Método Hombertg-Trenks para a ponte com sete longarinas



Fonte: Autor (2016)

5.1.5 Processo de Fauchart

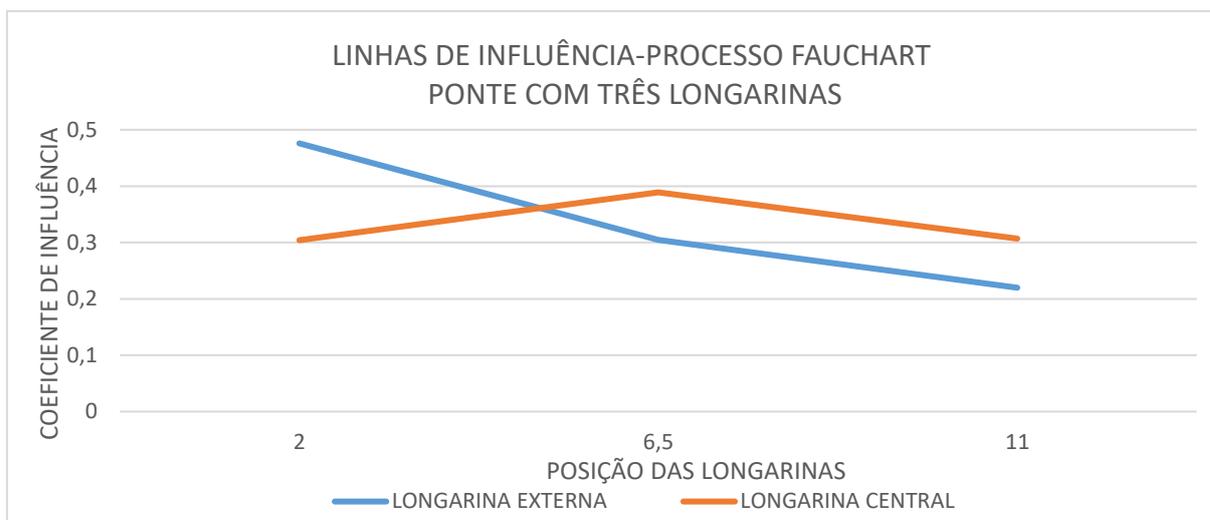
Os resultados encontrados pelo Processo de Fauchart foram extraídos do *software* LIP da empresa TQS desenvolvido Cardoso Junior (2016). O *software* determina após a determinação dos coeficientes de repartição os esforços solicitantes nas longarinas para as cargas permanentes e para a carga móvel.

Na tabela 5.15 e figura 5.15 encontram-se os valores dos coeficientes de repartição nos pontos 2,0; 6,5; e 11,0; em metros, para a longarina externa e central, e suas linhas de influência, respectivamente, utilizando-se três longarinas no tabuleiro.

Tabela 5.15 - Coeficientes de Repartição para a ponte com três longarinas

Posição (m)	Coeficientes de Repartição Transversal (r_{ie}) Longarina Externa	Coeficientes de Repartição Transversal (r_{ie}) Longarina Central
	2.0	0,475806452
6.5	0,304435484	0,388943731
11.0	0,219758065	0,307008885

Figura 5.15 - Linhas de Influência do Processo Fauchart para a ponte com três longarinas



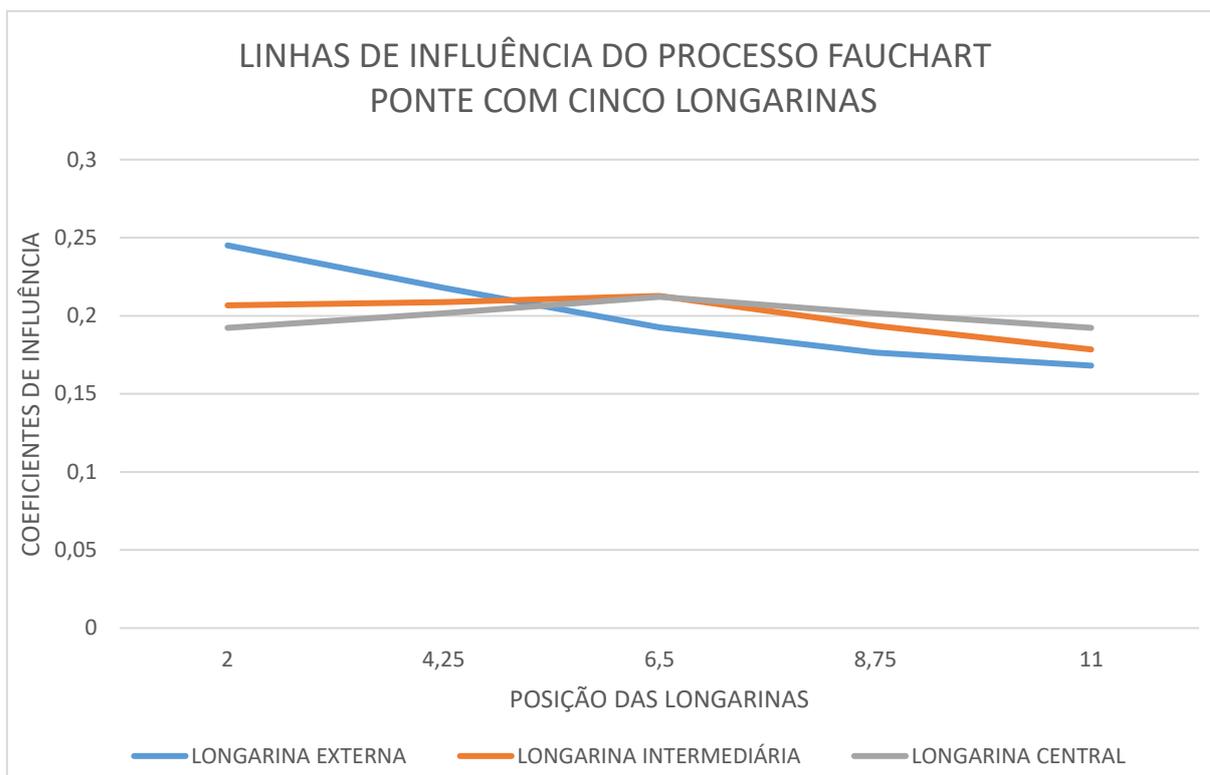
Fonte: Autor (2016)

Na tabela 5.16 e figura 5.16 encontram-se os valores dos coeficientes de repartição nos pontos 2,0; 4,25; 6,5; 8,75 e 11,0; em metros, para as longarinas externa, intermediária e central, e suas linhas de influência, respectivamente, utilizando-se cinco longarinas no tabuleiro.

Tabela 5.16 - Coeficientes de Repartição para a ponte com cinco longarinas

Posição (m)	Coeficientes de Repartição Transversal (r_{ie}) Longarina Externa	Coeficientes de Repartição Transversal (r_{ie}) Longarina Intermediária	Coeficientes de Repartição Transversal (r_{ie}) Longarina Central
2.0	0,24507	0,206653	0,192268
4.25	0,21784	0,208669	0,201672
6.5	0,192488	0,212702	0,212121
8.75	0,176526	0,193548	0,201672
11.0	0,168075	0,178427	0,192268

Figura 5.16 - Linhas de Influência do Processo Fauchart para a ponte com cinco longarinas



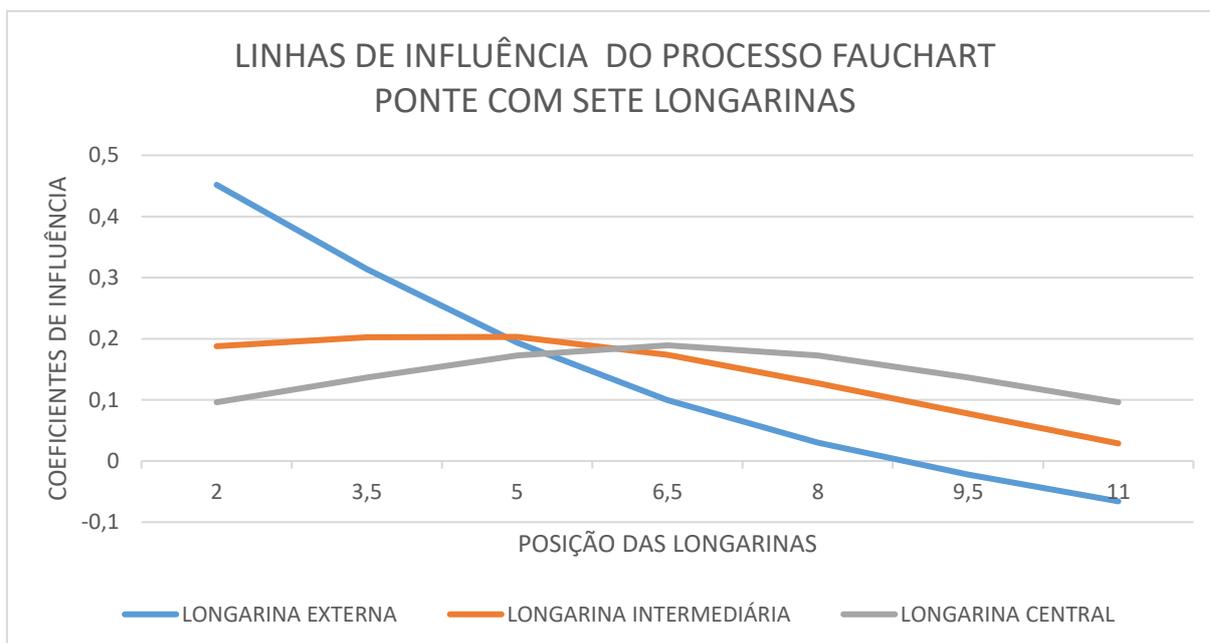
Fonte: Autor (2016)

Na tabela 5.17 e figura 5.17 encontram-se os valores dos coeficientes de repartição nos pontos 2,0; 3,5; 5,0; 6,5; 8,0; 9,5 e 11,0; em metros, para a longarina externa, intermediária e central e suas linhas de influência, respectivamente, utilizando-se sete longarinas no tabuleiro.

Tabela 5.17 - Coeficientes de Repartição para a ponte com sete longarinas

Posição (m)	Coeficientes de Repartição Transversal (r_{ie}) Longarina Externa	Coeficientes de Repartição Transversal (r_{ie}) Longarina Intermediária	Coeficientes de Repartição Transversal (r_{ie}) Longarina Central
2.0	0,451703874	0,187591968	0,096095699
3.5	0,313796448	0,202278445	0,136574949
5.0	0,193298612	0,203009446	0,172745483
6.5	0,099518302	0,173873831	0,189167738
8.0	0,029945147	0,12719419	0,172745483
9.5	-0,022324376	0,077381687	0,136574949
11.0	-0,065938007	0,028670432	0,096095699

Figura 5.17 - Linhas de Influência do Processo Fauchart para a ponte com sete longarinas



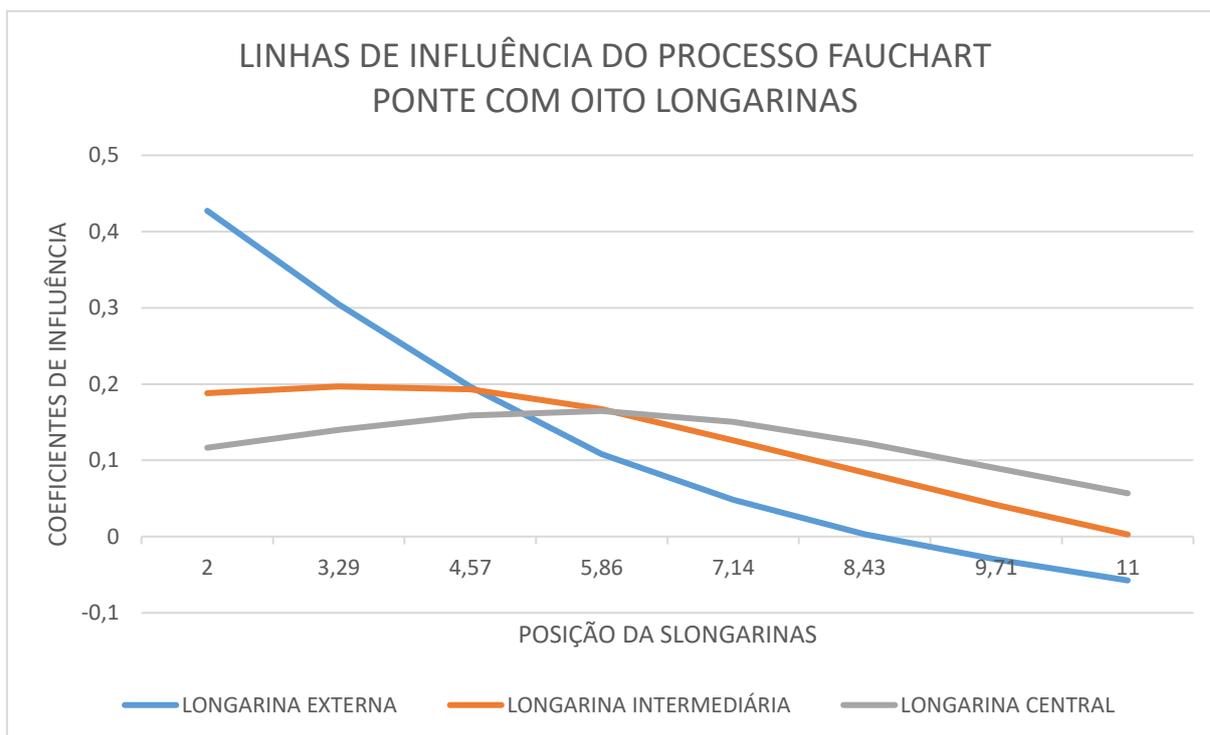
Fonte: Autor (2016)

Na tabela 5.18 e figura 5.18 encontram-se os valores dos coeficientes de repartição nos pontos 2,0; 3,29; 4,57; 5,86; 7,14; 8,43; 9,71 e 11,0, em metros, para a longarina externa, intermediária e central e suas linhas de influência, respectivamente, utilizando-se oito longarinas no tabuleiro.

Tabela 5.18 - Coeficientes de Repartição para a ponte com oito longarina

Posição (m)	Coeficientes de Repartição Transversal (r_{ie}) Longarina Externa	Coeficientes de Repartição Transversal (r_{ie}) Longarina Intermediária	Coeficientes de Repartição Transversal (r_{ie}) Longarina Central
2.0	0,427215873	0,188260824	0,11641885
3.29	0,304527561	0,196826787	0,139943421
4.57	0,196565651	0,193291899	0,158904146
5.86	0,107985884	0,167023899	0,164768698
7.14	0,048151688	0,126285132	0,150493168
8.43	0,003081452	0,083891231	0,122797238
9.71	-0,030070531	0,041660084	0,089887108
11.0	-0,057457578	0,002760144	0,056787371

Figura 5.18 - Linhas de Influência do Processo Fauchart para a ponte com oito longarinas



Fonte: Autor (2016)

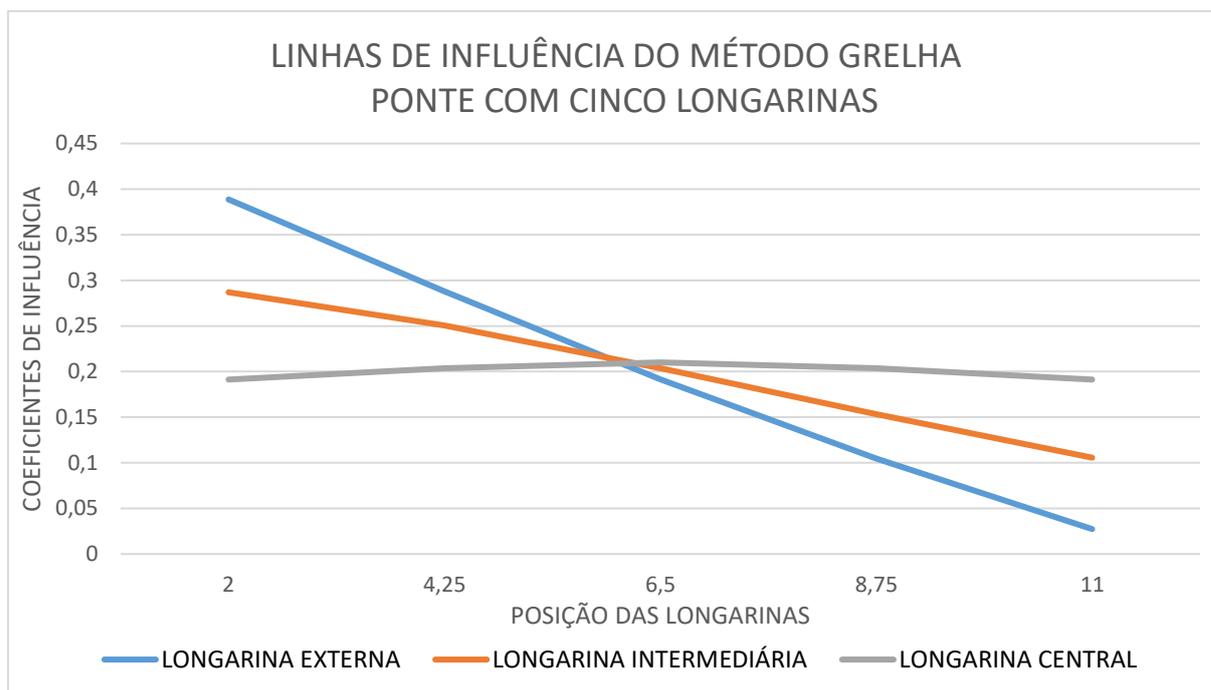
5.2 Métodos computacionais

5.2.1 Método da Grelha

Os resultados foram obtidos através de modelagem, utilizando o software SAP2000, admitindo rigidez equivalente à flexão e torção da malha formada pelo conjunto longarina-transversina, representadas por barras, baseadas na hipótese das vigas de Timoshenko e nas premissas de cálculo de Leonhardt, com cargas unitárias nodais, aplicadas.

Na tabela 5.19 e figura 5.19 encontram-se os valores dos coeficientes de repartição nos pontos 2,0; 6,5; e 11,0, em metros, para as longarinas externa e central, e suas linhas de influência, respectivamente, utilizando-se três longarinas no tabuleiro.

Figura 5.20 - Linhas de Influência do Método Grelha para a ponte com cinco longarinas



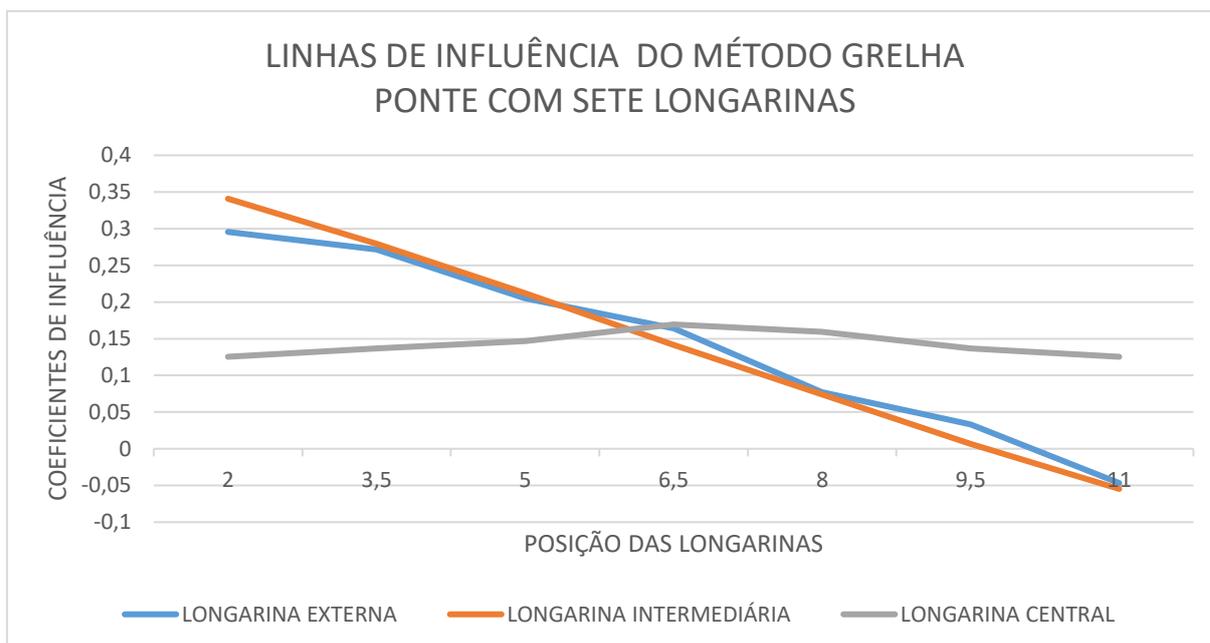
Fonte: Autor (2016)

Na tabela 5.21 e figura 5.21 encontram-se os valores dos coeficientes de repartição nos pontos 2,0; 3,5; 5,0; 6,5; 8,0; 9,5 e 11,0; em metros, para a longarina externa, intermediária e central e suas linhas de influência, respectivamente, utilizando-se sete longarinas no tabuleiro.

Tabela 5.21 - Coeficientes de Repartição para a ponte com sete longarinas

Posição (m)	Coeficientes de Repartição Transversal (r_{ie}) Longarina Externa	Coeficientes de Repartição Transversal (r_{ie}) Longarina Intermediária	Coeficientes de Repartição Transversal (r_{ie}) Longarina Central
	2.0	0,29552	0,340824
3.5	0,271687	0,279401	0,13686
5.0	0,204957	0,211985	0,146779
6.5	0,163966	0,141573	0,169422
8.0	0,077216	0,074157	0,159332
9.5	0,033365	0,006742	0,13686
11.0	-0,04671	-0,05468	0,125374

Figura 5.21 - Linhas de Influência do Método Grelha para a ponte com sete longarinas



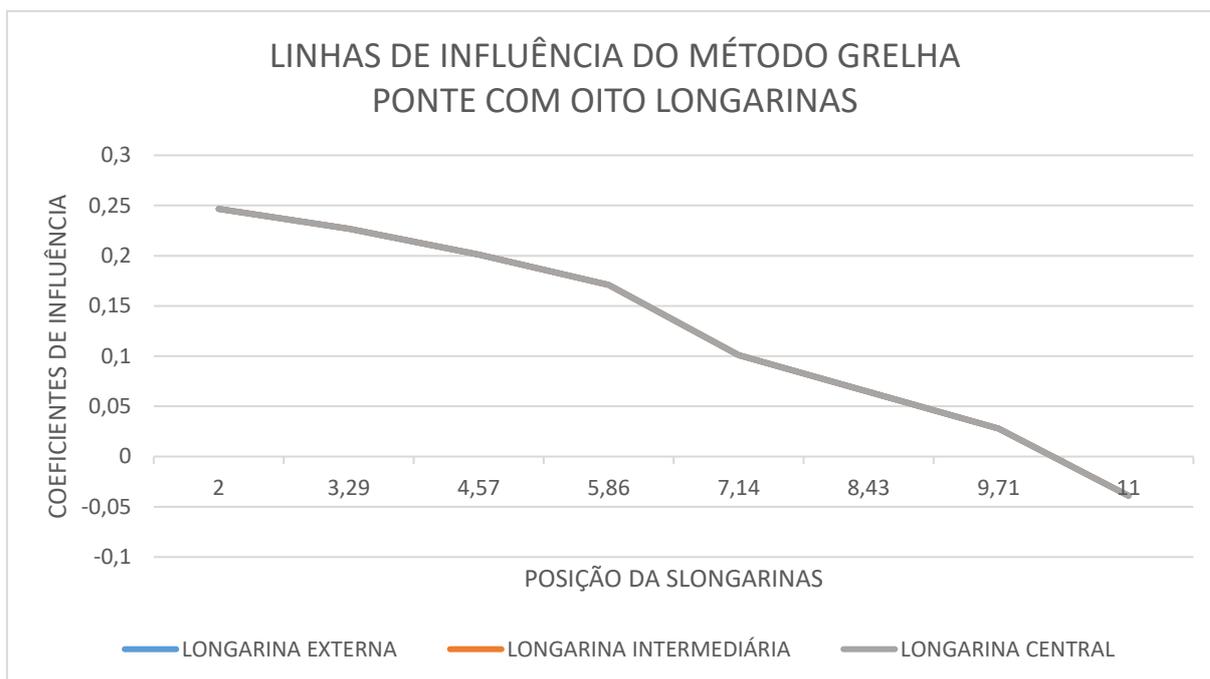
Fonte: Autor (2016)

Na tabela 5.22 e figura 5.22 encontram-se os valores dos coeficientes de repartição nos pontos 2,0; 3,29; 4,57; 5,86; 7,14; 8,43; 9,71 e 11,0; em metros, para a longarina externa, intermediária e central e suas linhas de influência, respectivamente, utilizando-se oito longarinas no tabuleiro.

Tabela 5.22 - Coeficientes de Repartição para a ponte com oito longarina

Posição (x) (m)	Coeficientes de Repartição Transversal (r_{ie}) Longarina Externa	Coeficientes de Repartição Transversal (r_{ie}) Longarina Intermediária	Coeficientes de Repartição Transversal (r_{ie}) Longarina Central
2.0	0,246619	0,246619	0,246619
3.29	0,22673	0,22673	0,22673
4.57	0,201273	0,201273	0,201273
5.86	0,171042	0,171042	0,171042
7.14	0,101034	0,101034	0,101034
8.43	0,064439	0,064439	0,064439
9.71	0,027844	0,027844	0,027844
11.0	-0,03898	-0,03898	-0,03898

Figura 5.22 - Linhas de Influência do Método Grelha para a ponte com oito longarinas



Fonte: Autor (2016)

5.2.2 Método de Placa

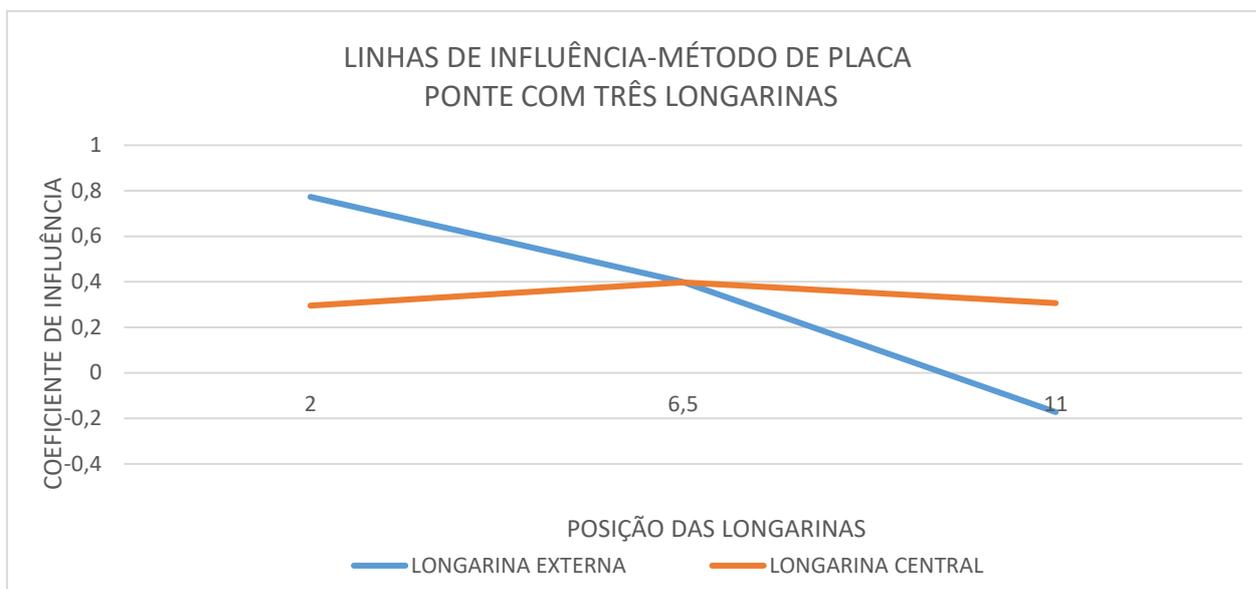
Para realização da modelagem como placa, foram calculadas as rigidezes equivalentes dos modelos com 3, 5,7 e 8 longarinas, com o intuito de ter um modelo no SAP2000 que pudesse representar as aproximações feitas por Guyon, Massonet e Bares acerca do modelo de placa ortotrópica equivalente. O modelo foi construído com rigidezes diferentes na direção das longarinas e das transversinas, ambas equivalentes as das vigas.

Na tabela 5.23 e figura 5.23 encontram-se os valores dos coeficientes de repartição nos pontos 2,0; 6,5e 11,0; em metros, para a longarina extrema e sua linha de influência, respectivamente, utilizando-se três longarinas no tabuleiro.

Tabela 5.23 - Coeficientes de Repartição para ponte com três longarinas

Posição (m)	Coeficientes de Repartição Transversal Longarina Extrema	Coeficientes de Repartição Transversal Longarina Central
2.0	0,773179	0,295498
6.5	0,399007	0,397731
11.0	-0,17219	0,306771

Figura 5.23 - Linhas de Influência do Método de Placa para a ponte com três longarinas



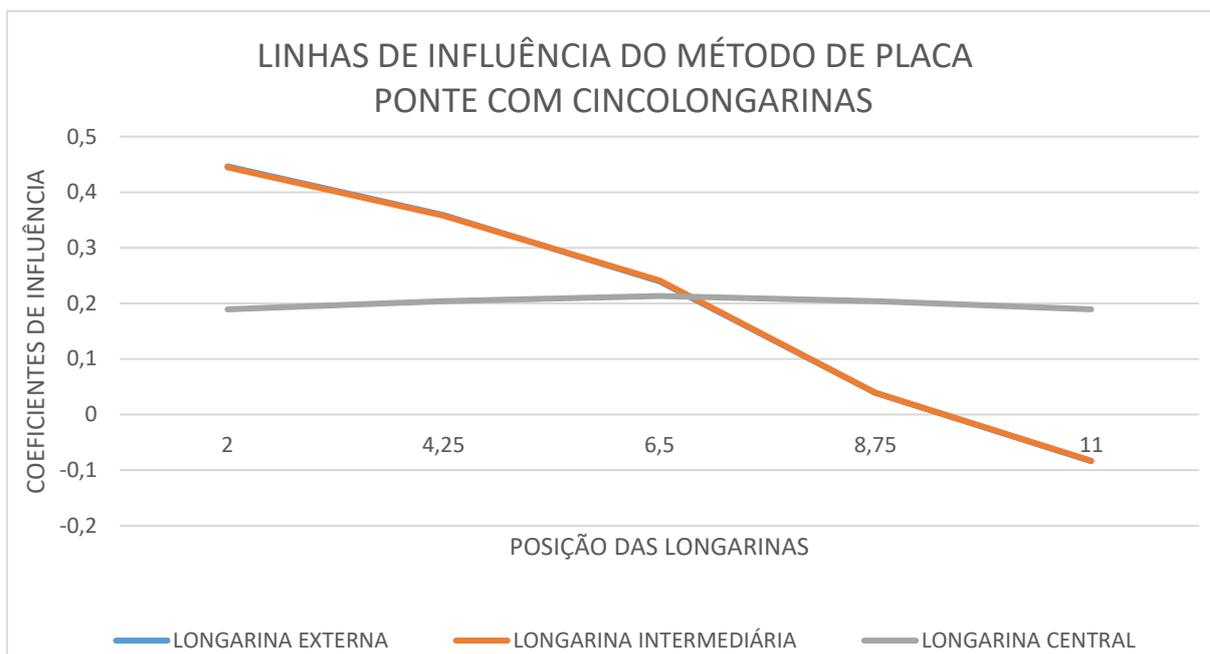
Fonte: Autor (2016)

Na tabela 5.24 e figura 5.24 encontram-se os valores dos coeficientes de repartição nos pontos 2,0; 4,25; 6,5; 8,75; e 11,0; em metros, para a longarina externa e sua linha de influência, respectivamente, utilizando-se cinco longarinas no tabuleiro.

Tabela 5.24 - Coeficientes de Repartição para a ponte com cinco longarinas

Posição (m)	Coeficientes de Repartição Transversal Longarina Externa	Coeficientes de Repartição Transversal Longarina Intermediária	Coeficientes de Repartição Transversal Longarina Central
2.0	0,44649	0,444709	0,189266
4.25	0,359033	0,357907	0,204146
6.5	0,239356	0,241379	0,213175
8.75	0,039125	0,039239	0,204146
11.0	-0,084	-0,08323	0,189266

Figura 5.24 - Linhas de Influência do Método de Placa para a ponte com cinco longarinas



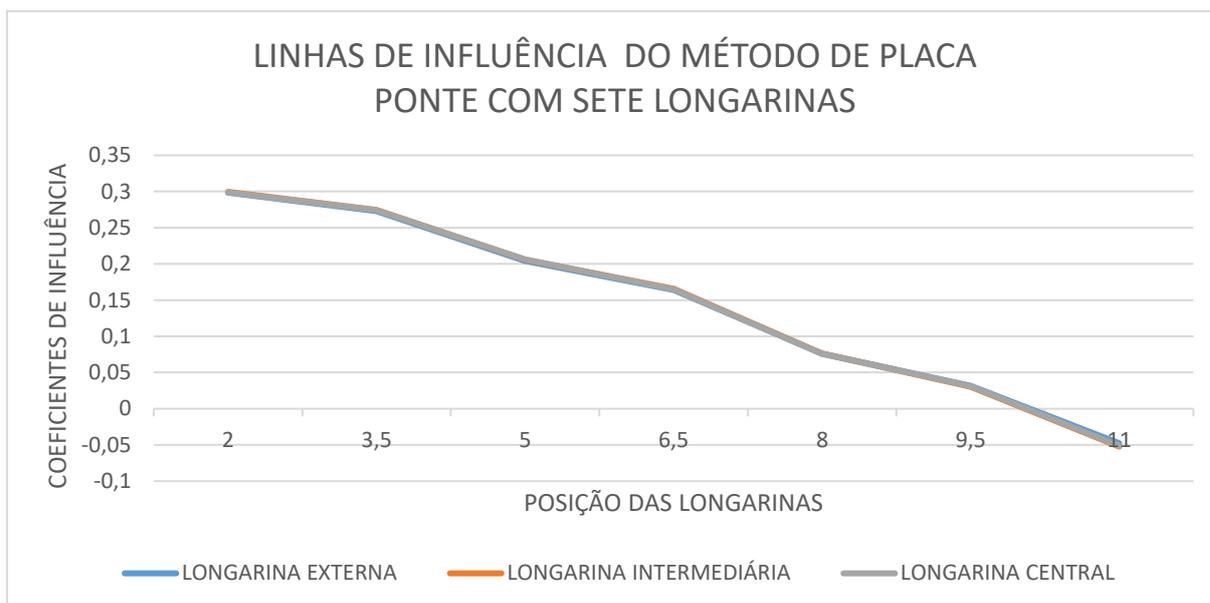
Fonte: Autor (2016)

Na tabela 5.25 e figura 5.25 encontram-se os valores dos coeficientes de repartição nos pontos 2,0; 3,5; 5,0; 6,5; 8,0; 9,5 e 11,0; em metros, para a longarina externa, intermediária e central e suas linhas de influência, respectivamente, utilizando-se sete longarinas no tabuleiro.

Tabela 5.25 - Coeficientes de Repartição para a ponte com sete longarinas

Posição (m)	Coeficientes de Repartição Transversal (r_{ie}) Longarina Externa	Coeficientes de Repartição Transversal (r_{ie}) Longarina Intermediária	Coeficientes de Repartição Transversal (r_{ie}) Longarina Central
2.0	0,298413	0,299564	0,298774
3.5	0,273016	0,27451	0,274247
5.0	0,204233	0,205882	0,206243
6.5	0,164021	0,165577	0,164994
8.0	0,07619	0,076253	0,075808
9.5	0,031746	0,030501	0,031215
11.0	-0,04762	-0,05229	-0,05128

Figura 5.25 - Linhas de Influência do Método de Placa para a ponte com sete longarinas



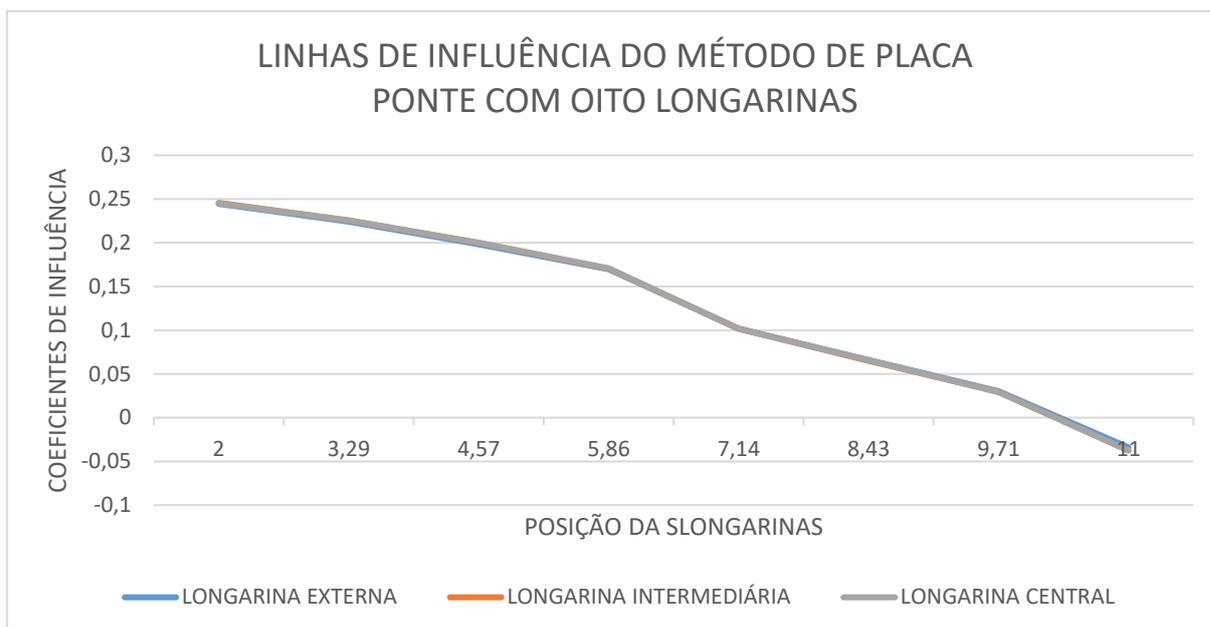
Fonte: Autor (2016)

Na tabela 5.26 e figura 5.26 encontram-se os valores dos coeficientes de repartição nos pontos 2,0; 3,29; 4,57; 5,86; 7,14; 8,43; 9,71 e 11,0; em metros, para a longarina externa, intermediária e central e suas linhas de influência, respectivamente, utilizando-se oito longarinas no tabuleiro.

Tabela 5.26 - Coeficientes de Repartição para a ponte com oito longarina

Posição (m)	Coeficientes de Repartição Transversal (r_{ie}) Longarina Externa	Coeficientes de Repartição Transversal (r_{ie}) Longarina Intermediária	Coeficientes de Repartição Transversal (r_{ie}) Longarina Central
2.0	0,244425	0,245646	0,24507
3.29	0,223907	0,225481	0,225352
4.57	0,198037	0,199817	0,2
5.86	0,169492	0,170486	0,170892
7.14	0,101695	0,101742	0,101408
8.43	0,066012	0,065078	0,065728
9.71	0,03033	0,029331	0,029108
11.0	-0,0339	-0,03758	-0,03756

Figura 5.26 - Linhas de Influência do Método de Placa para a ponte com oito longarinas



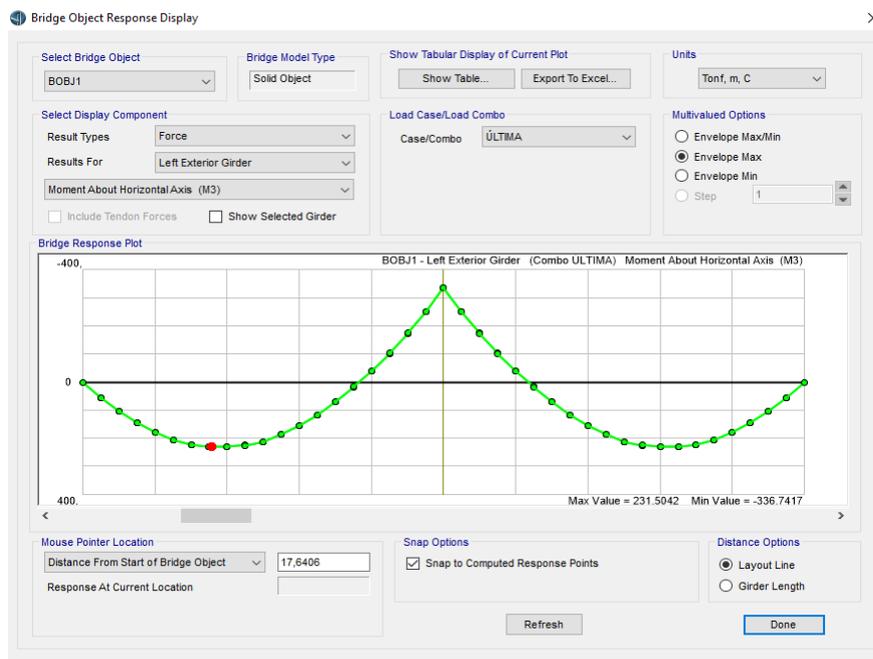
Fonte: Autor (2016)

5.2.3 Método de 3D-Casca / Pórtico

O software CSI Bridge V18 permitiu analisar os esforços de cada elemento estrutural através do comando *"show bridge superstructure forces/stresses"*. A visualização 3D das deformações permitiu de forma expedita analisar o comportamento da estrutura da ponte. Para analisar como a estrutura absorveu os esforços, bastou comparar o momento máximo absorvido por cada peça com o somatório dos momentos máximos absorvidos por todas as longarinas ("momento total"). A relação entre esses momentos gerou os coeficientes de repartição mostrados nas tabelas subsequentes.

A figura 5.27 mostra o resultado do momento fletor ao longo da longarina externa, para o caso com utilização de três longarinas.

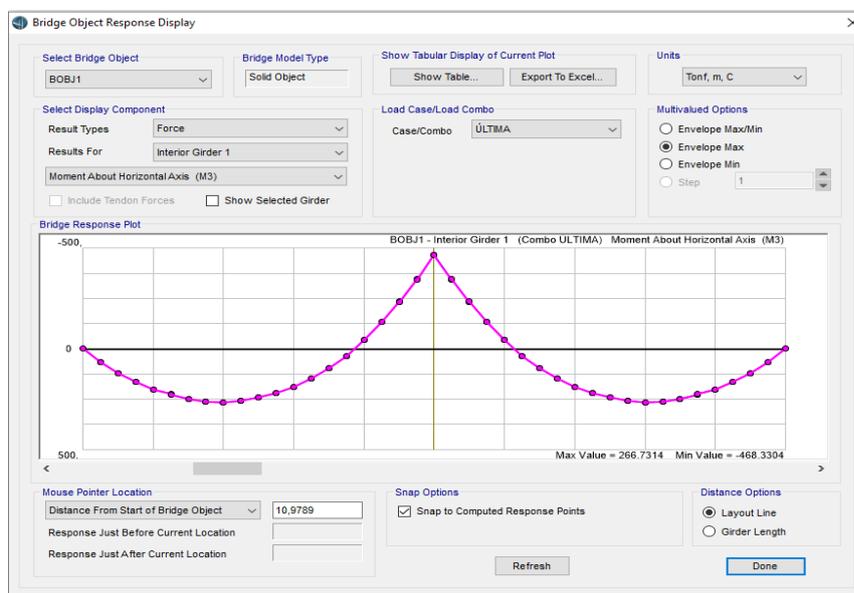
Figura 5.27 - Momento Fletor ao longo da longarina externa



Fonte: Autor (2016)

A figura 5.28 mostra o resultado do momento fletor ao longo da longarina central, para o caso com utilização de três longarinas.

Figura 5.28 - Momento Fletor ao longo da longarina central



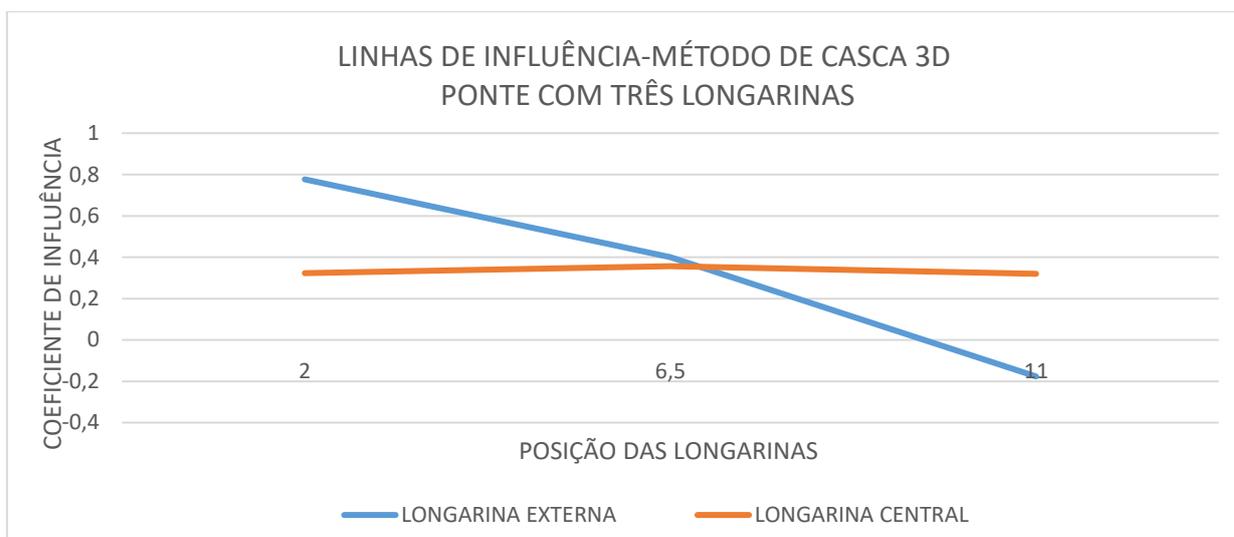
Fonte: Autor (2016)

Na tabela 5.27 e figura 5.29 encontram-se os valores dos coeficientes de repartição nos pontos (2,0); (6,5); e (11,0), em metros, para a longarina externa, respectivamente, utilizando-se três longarinas no tabuleiro.

Tabela 5.27 - Coeficientes de Repartição para ponte com três longarinas

Posição (m)	Coeficientes de Repartição Transversal Longarina Externa	Coeficientes de Repartição Transversal Longarina Central
2.0	0,776744	0,323541
6.5	0,4	0,356648
11.0	-0,17674	0,319811

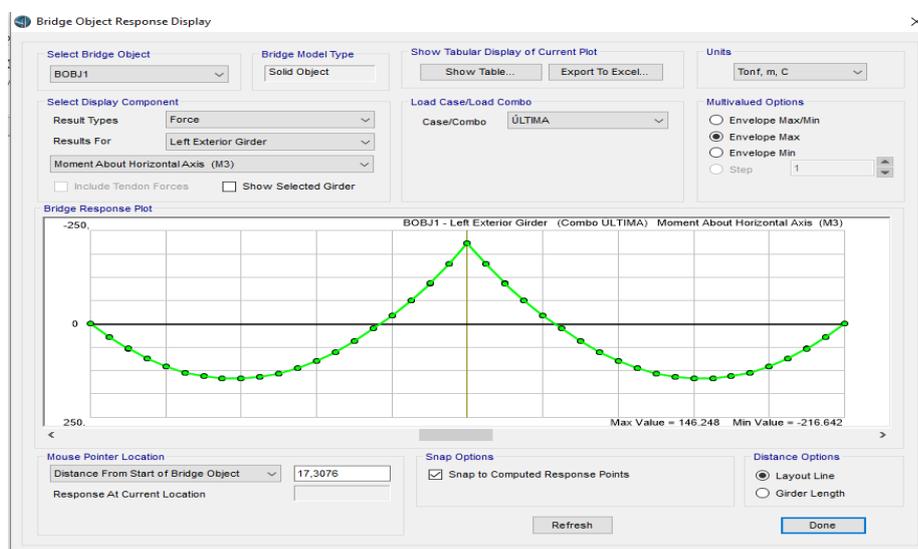
Figura 5.29 - Linhas de Influência do Método de Casca 3D para a ponte com três longarinas



Fonte: Autor (2016)

A figura 5.30 mostra o resultado do momento fletor ao longo da longarina externa, para o caso de utilização de cinco longarinas.

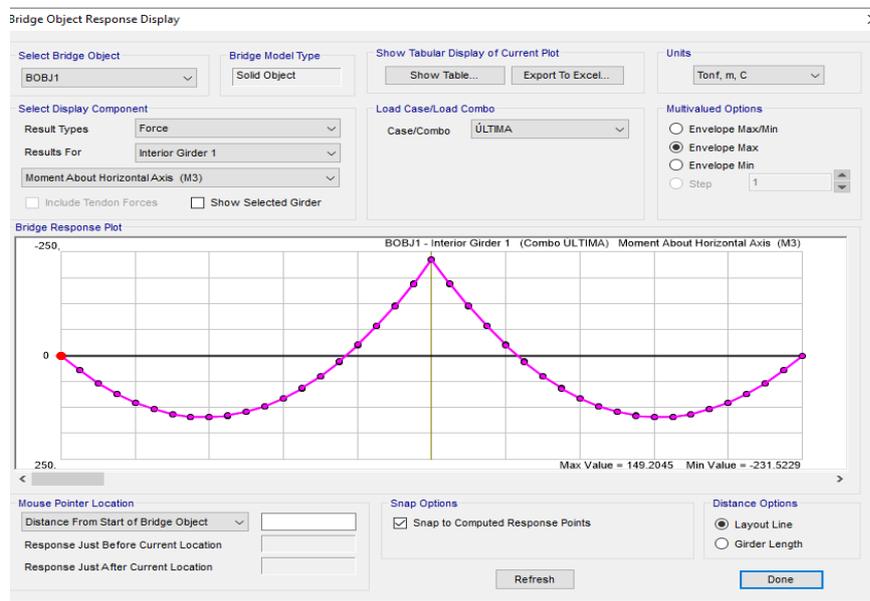
Figura 5.30 - Momento Fletor ao longo da longarina externa



Fonte: Autor (2016)

A figura 5.3 mostra o resultado do momento fletor ao longo da longarina intermediária, para o caso de utilização de cinco longarinas.

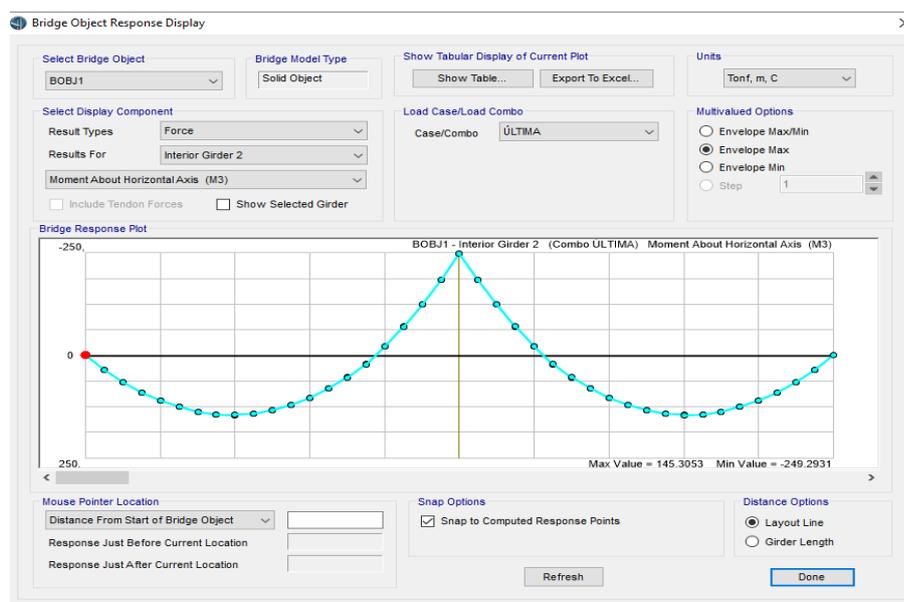
Figura 5.31 - Momento Fletor ao longo da longarina intermediária



Fonte: Autor (2016)

A figura 5.32 mostra o resultado do momento fletor ao longo da longarina central, para o caso de utilização de cinco longarinas.

Figura 5.32 - Momento Fletor ao longo da longarina central



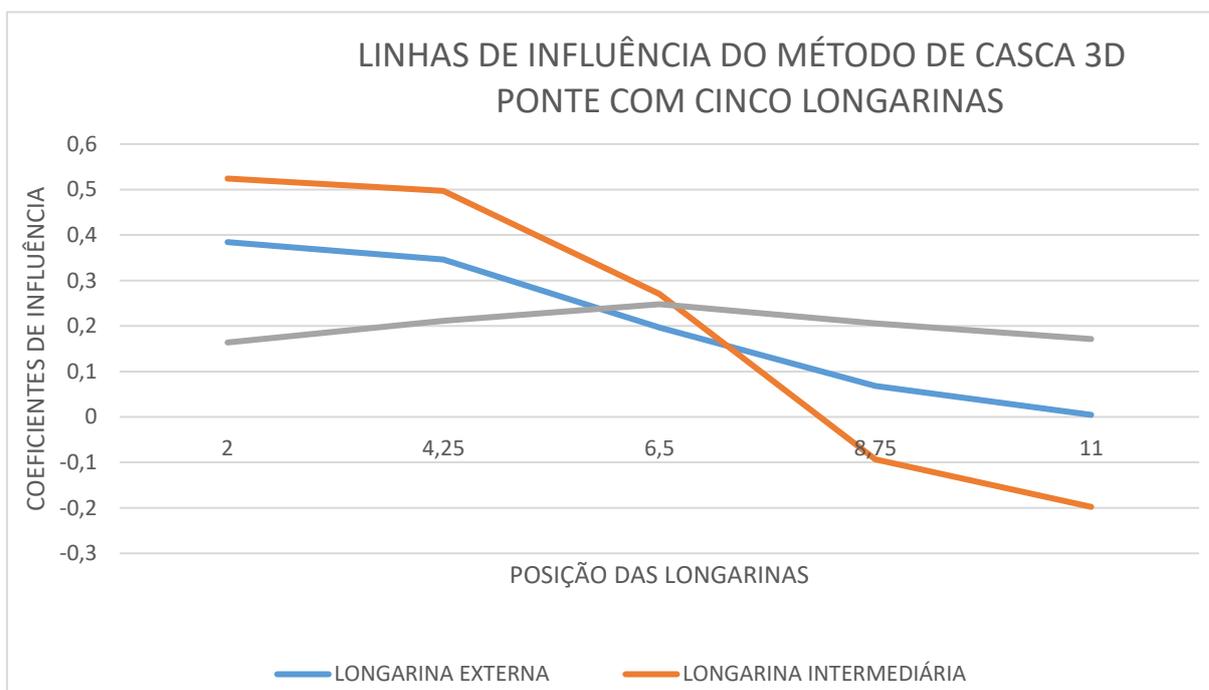
Fonte: Autor (2016)

Na tabela 5.28 e figura 5.33 encontram-se os valores dos coeficientes de repartição nos pontos 2,0; 4,25; 6,5; 8,75 e 11,0; em metros, para a longarina externa, respectivamente, utilizando-se cinco longarinas no tabuleiro.

Tabela 5.28 - Coeficientes de Repartição para a ponte com cinco longarinas

Posição (m)	Coeficientes de Repartição Transversal Longarina Externa	Coeficientes de Repartição Transversal Longarina Intermediária	Coeficientes de Repartição Transversal Longarina Central
2.0	0,38435	0,524116	0,163722
4.25	0,346375	0,496785	0,211169
6.5	0,196778	0,270096	0,247818
8.75	0,067894	-0,09325	0,205934
11.0	0,004603	-0,19775	0,171357

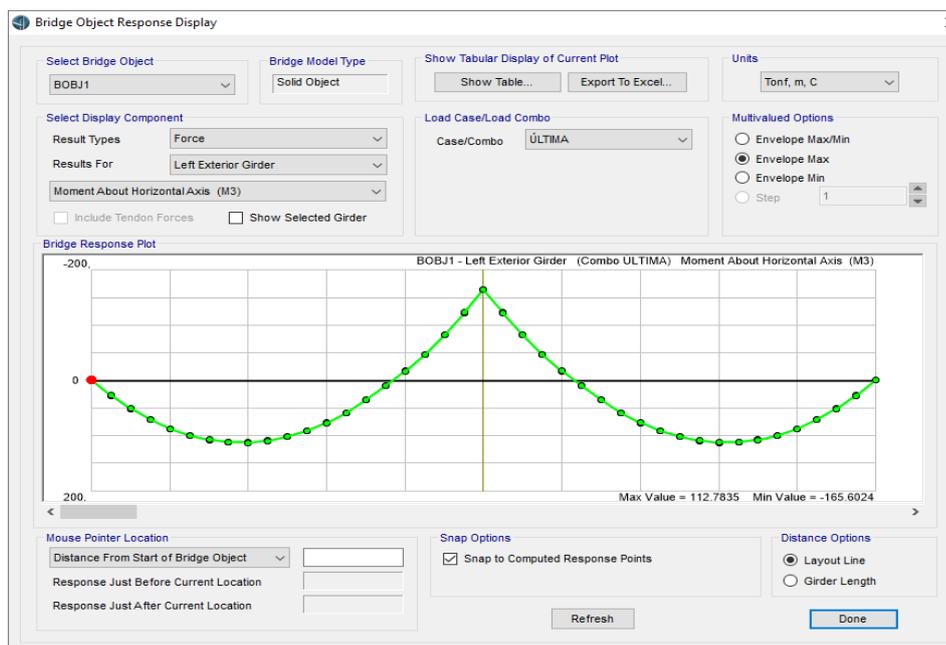
Figura 5.33 - Linhas de Influência do Método de Casca 3D para ponte com cinco longarinas



Fonte: Autor (2016)

A figura 5.34 mostra o resultado do momento fletor ao longo da longarina externa, para o caso de utilização de sete longarinas.

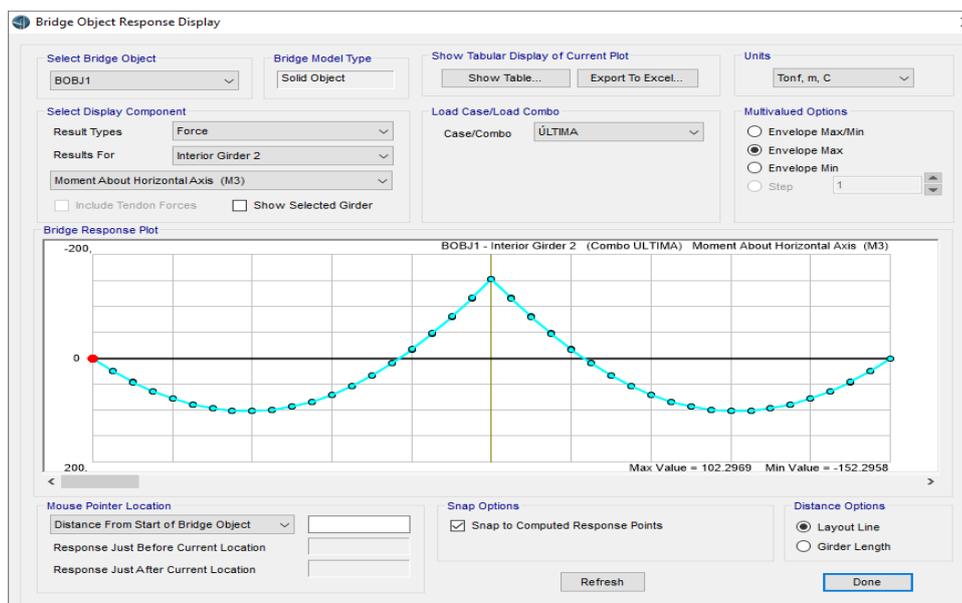
Figura 5.34 - Momento Fletor ao longo da longarina externa



Fonte: Autor (2016)

A figura 5.35 mostra o resultado do momento fletor ao longo da longarina intermediária, para o caso de utilização de sete longarinas.

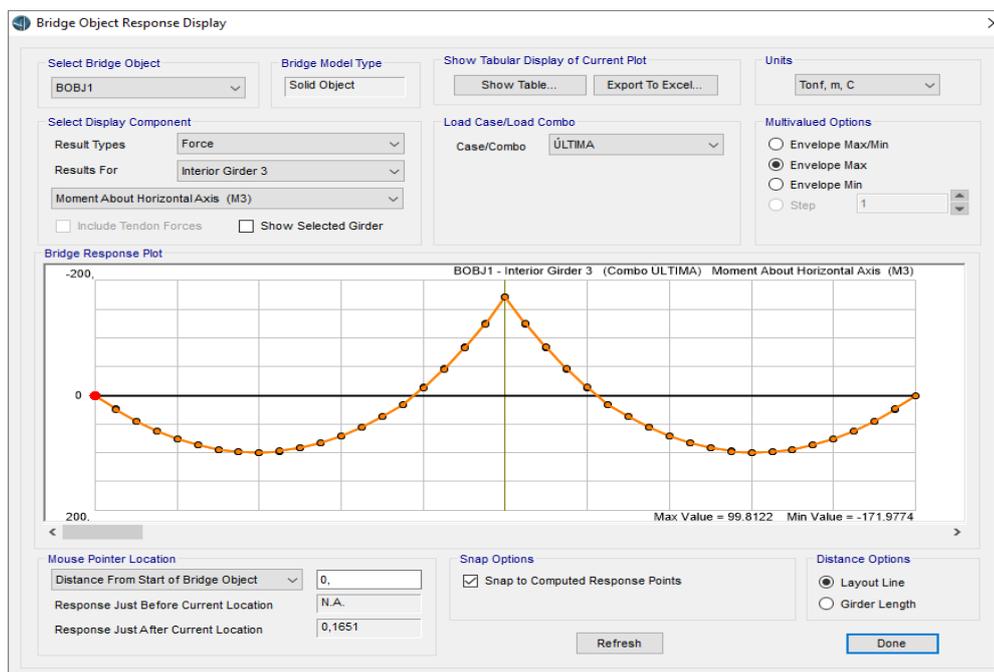
Figura 5.35 - Momento Fletor ao longo da longarina intermediária



Fonte: Autor (2016)

A figura 5.36 mostra o resultado do momento fletor ao longo da longarina central, para o caso de utilização de sete longarinas.

Figura 5.36 - Momento Fletor ao longo da longarina central



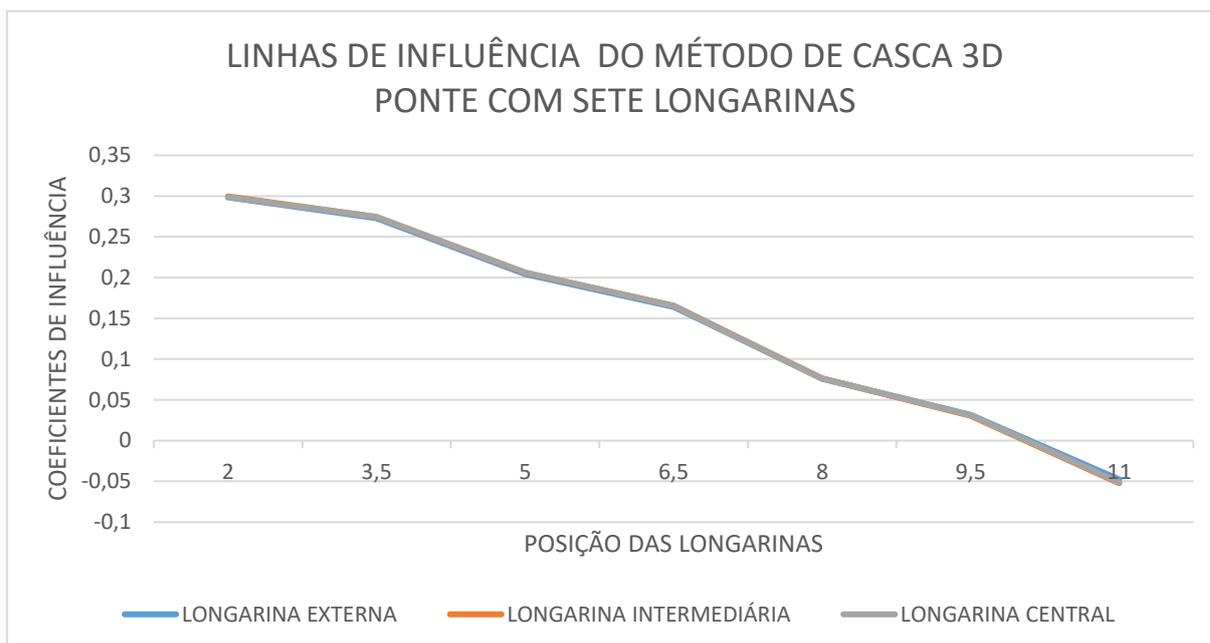
Fonte: Autor (2016)

Na tabela 5.29 e figura 5.37 encontram-se os valores dos coeficientes de repartição nos pontos 2,0; 3,5; 5,0; 6,5; 8,0; 9,5 e 11,0; em metros, para as longarinas extrema, intermediária e central, respectivamente, utilizando-se sete longarinas no tabuleiro.

Tabela 5.29 - Coeficientes de Repartição para a ponte com sete longarinas

Posição (m)	Coeficientes de Repartição Transversal Longarina Externa	Coeficientes de Repartição Transversal Longarina Intermediária	Coeficientes de Repartição Transversal Longarina Central
2.0	0,298413	0,299564	0,298774
3.5	0,273016	0,27451	0,274247
5.0	0,204233	0,205882	0,206243
6.5	0,164021	0,165577	0,164994
8.0	0,07619	0,076253	0,075808
9.5	0,031746	0,030501	0,031215
11.0	-0,04762	-0,05229	-0,05128

Figura 5.37 - Linhas de Influência do Método de Casca 3D para a ponte com sete longarinas



Fonte: Autor (2016)

A figura 5.38 mostra o resultado do momento fletor ao longo da longarina externa, para o caso de utilização de oito longarinas.

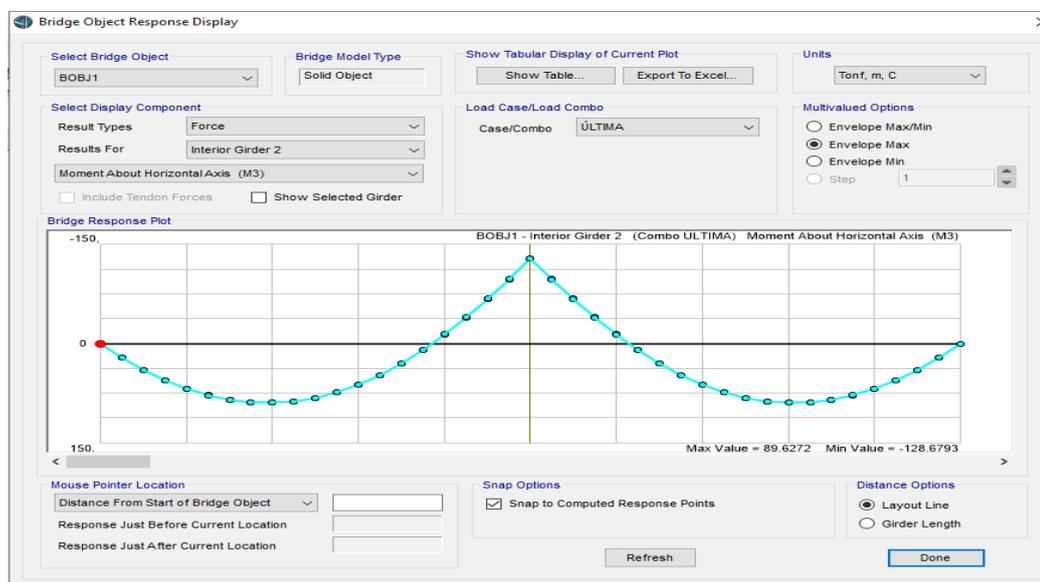
Figura 5.38 - Momento Fletor ao longo da longarina externa



Fonte: Autor (2016)

A figura 5.39, abaixo, mostra o resultado do momento fletor ao longo da longarina intermediária.

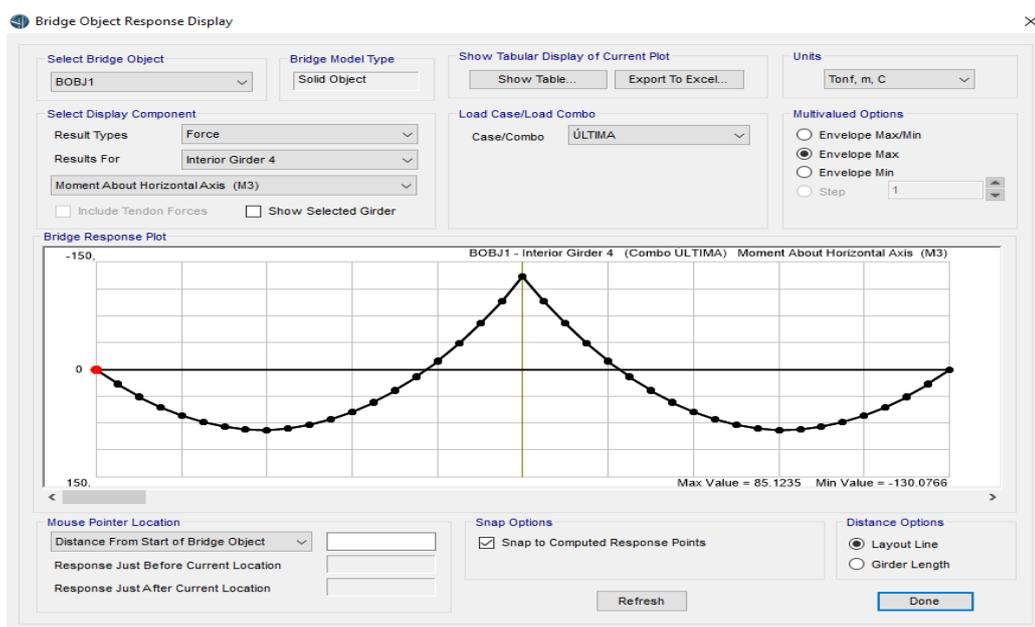
Figura 5.39 - Momento Fletor ao longo da longarina intermediária



Fonte: Autor (2016)

A figura 5.40 mostra o resultado do momento fletor ao longo da longarina central, para o caso de utilização de oito longarinas.

Figura 5.40 - Momento Fletor ao longo da longarina central



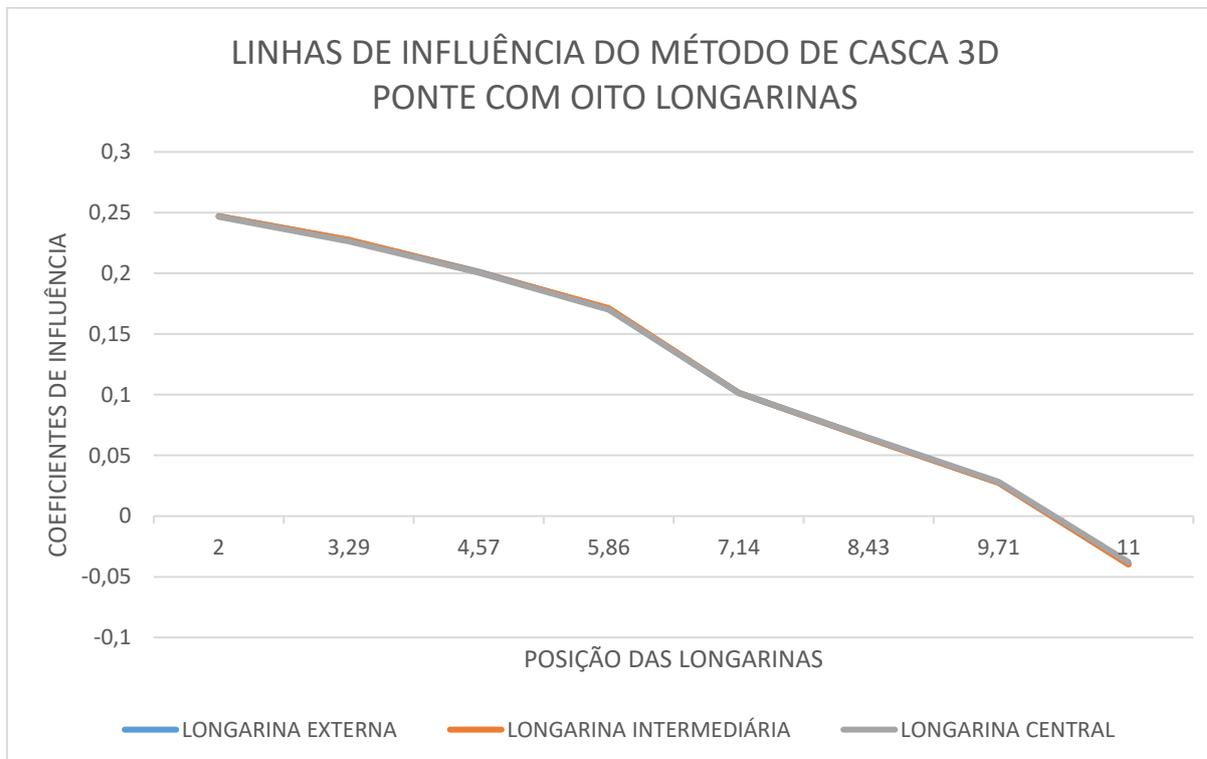
Fonte: Autor (2016)

Na tabela 5.30 e figura 5.41 encontram-se os valores dos coeficientes de repartição nos pontos 2,0; 3,29; 4,57; 5,86; 7,14; 8,43; 9,71 e 11,0; em metros, para as longarinas extrema, intermediária e central, respectivamente, utilizando-se oito longarinas no tabuleiro.

Tabela 5.30 - Coeficientes de Repartição para a ponte com oito longarinas

Posição (m)	Coeficientes de Repartição Transversal Longarina Externa	Coeficientes de Repartição Transversal Longarina Intermediária	Coeficientes de Repartição Transversal Longarina Central
2.0	0,24714	0,247068	0,246575
3.29	0,227307	0,227522	0,22643
4.57	0,201373	0,200938	0,200645
5.86	0,170862	0,171228	0,170024
7.14	0,101449	0,101642	0,101531
8.43	0,064073	0,064113	0,064464
9.71	0,02746	0,027365	0,028203
11.0	-0,03966	-0,03987	-0,03787

Figura 5.41- Linhas de Influência do Método de Casca 3D para a ponte com oito longarinas



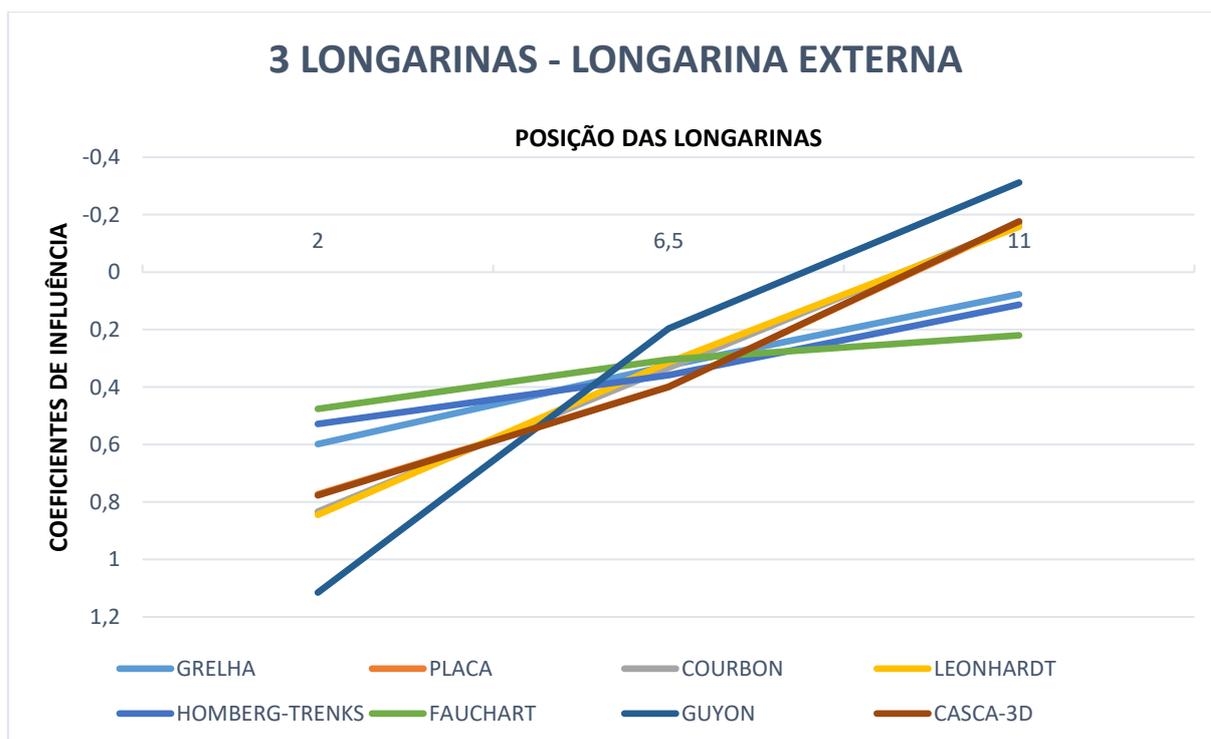
Fonte: Autor (2016)

5.3 Comparação dos resultados entre os métodos usados

5.3.1 Modelo com três longarinas

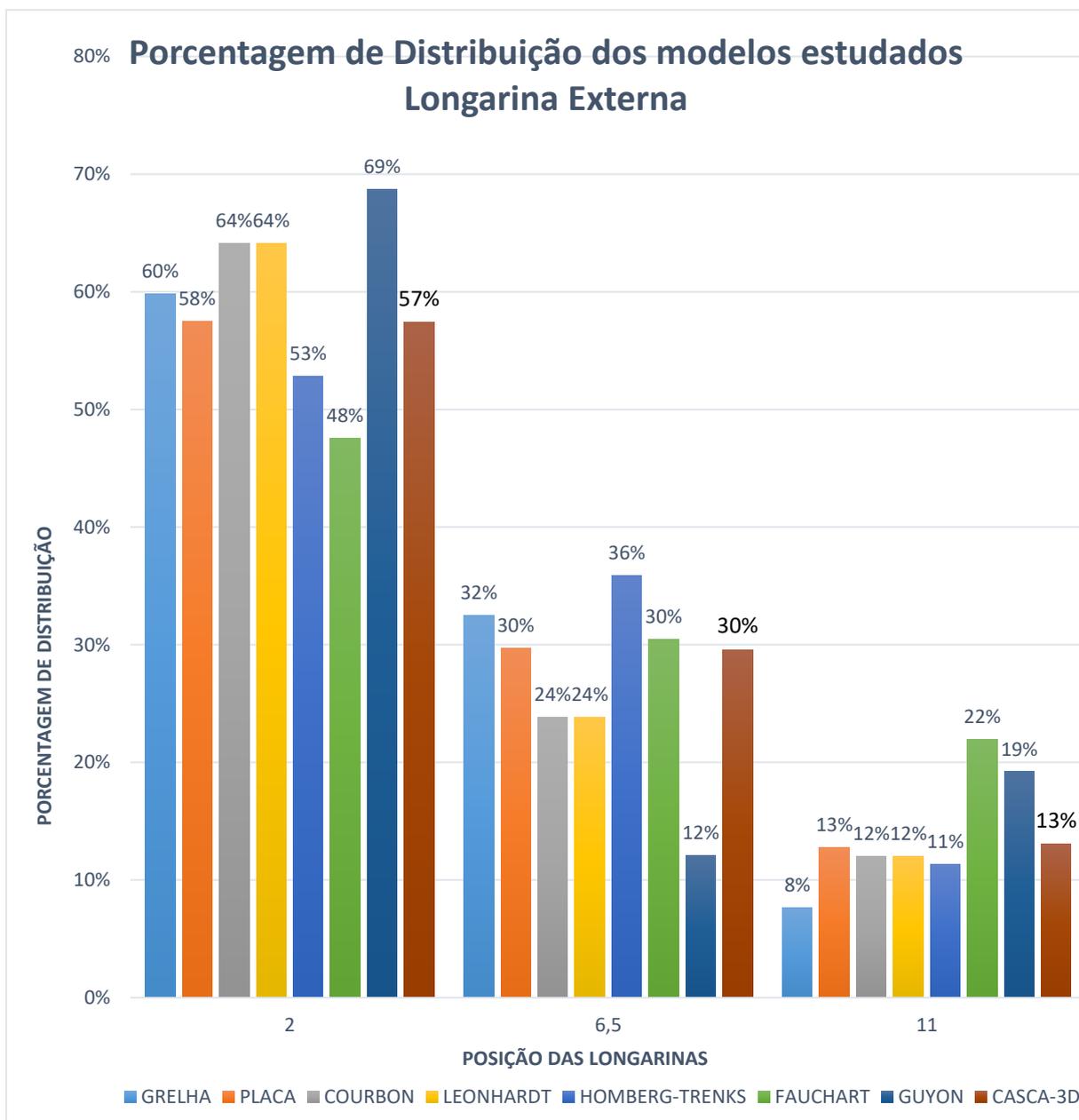
Comparando-se os modelos, através dos gráficos de percentuais mostrados a seguir, analisando os pontos mais extremos, 2,0 m e 11,0 m; e o central, 6,5 m, de cada longarina, constata-se que para as longarinas externas, os métodos analíticos de Engesser-Courbon e de Leonhardt apresentam percentuais de distribuição próximos nos três pontos analisados na longarina. Isso se comprova, pois, esses dois métodos não consideram a rigidez a torção no desenvolvimento do modelo, o que leva à ausência de distribuição de momentos fletores na forma de torção nas transversinas.

Figura 5.42 - Coeficientes de influência para a longarina externa



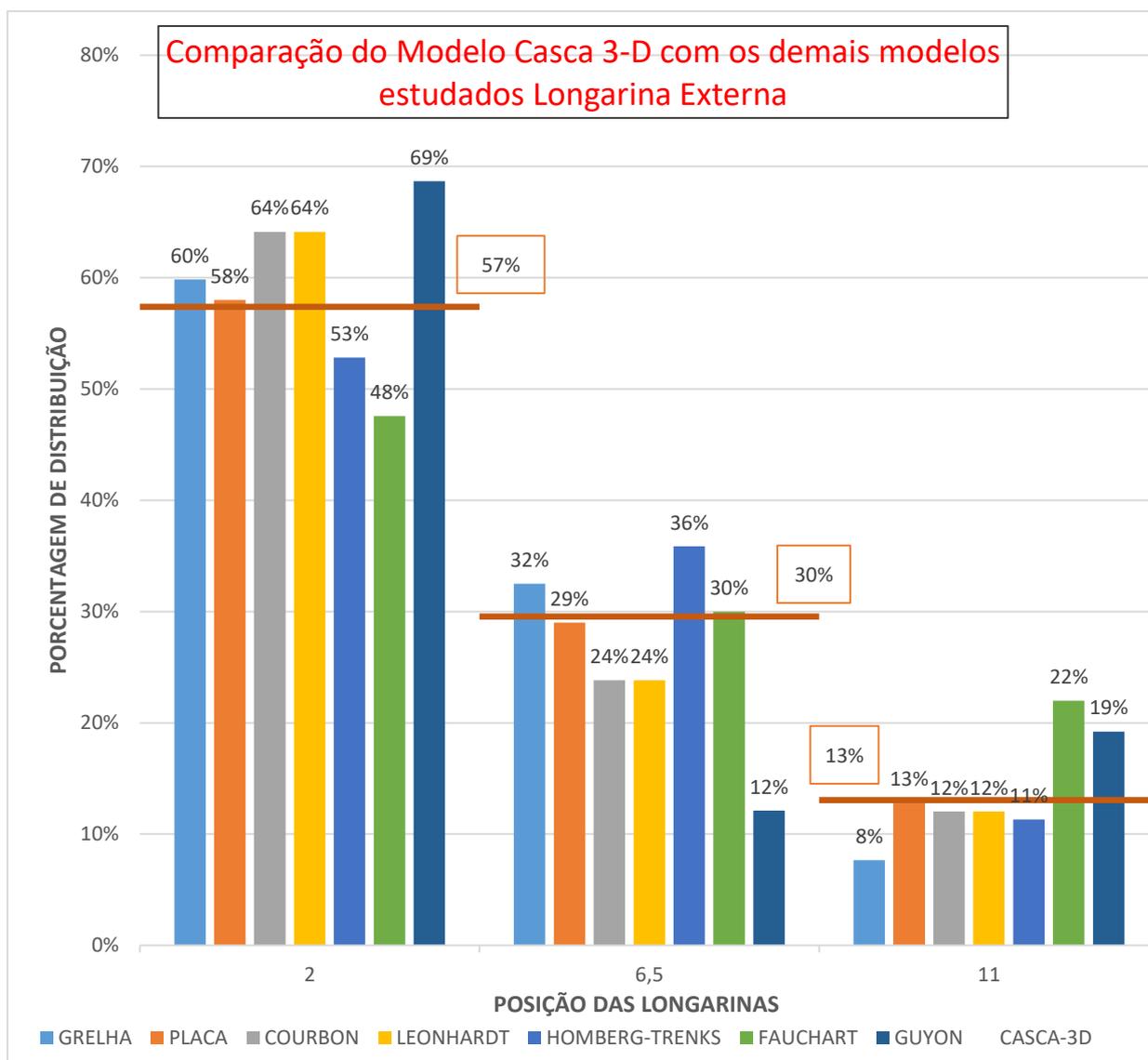
Fonte: Autor (2016)

Figura 5.43 - Porcentagem de distribuição dos modelos estudados - Longarina Externa



Fonte: Autor (2016)

Figura 5.44 - Comparação do Modelo Casca 3D (AASHTO LRFD 2014) com os demais modelos estudados - Longarina Externa

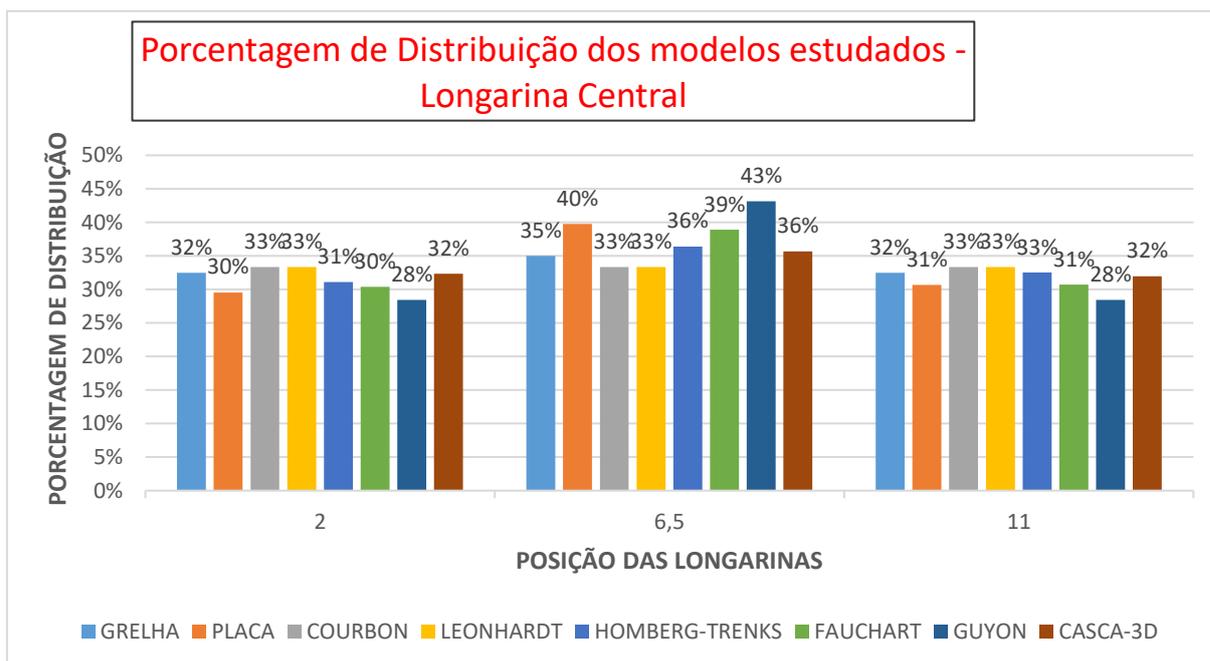


Fonte: Autor (2016)

De maneira análoga, os modelos computacionais forneceram resultados relativamente próximos, com diferença entre percentuais de distribuição de 3%, devido à consideração da rigidez à flexão e torção do conjunto e a configuração de apoios móveis sob base elástica. Esta última configuração resultou numa diferença média de 12 % entre os resultados destes modelos com o método de Guyon-Massonet, tendo sido este modelo analítico com maior distância de percentuais com relação ao modelo da AASHTO LRF 2014 (Casca 3D).

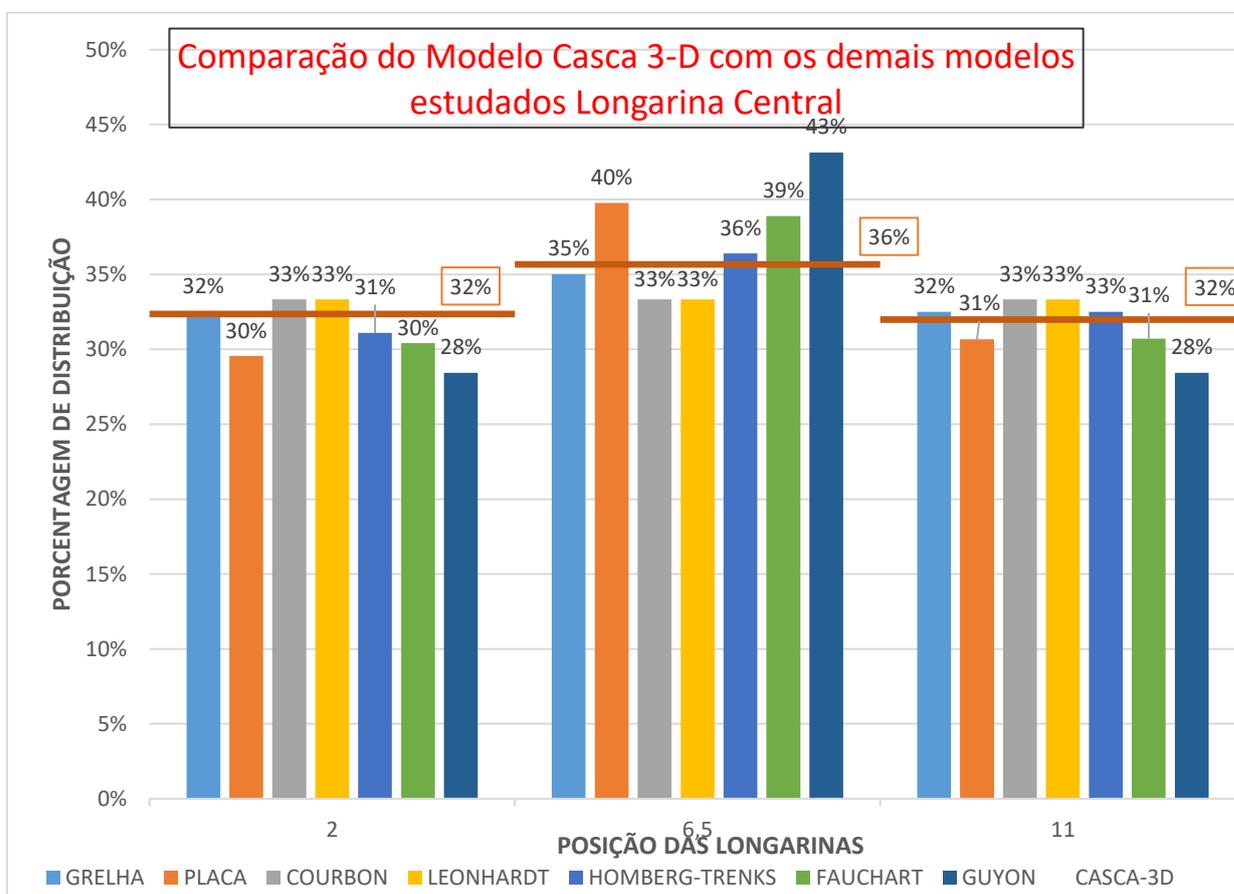
O Processo de Fauchart, apesar de seguir a mesma configuração de resultado, com boa distribuição, não apresenta boa distribuição nas longarinas de extremidade,

Figura 5.46 - Percentual de distribuição dos modelos estudados - Longarina Central



Fonte: Autor (2016)

Figura 5.47-Comparação do Modelo Casca 3D (AASHTO LRFD 2014) com os demais modelos estudados - Longarina Central

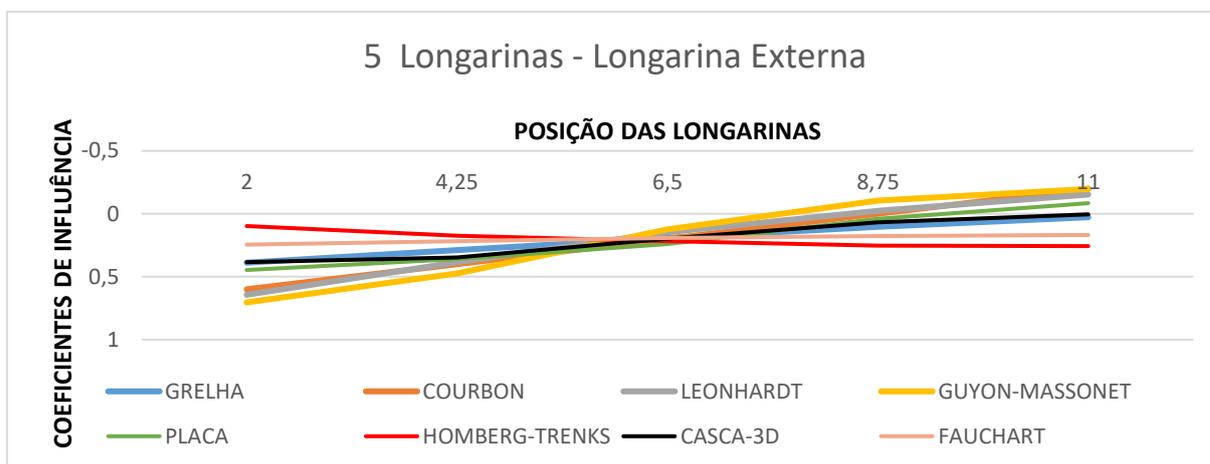


Fonte: Autor (2016)

5.3.2 Modelo com cinco longarinas

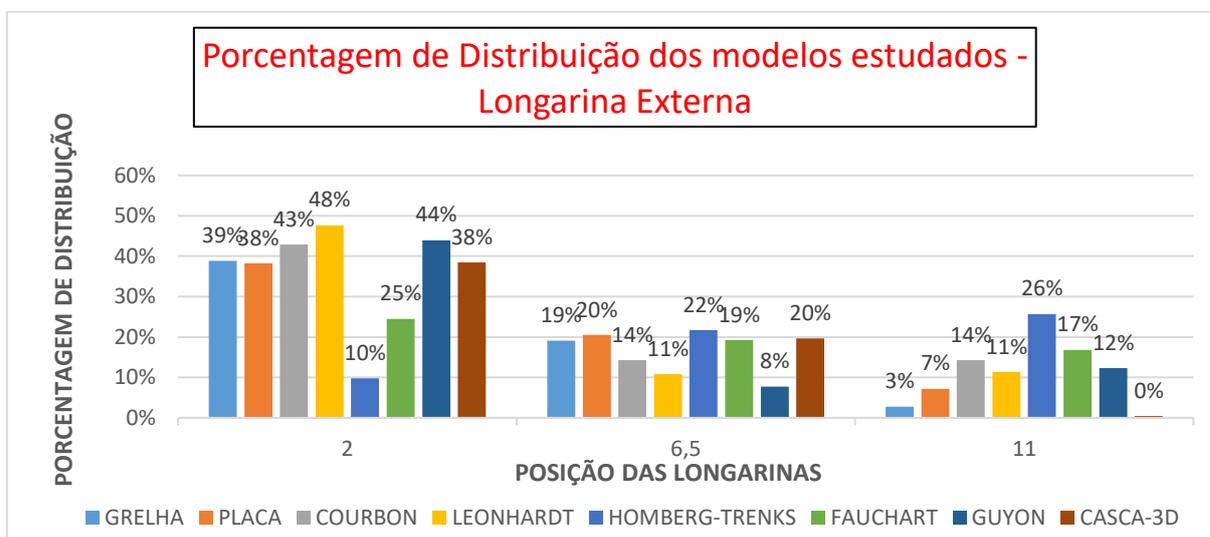
Alguns dos resultados já discutidos para o caso e 3 longarinas se repetiram quando se estudou a ponte com 5 longarinas. Observou-se entre os modelos estudados a semelhança de resultados dos métodos de Engesser-Engesser-Courbon e Leonhardt para a longarina externa e que vai se alterando para as demais. Entretanto, no caso do modelo com 5 longarinas, verificou-se que os resultados encontrados no modelo de placa desenvolvido apresentaram valores mais próximos do modelo de grelha (variação máxima em torno de 2%), uma vez que com uma quantidade maior de longarinas o tabuleiro representado vai se tornando mais contínuo.

Figura 5.48 - Coeficientes de influência para as longarinas extremas



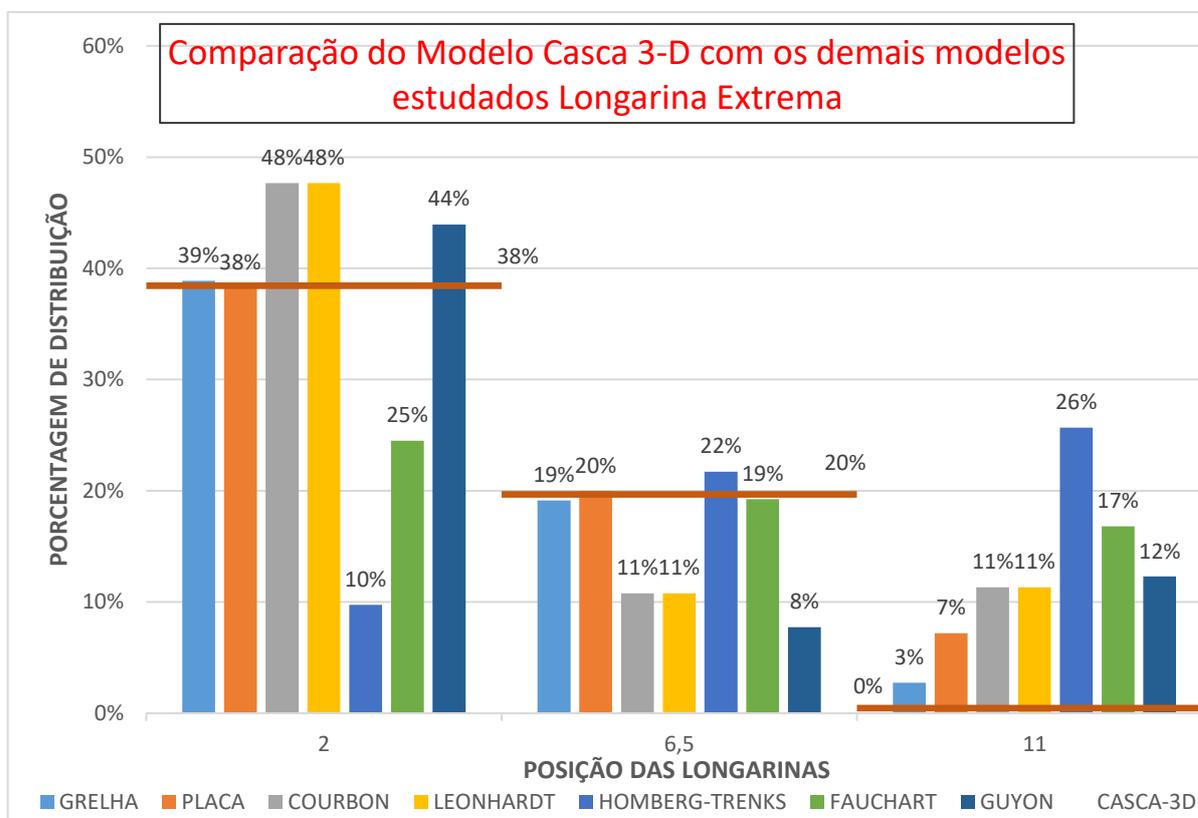
Fonte: Autor (2016)

Figura 5.49 - Porcentagem de Distribuição dos modelos estudados - Longarina Externa



Fonte: Autor (2016)

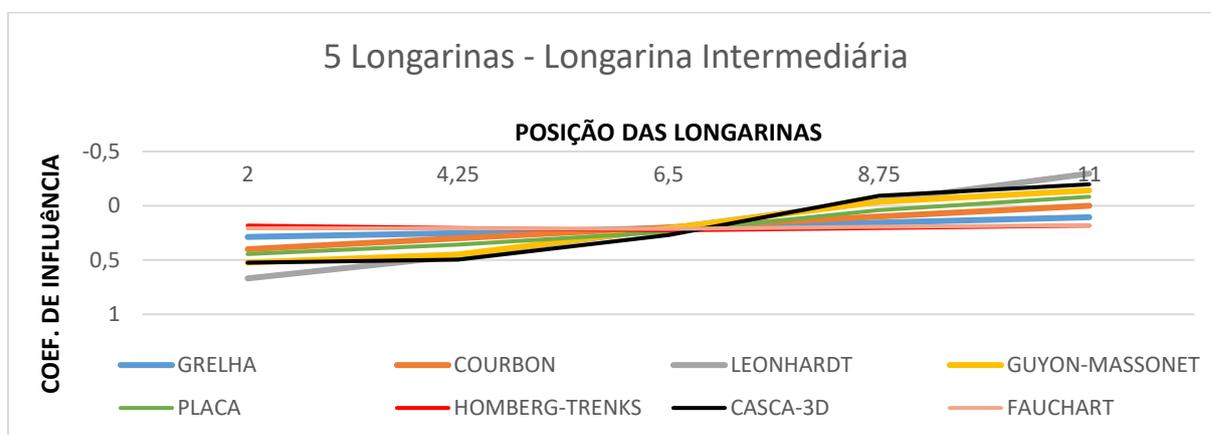
Figura 5.50-Comparação do Modelo Casca 3D (AASHTO LRFD 2014) com os demais modelos estudados - Longarina Externa



Fonte: Autor (2016)

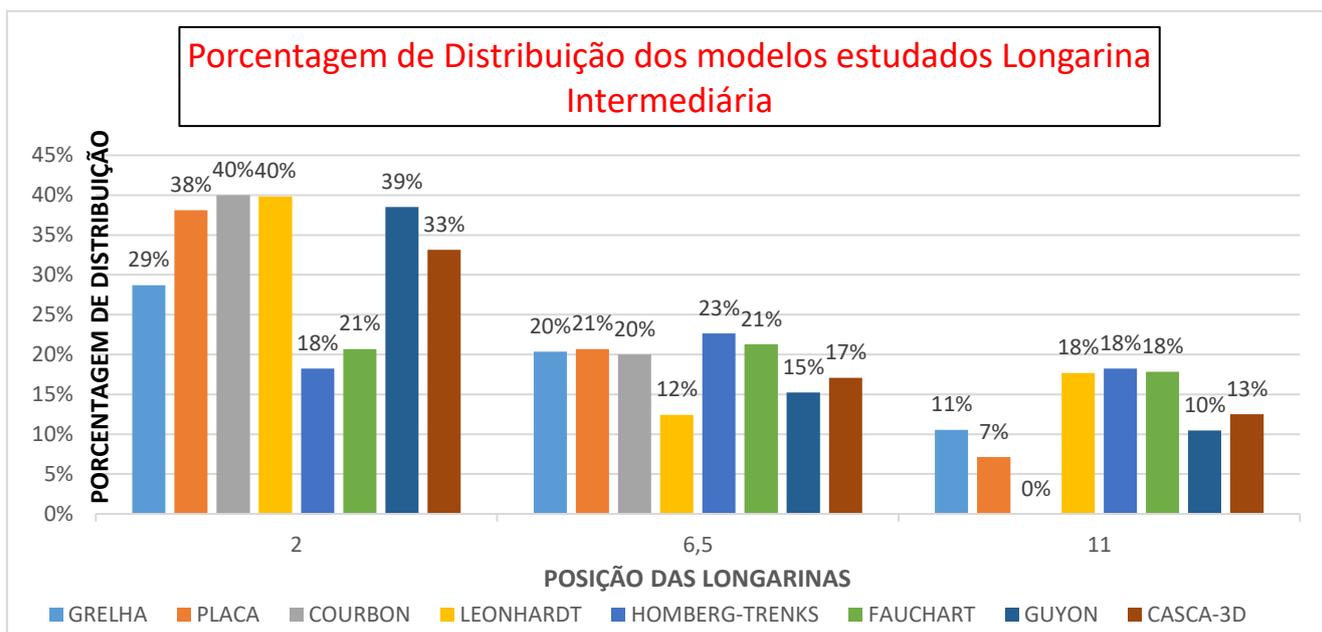
O método de Homberg-Trenks apresentou maior diferença de distribuição em relação aos demais, no caso da longarina extrema, devido, provavelmente, ao aumento de duas longarinas, com elevada rigidez à torção, e utilização de transversinas com rigidez à flexão baixa.

Figura 5.51 - Coeficientes de influência para as longarinas intermediárias



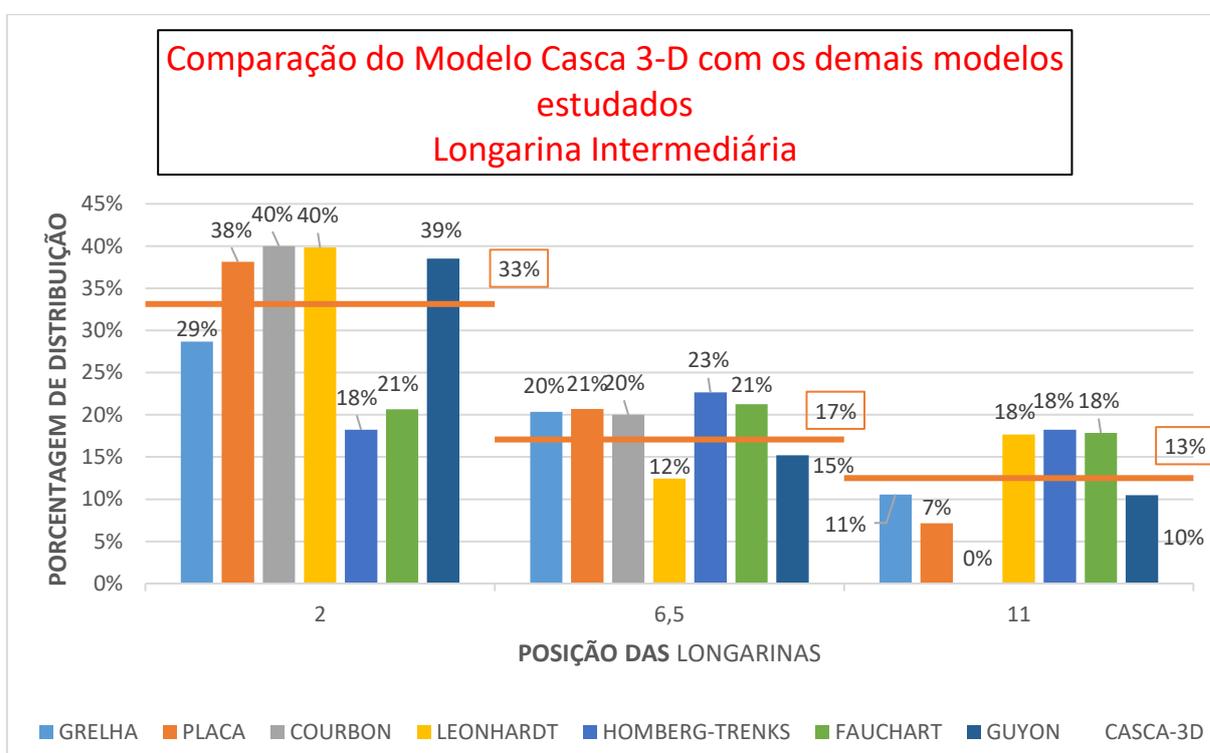
Fonte: Autor (2016)

Figura 5.52 - Porcentagem de Distribuição dos modelos estudados - Longarina Intermediária



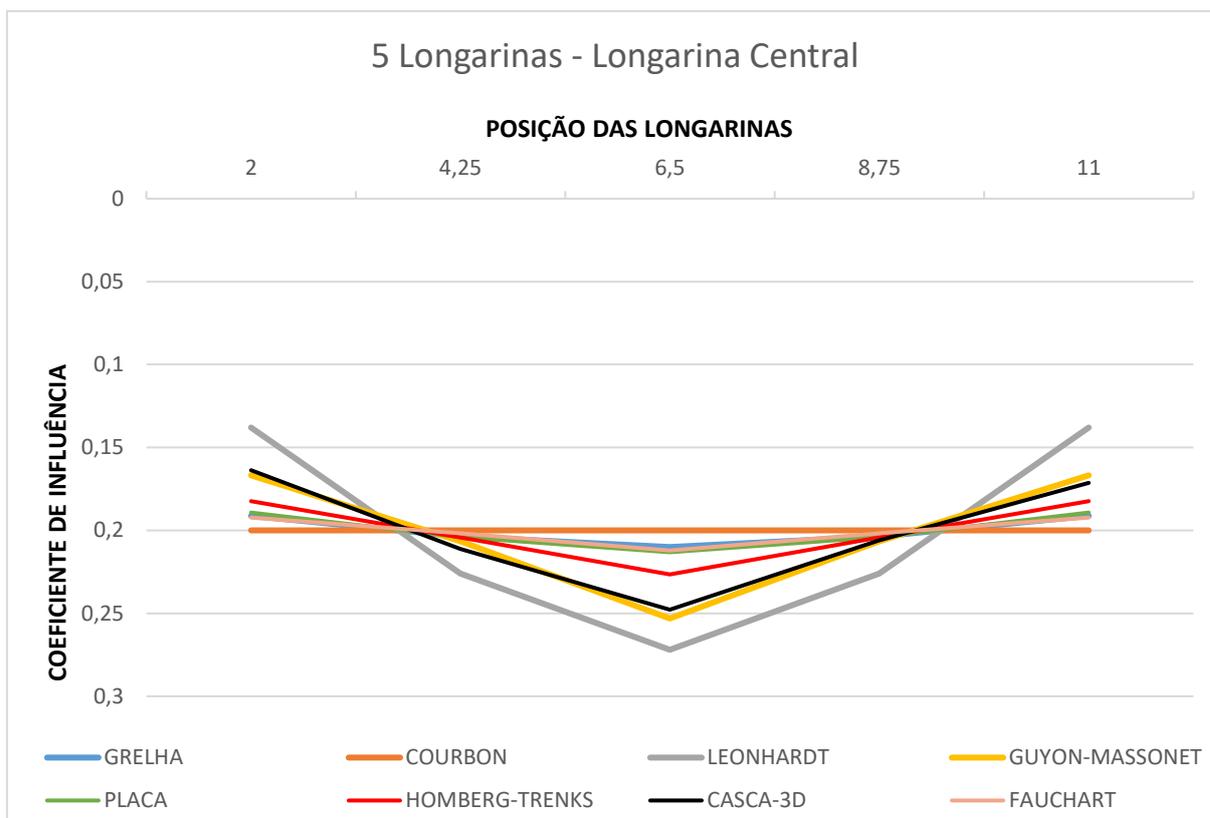
Fonte: Autor (2016)

Figura 5.53 - Comparação do Modelo Casca 3D (AASHTO LRFD 2014) com os demais modelos estudados Longarina Intermediária



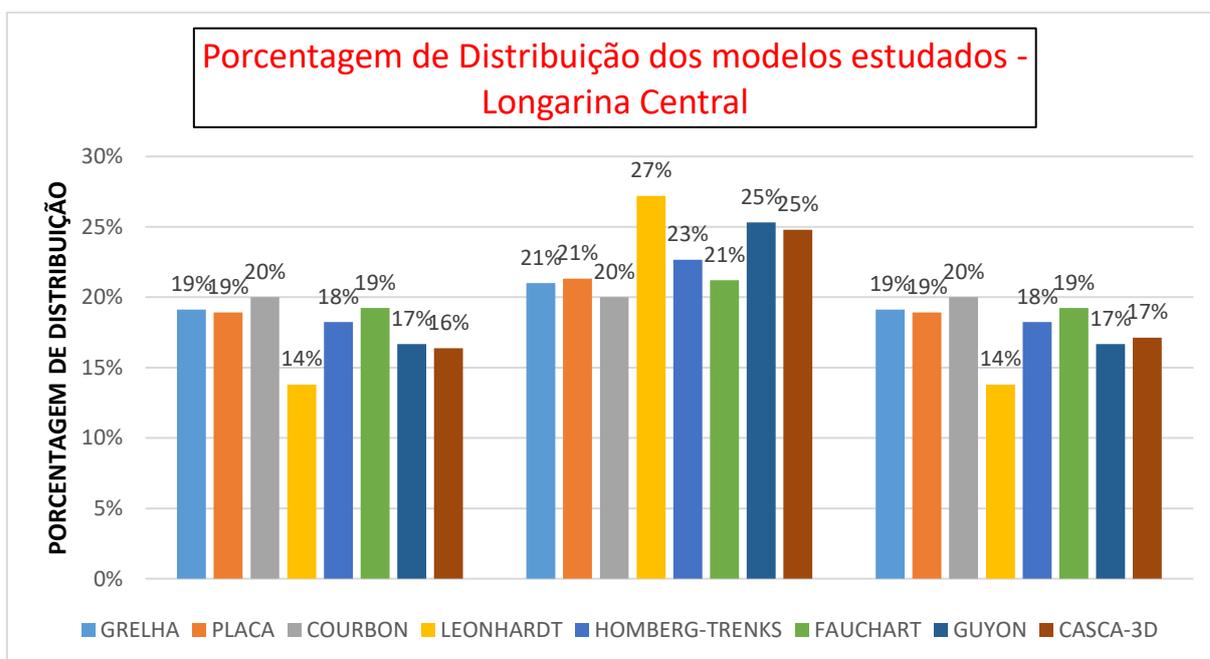
Fonte: Autor (2016)

Figura 5.54 - Coeficientes de influência para a longarina central



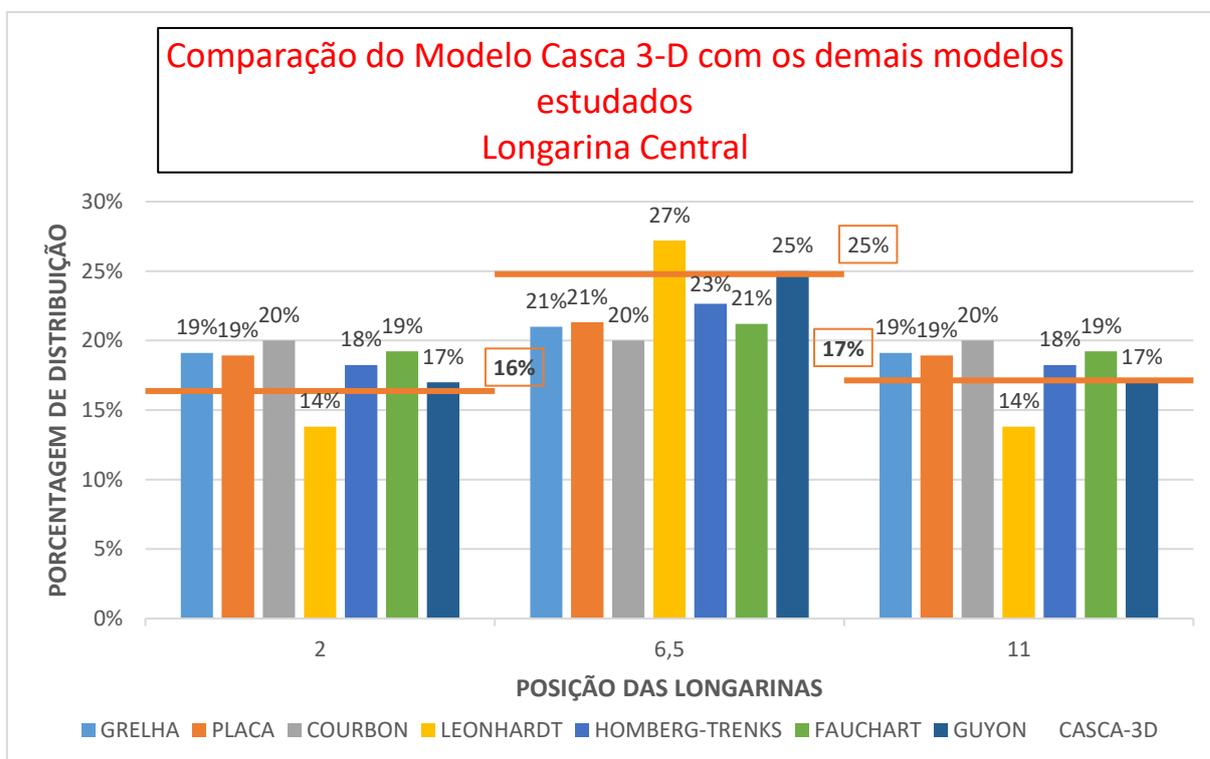
Fonte: Autor (2016)

Figura 5.55 - Porcentagem de Distribuição dos modelos estudados - Longarina Central



Fonte: Autor (2016)

Figura 5.56-Comparação do Modelo Casca 3D (AASHTO LRFD 2014) com os demais modelos estudados - Longarina Central



Fonte: Autor (2016)

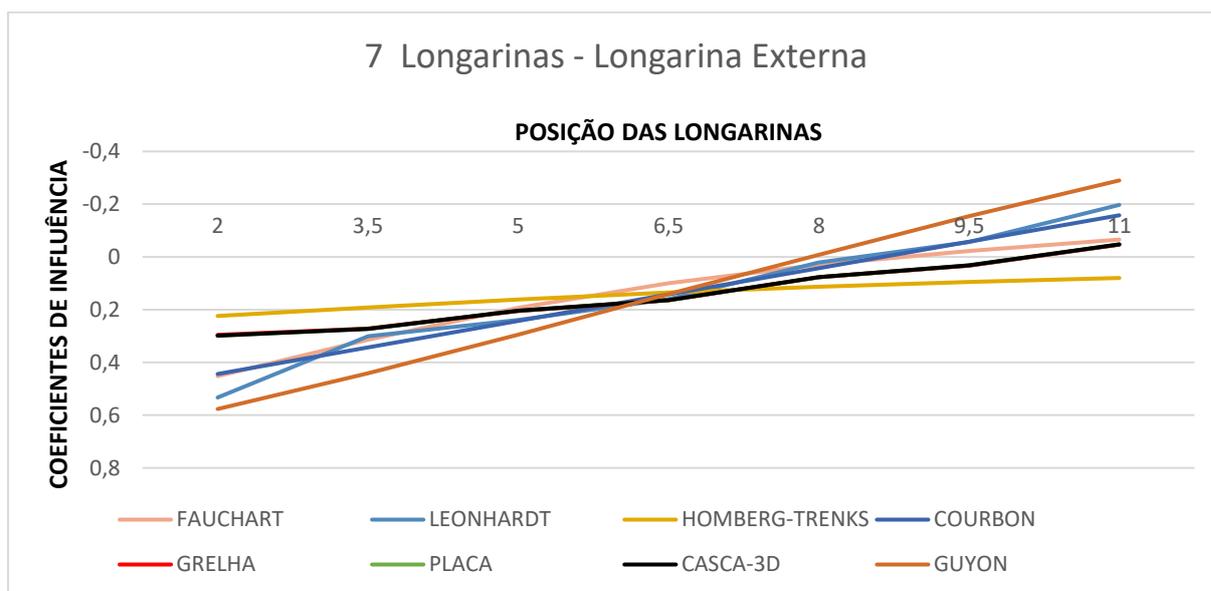
Notou-se que ao ser retirado o efeito de torção do método Homberg-Trenks houve um aumento de momentos solicitantes, remetendo a resultados bastante próximos aos do método de Leonhardt, principalmente nas longarinas mais externas, sendo explicado pelas premissas semelhantes que ambos os modelos possuem, diferindo, apenas, na consideração do efeito de torção.

Com a utilização de cinco longarinas, o método de Guyon-Massonet, apresentou uma melhor distribuição e mais próxima do modelo de Casca 3-D; já que à medida que se aumenta a quantidade de longarinas, a variação dos coeficientes de repartição se torna mais sutil, porém mais próximos para os que levam em consideração efeitos de torção e flexão do conjunto.

5.3.3 Modelo com sete longarinas

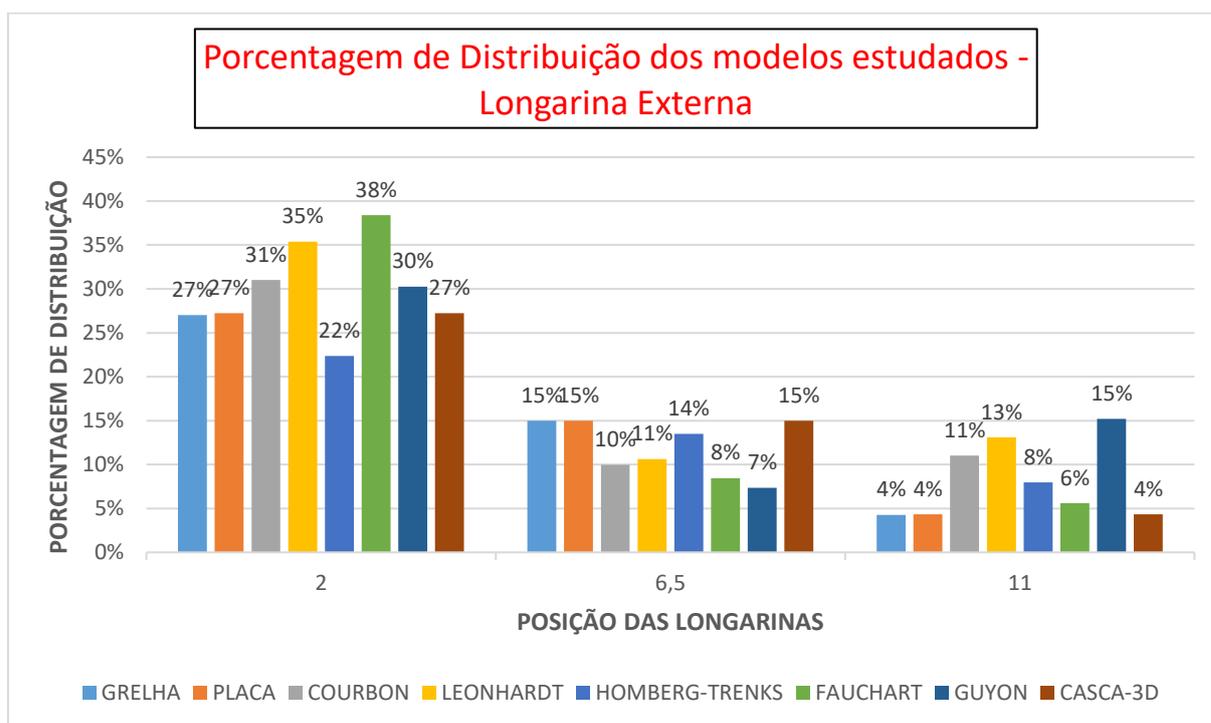
Para o caso da utilização de sete longarinas, observou-se uma aproximação dos resultados encontrados entre os métodos de Engesser-Courbon e Leonhardt e os modelos de Casca 3-D, Grelha e Placa.

Figura 5.57 - Coeficientes de influência para a longarina externa



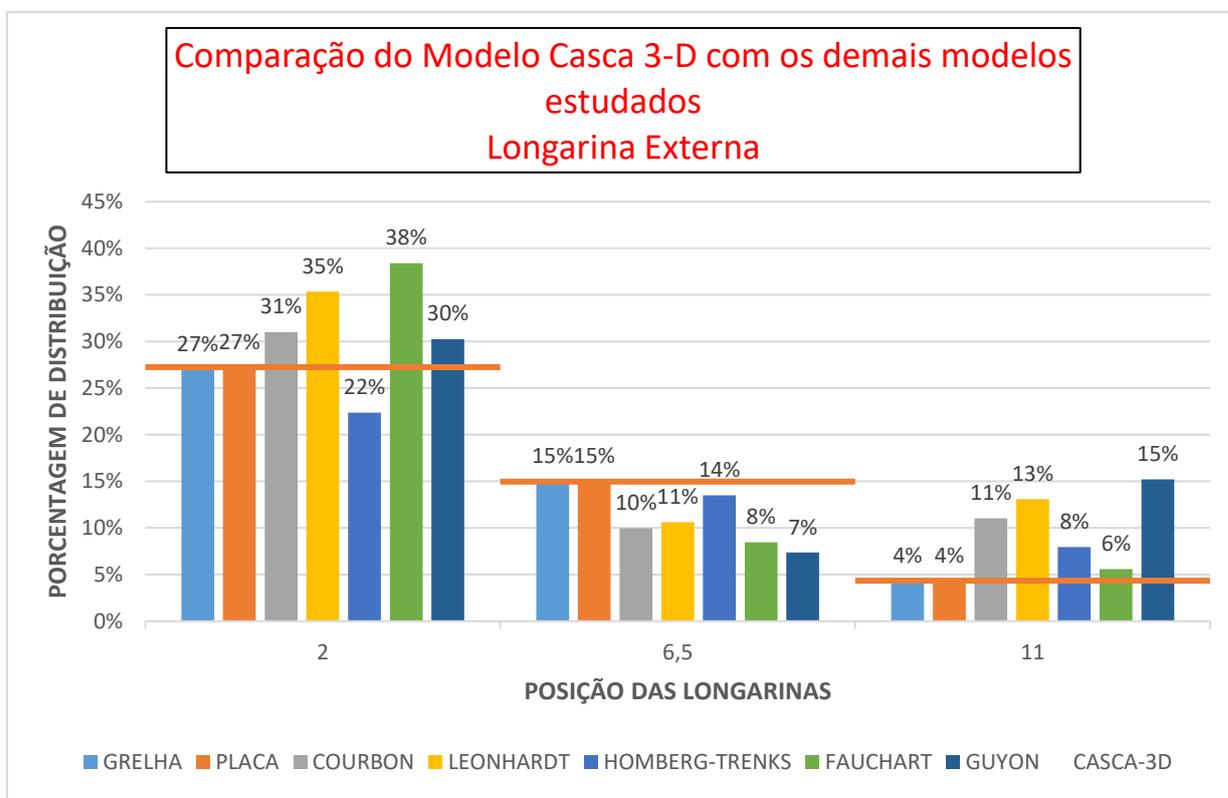
Fonte: Autor (2016)

Figura 5.58 - Porcentagem de Distribuição dos modelos estudados - Longarina Externa



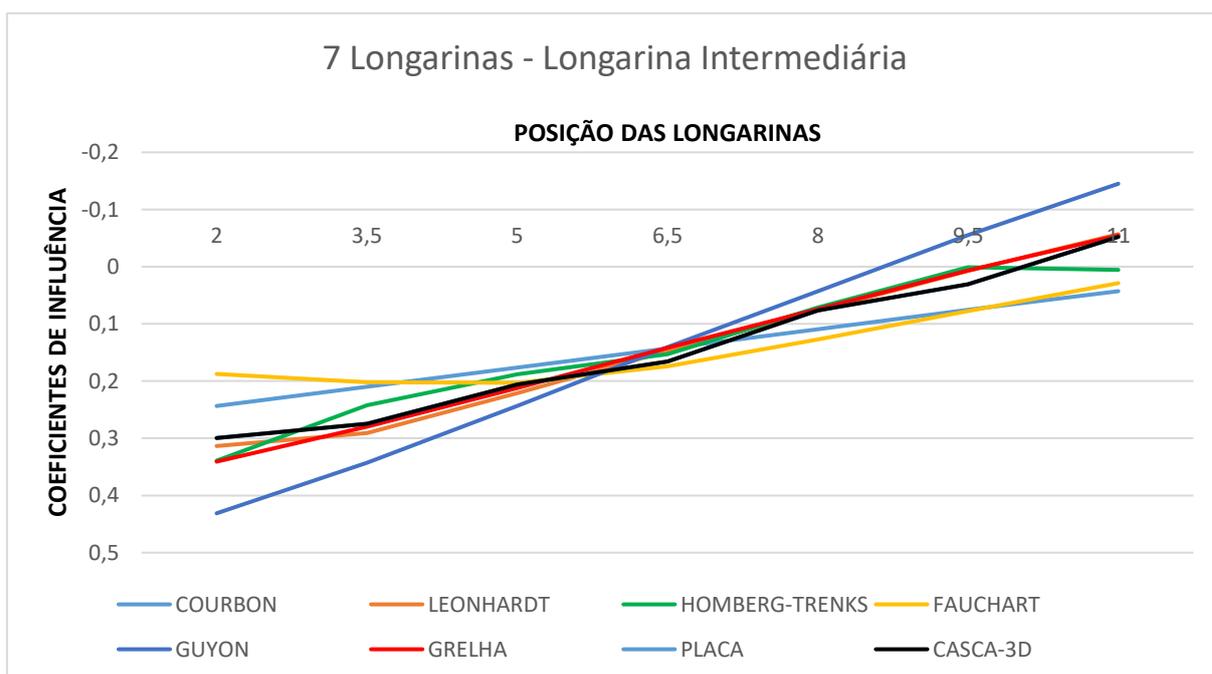
Fonte: Autor (2016)

Figura 5.59 - Comparação do Modelo Casca 3D (AASHTO LRFD 2014) com os demais modelos estudados - Longarina Externa



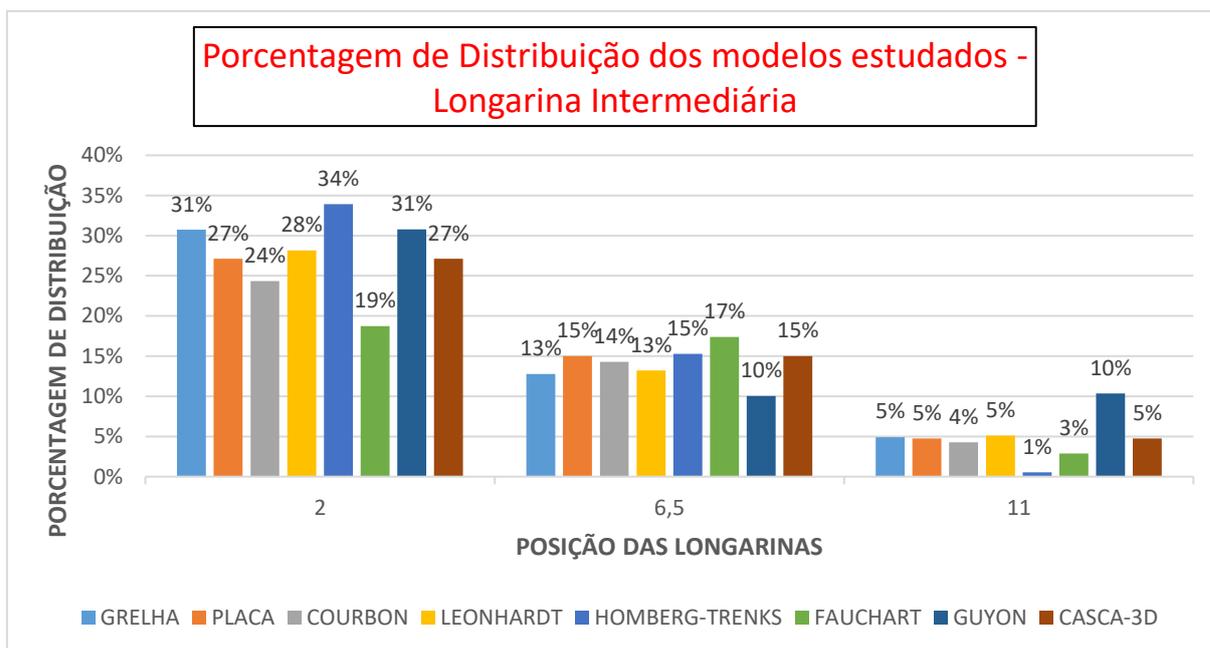
Fonte: Autor (2016)

Figura 5.60 - Coeficientes de influência para as longarinas intermediárias



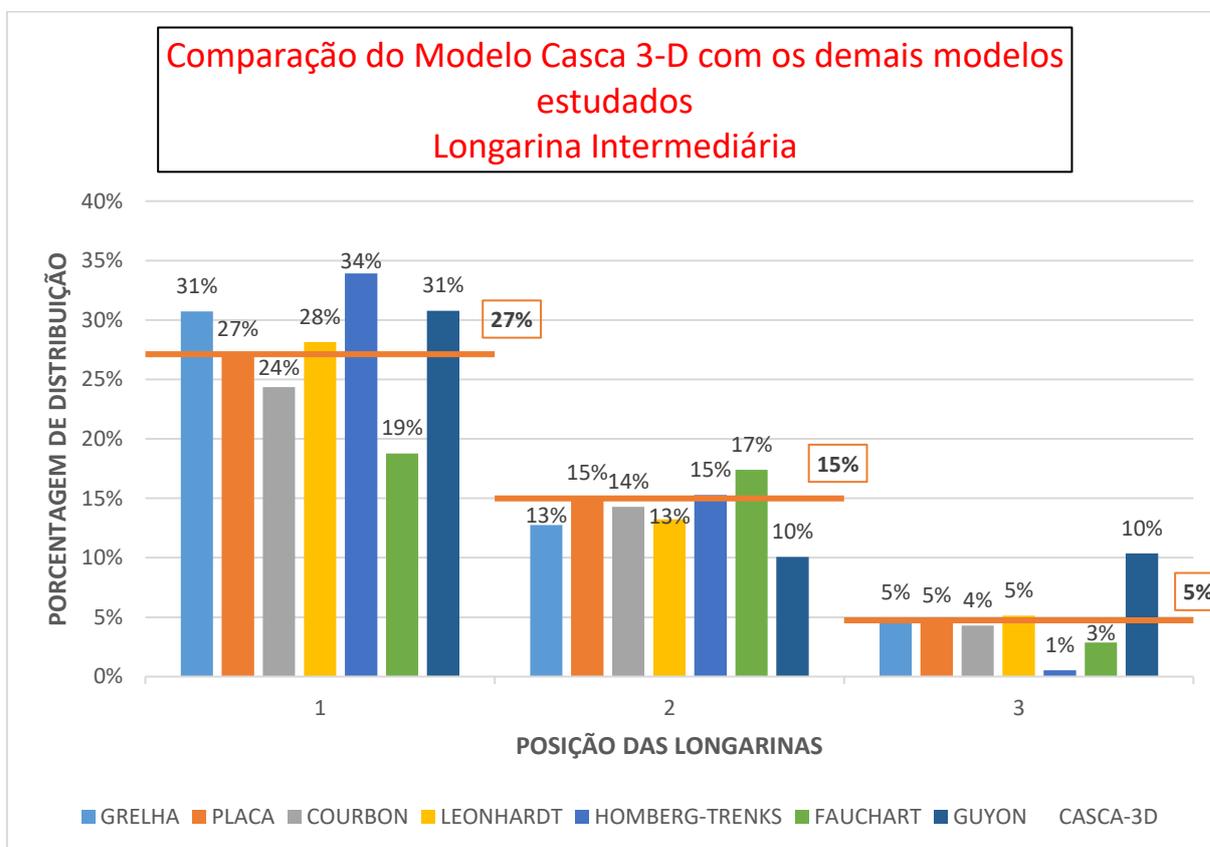
Fonte: Autor (2016)

Figura 5.61 - Porcentagem de Distribuição dos modelos estudados - Longarina Intermediária



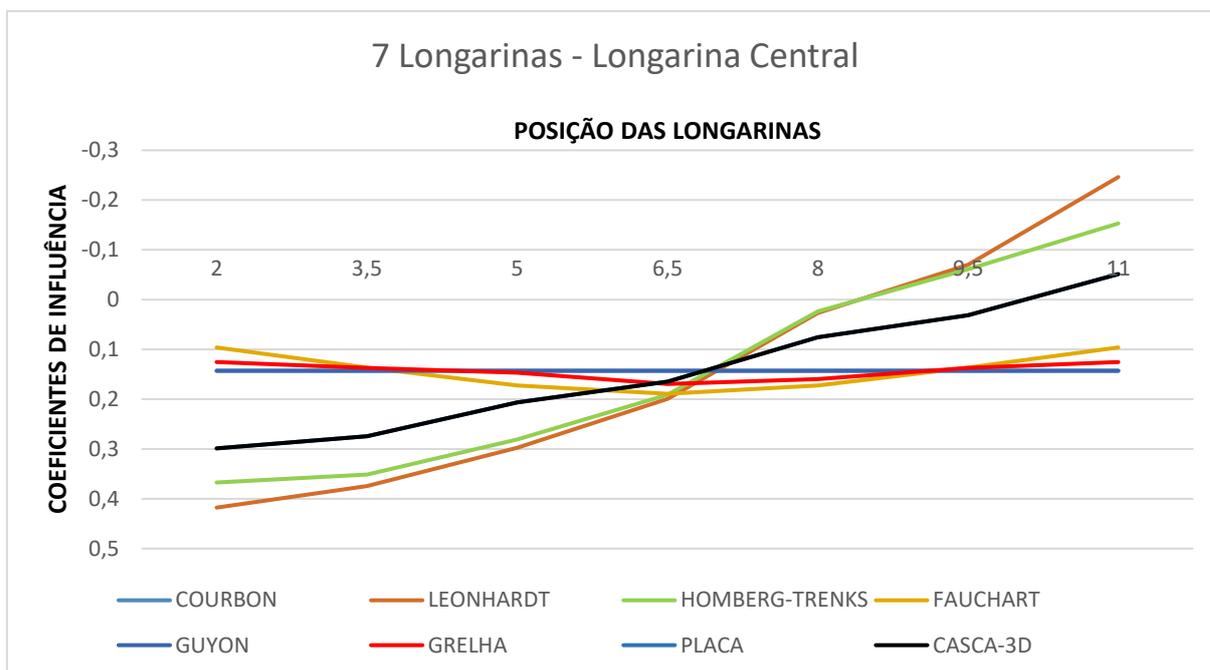
Fonte: Autor (2016)

Figura 5.62 - Comparação do Modelo Casca 3D (AASHTO LRFD 2014) com os demais modelos estudados - Longarina Intermediária



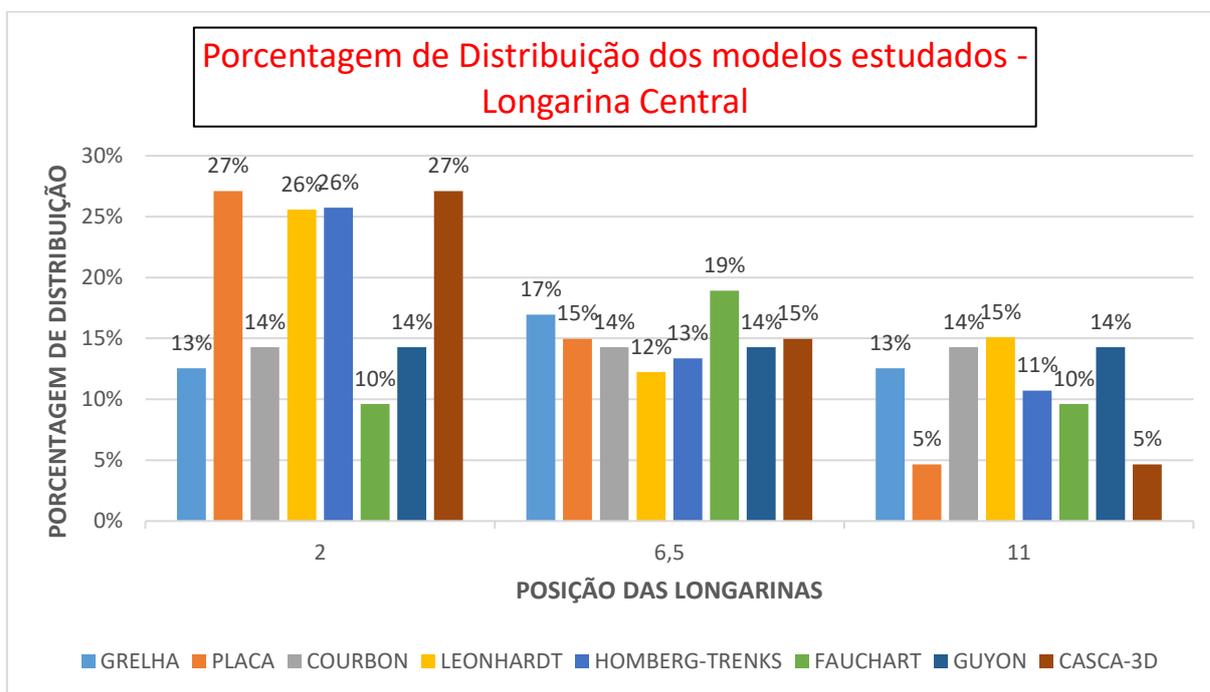
Fonte: Autor (2016)

Figura 5.63 - Coeficientes de influência para a longarina central



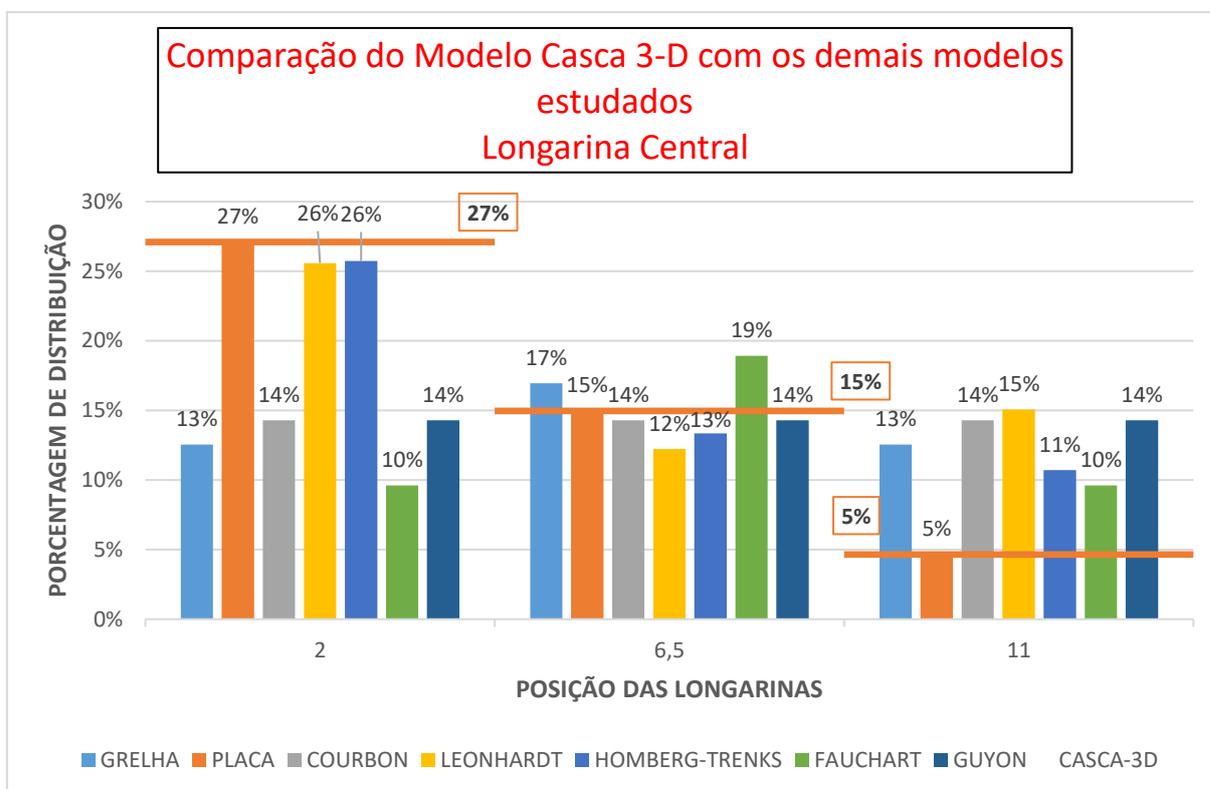
Fonte: Autor (2016)

Figura 5.64 - Porcentagem de Distribuição dos modelos estudados - Longarina Central



Fonte: Autor (2016)

Figura 5.65 - Comparação do Modelo Casca 3D (AASHTO LRFD 2014) com os demais modelos estudados- Longarina Central



Fonte: Autor (2016)

Da mesma forma, observa-se a proximidade dos resultados encontrados nos métodos de Homberg-Trenks e Leonhardt, e no modelo de Casca 3-D, na longarina central, porém ambos com a consideração do efeito de torção e flexão conjuntas.

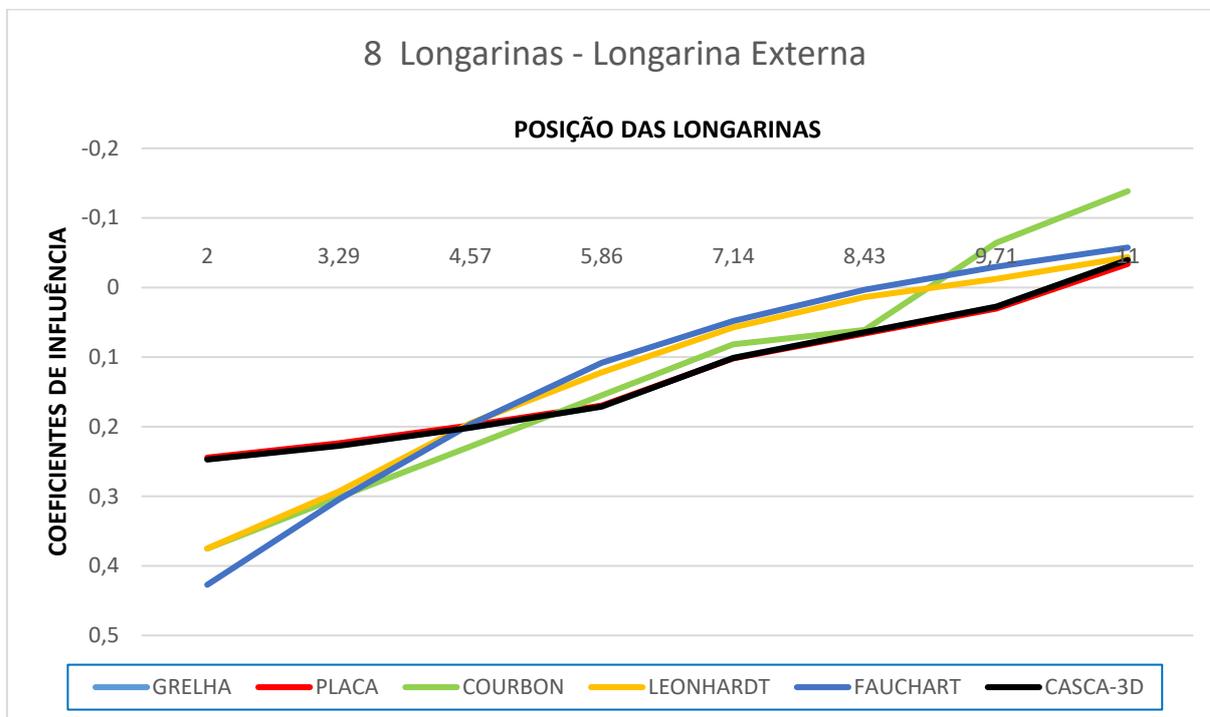
Na longarina central, para o caso em estudo, os modelos de Grelha, Courbon, Guyon-Massonet e Fauchart apresentam curvas de distribuição semelhantes e com mais tendência a uniformidade.

5.3.4 Modelo com oito longarinas

Para o caso da utilização de oito longarinas, não foram utilizados os modelos de Guyon-Massonet e Homberg-Trenks pelo fato de não serem encontrados na literatura valores tabelados que serviriam de subsídios para obtenção da distribuição de carregamentos nessa ponte. Na figura 5.66 tem-se os resultados dos coeficientes

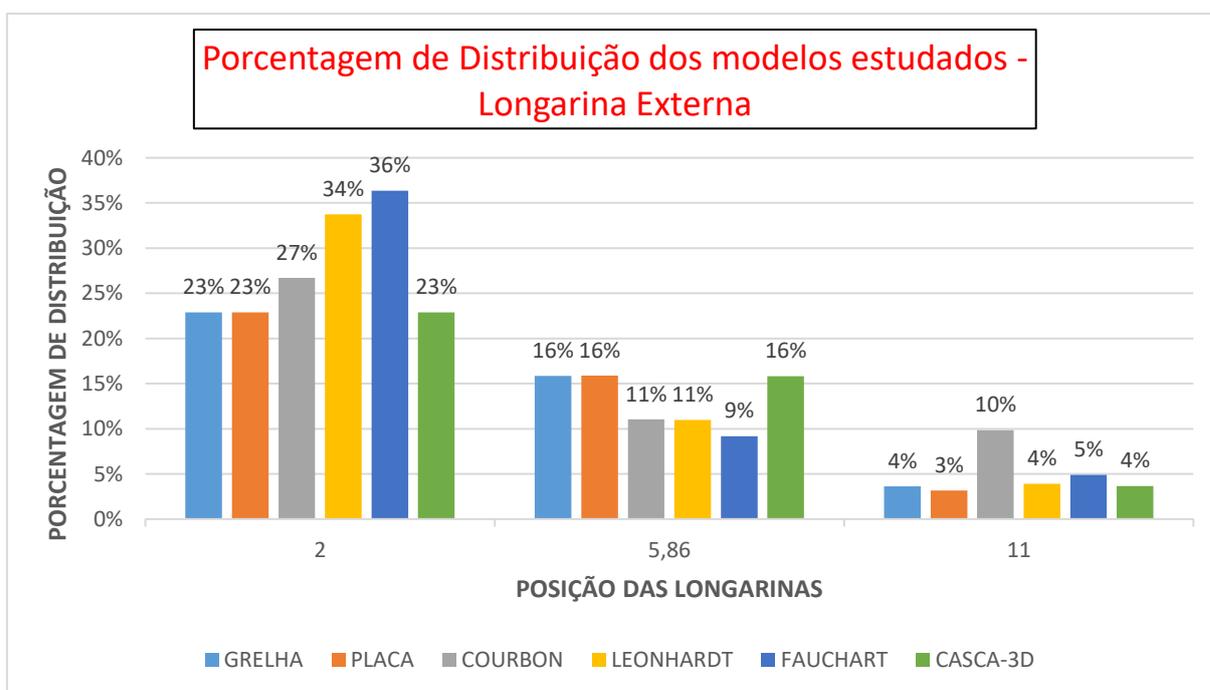
de repartição para a longarina externa, com a utilização de 8 longarinas na ponte pelos demais métodos e modelos estudados.

Figura 5.66 - Coeficientes de influência para a longarina externa



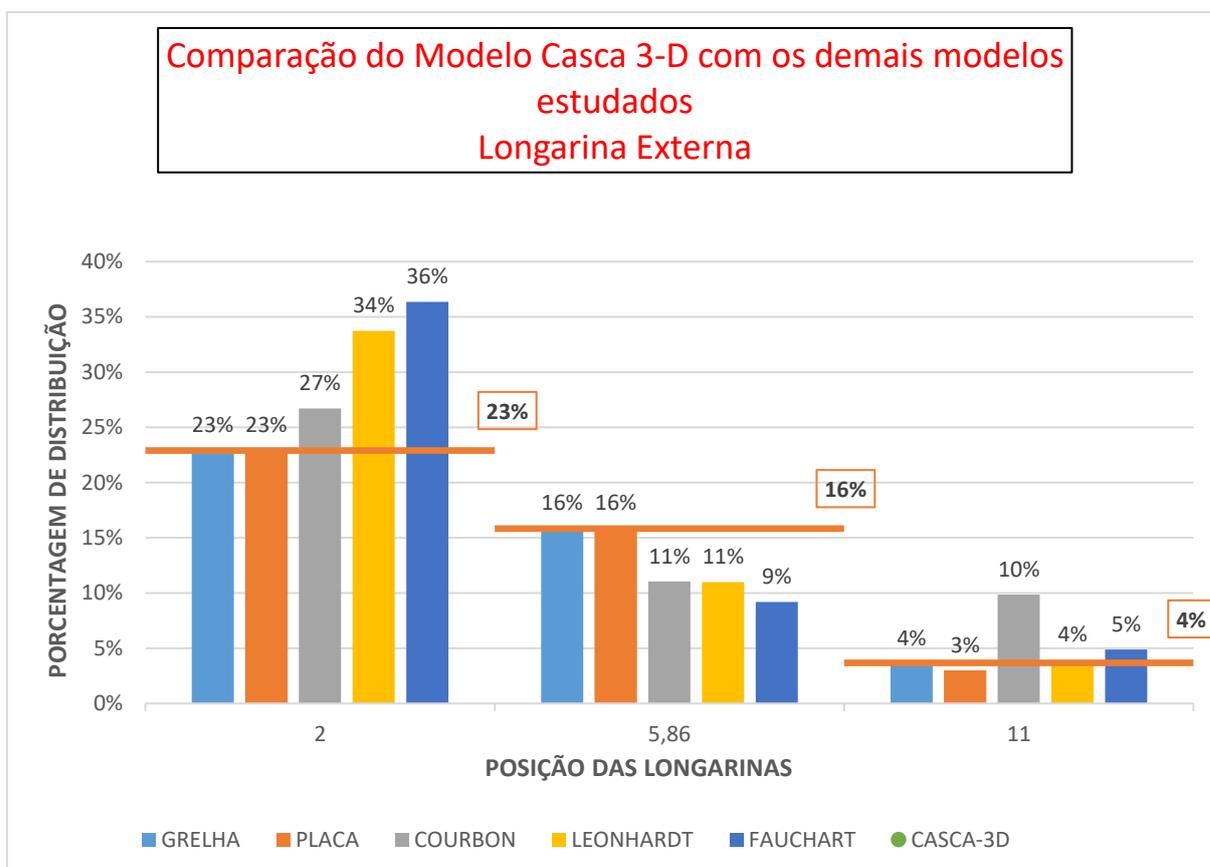
Fonte: Autor (2016)

Figura 5.67 - Porcentagem de Distribuição dos modelos estudados - Longarina Externa



Fonte: Autor (2016)

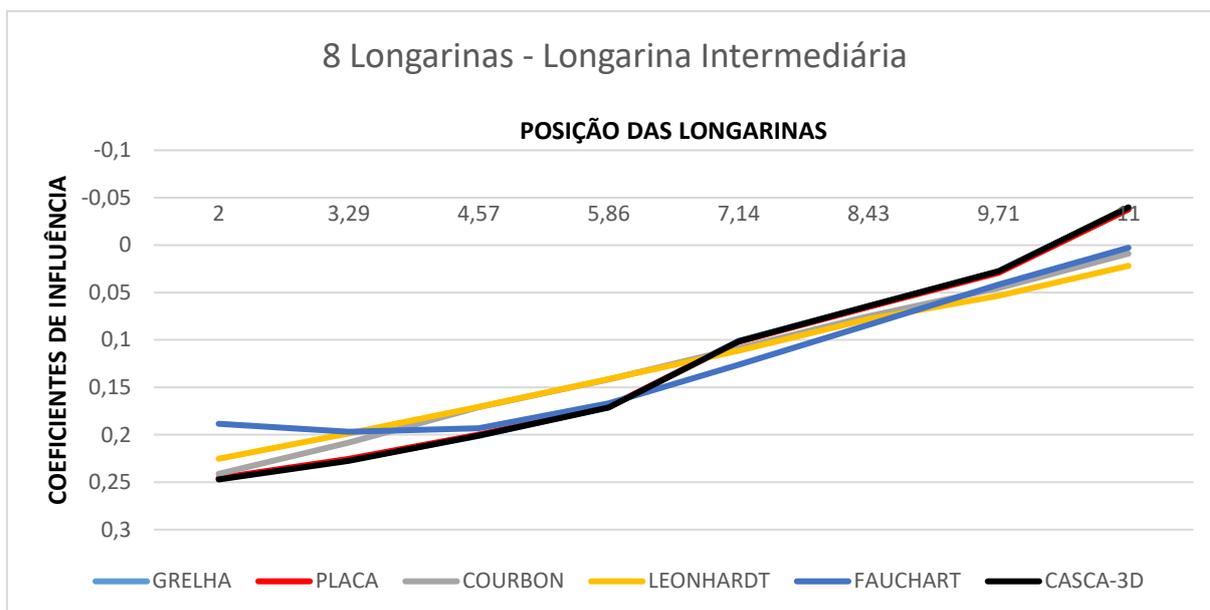
Figura 5.68 - Comparação do Modelo Casca 3D (AASHTO LRFD 2014) com os demais modelos estudados - Longarina Externa



Nota-se uma proximidade nos resultados encontrados entre os métodos Grelha, Placa e Casa, com variação máxima de 1%; e entre os métodos analíticos utilizados para a ponte em estudo, com oito longarinas, com variação máxima de 7%.

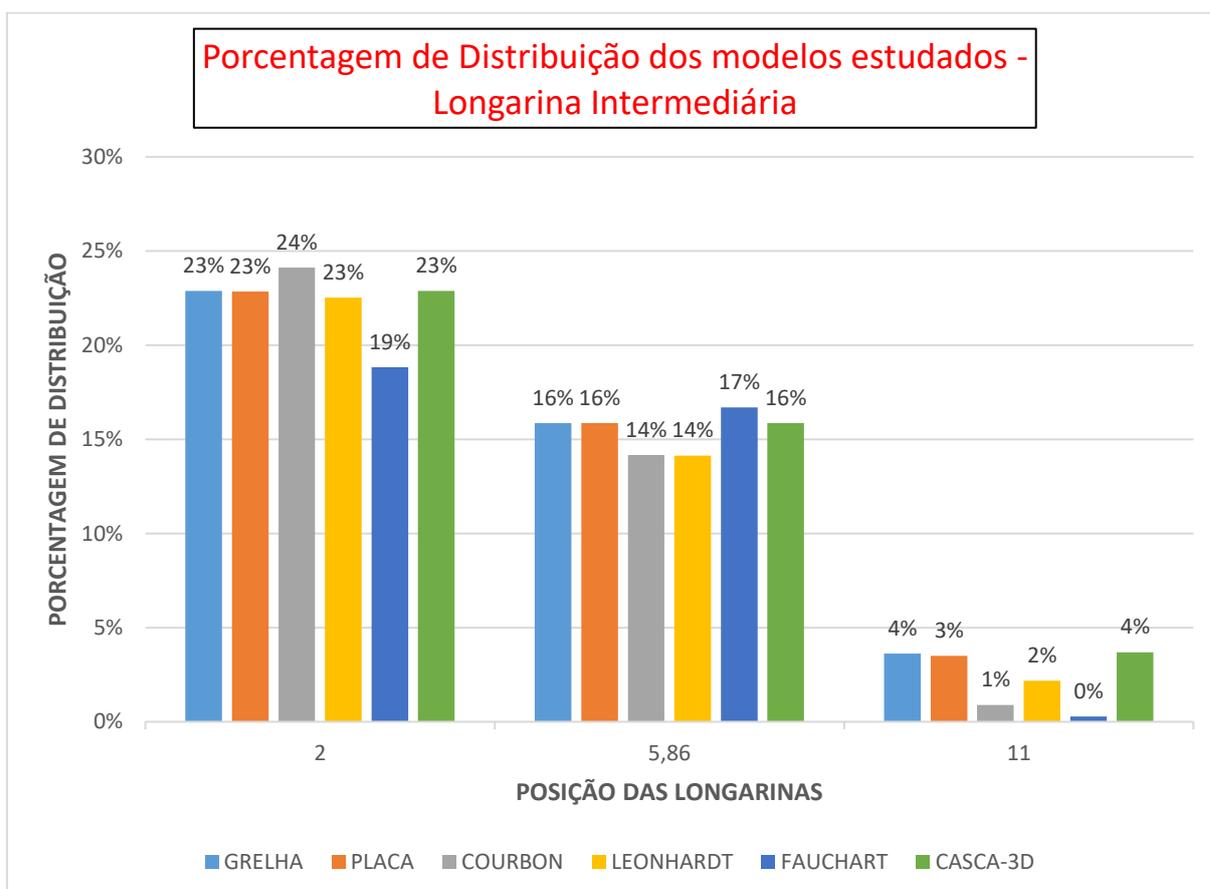
Na figura 5.69 tem-se os resultados dos coeficientes de repartição para a longarina intermediária, e na figura 5.72 o resultado para a longarina central, com a utilização de oito longarinas na ponte.

Figura 5.69 - Coeficientes de influência para a longarina intermediária



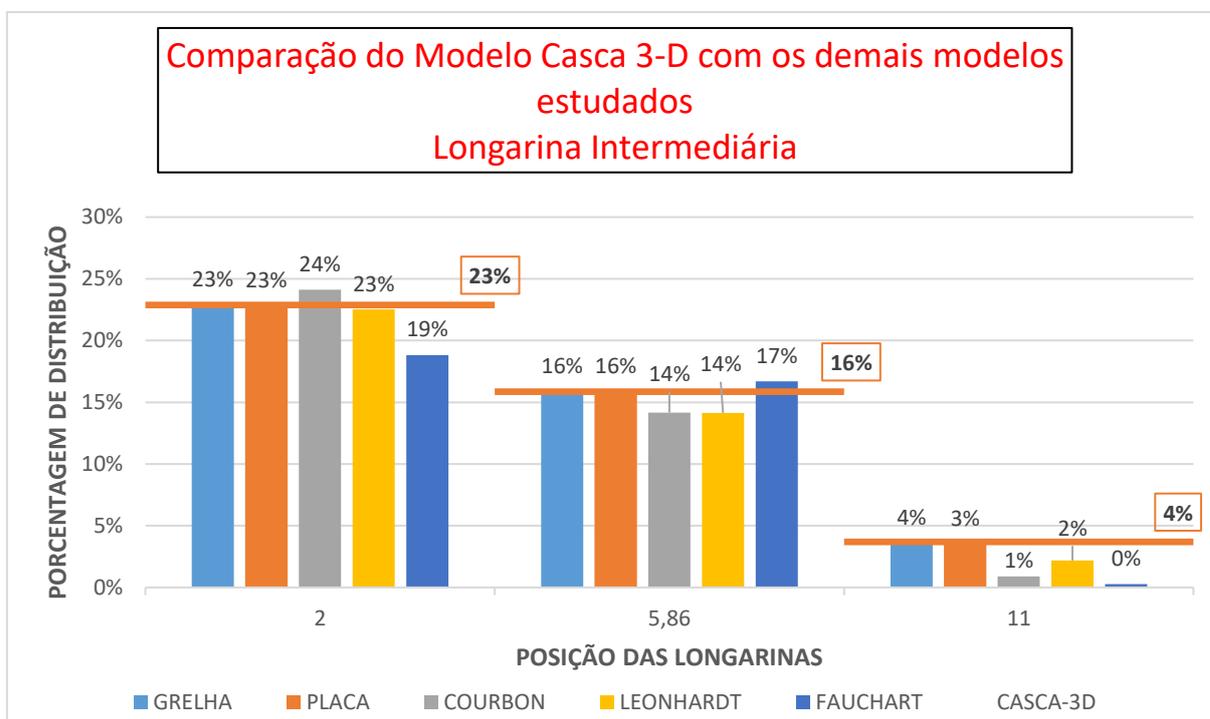
Fonte: Autor (2016)

Figura 5.70 - Porcentagem de Distribuição dos modelos estudados - Longarina Intermediária



Fonte: Autor (2016)

Figura 5.71-Comparação do Modelo Casca 3D (AASHTO LRFD 2014) com os demais modelos estudados - Longarina Intermediária

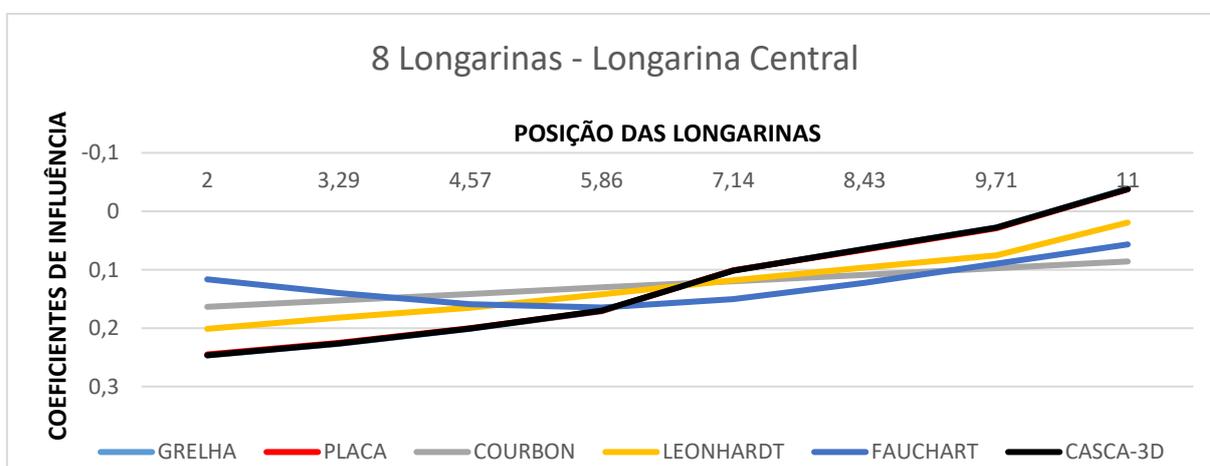


Fonte: Autor (2016)

Os resultados dos modelos computacionais se repetem para as longarinas intermediária e central, devido a diminuição no tamanho da malha analisada com o acréscimo de mais uma longarina ao conjunto.

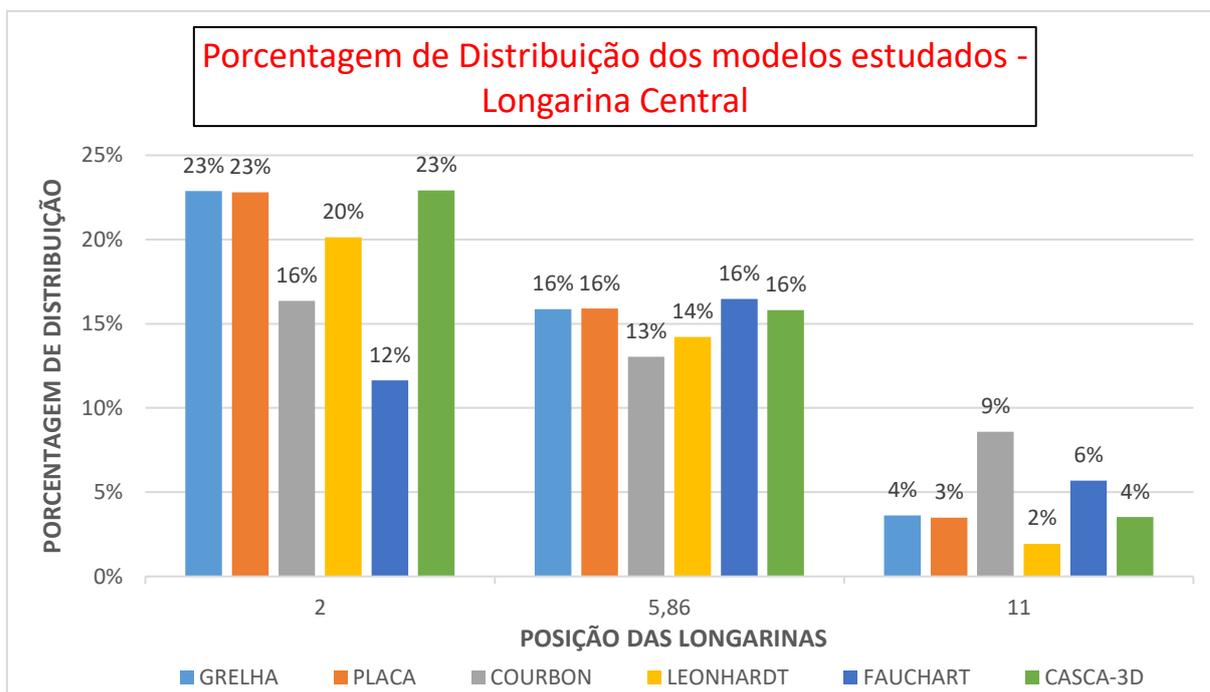
Observa-se, também, as parcelas de cargas são mais distribuídas pelas longarinas mais extremas. À medida que se aproxima da longarina central, a porcentagem de absorção de cargas diminui.

Figura 5.72 - Coeficientes de influência para a longarina central



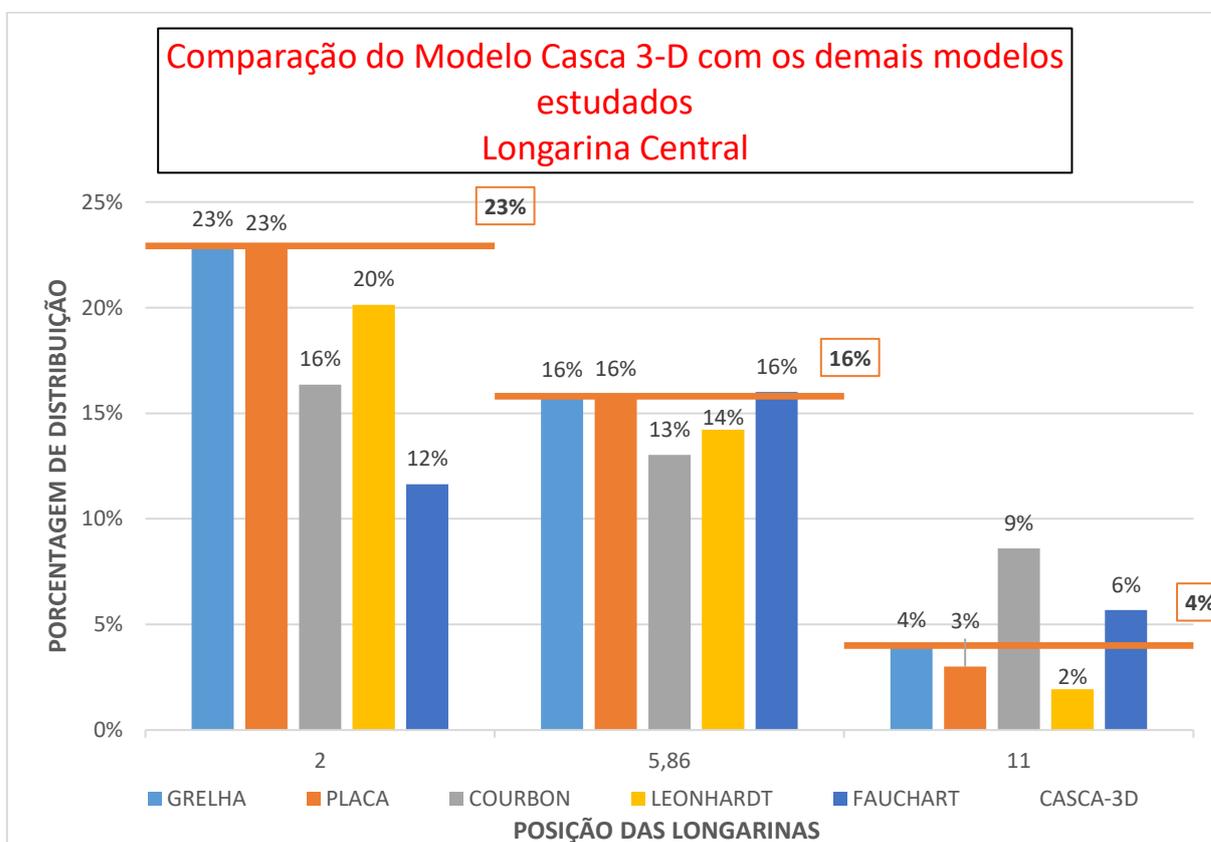
Fonte: Autor (2016)

Figura 5.73 - Porcentagem de Distribuição dos modelos estudados - Longarina Central



Fonte: Autor (2016)

Figura 5.74 - Comparação do Modelo Casca 3D (AASHTO LRFD 2014) com os demais modelos estudados - Longarina Central



Fonte: Autor (2016)

CAPÍTULO 6

Conclusões e sugestões

6.1 Conclusões

No âmbito geral, os modelos analíticos e numéricos apresentaram resultados de repartição de carga relativamente próximos à medida que se aumentou o número de longarinas. Assim, numa análise mais específica, constatou-se que os modelos analíticos de Engesser-Courbon, Homberg-Trenks e Leonhardt com a utilização de poucas (três) longarinas apresentaram resultados menos próximos dos resultados obtidos pelo modelo referencial (Casca 3-D), devido a malha formada, contudo se mostraram bastante próximos para pontes os demais modelos com um número maior de longarinas. Neste caso, a proximidade dos resultados se deu pela precisão numérica que foi realizada para obtenção dos esforços no cálculo das lajes, divididas em faixas, compondo grelhas.

Observou-se também que ao desconsiderar o efeito de torção, os resultados obtidos pelo Método Homberg-Trenks tornaram-se próximos aos do Método do Leonhardt.

Para o Processo de Fauchar foi verificado o fornecimento de resultados mais próximos da divisão proporcional da carga (quinhões de cargas) para a utilização de pontes com maior número de longarinas.

Concluiu-se que quantidade de longarinas também é um fator importante na repartição de cargas, visto que, à medida que se aumenta o número de vigas principais e faz-se a inclusão do efeito de torção nas mesmas, obtém-se uma melhor distribuição dos esforços, sobretudo nas vigas externas.

As análises feitas nos softwares SAP 2000 e CSi Bridge V18, partiram da premissa que o material se comportava de maneira linear elástica. Assim, em teste com aumento de cargas, constatou-se que por se tratar de um modelo elástico linear, a magnitude das cargas não alterou a porcentagem de absorção de cada longarina, mas só os efeitos finais do carregamento. Com isto, mesmo com a não consideração do uso de cargas móveis nos modelos analíticos e nos modelos de Grelha e Placa, o mapa da distribuição dos quinhões de cargas não foi alterado, pois a porcentagem de

absorção do carregamento pelas longarinas dependeu, basicamente, da concepção estrutural (número de vigas longarinas e transversinas), da forma como foi atribuída a análise da estrutura (elemento de pórtico, casca ou placa), das propriedades dos materiais utilizados nos elementos estruturais e na consideração da rigidez à torção e flexão do conjunto.

Por fim, vale ressaltar que a configuração da distribuição das cargas é importante e deve ser melhor observada na fase do dimensionamento das peças estruturais, visto que o mapeamento da real absorção de cargas, ao longo das longarinas e a interação com as transversinas, gerará uma melhor e mais econômica distribuição das taxas de armaduras longitudinais e transversais das peças.

6.2 Sugestões para trabalhos futuros

Considerando a importância e atenção que devem ser dadas à distribuição de cargas em tabuleiros de pontes, destaca-se que toda pesquisa que envolva o tema incidirá sobre dois aspectos muito importantes nos projetos: segurança é economia de materiais. Assim, recomendam-se para trabalhos futuros as seguintes pesquisas no sentido compreender ainda mais a distribuição das cargas em pontes de concreto armado a fim de auxiliar os projetistas deste tipo de obra:

- Fazer uma análise não linear 3D das estruturas de pontes em concreto armado;
- Analisar o real efeito das transversinas na distribuição das cargas nas longarinas;
- Realizar o dimensionamento e detalhamento das longarinas com esforços obtidos por um modelo 3D em elementos finitos e comparar as taxas de armadura obtidas com o dimensionamento feito com os esforços obtidos a partir de Modelos Analíticos de Cálculo (MAC);
- Fazer uma análise experimental em modelo reduzido de distribuição de cargas em tabuleiros de pontes com longarinas retas a fim de comparar os resultados com valores analíticos e numéricos.

Referências bibliográficas

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. ABNT/ NBR 6118. **Projeto de Estruturas de Concreto - Procedimento**. Rio de Janeiro, Brasil. 2003.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. ABNT/ NBR 6118. **Projeto de Estruturas de Concreto - Procedimento**. Rio de Janeiro, Brasil. 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. ABNT/ NBR 7188. **Carga Móvel Rodoviária e de Pedestres em Pontes, Viadutos, Passarelas e outras Estruturas**. Rio de Janeiro, Brasil. 2013.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. ABNT/ NBR 7187. **Projeto de Pontes de Concreto Armado e de Concreto Protendido - Procedimento**. Rio de Janeiro, Brasil. 2003.

Almeida, S. M. F., Machado, A. C. M., **Influência das Transversinas nos Tabuleiros de Pontes em Vigas Múltiplas**, 2º *Seminário Fluminense de Engenharia da Universidade Federal Fluminense*, UFF, Niterói, RJ, 1996.

Almeida, S. M. F.; Alves, E. V.; Judice, F.M, **Métodos de Análise Estrutural de tabuleiros de Pontes em Vigas Múltiplas de Concreto Protendido**, *ENGEVISTA*, v. 6, n. 2, p. 48-58, Agosto, 2004.

AMERICAN ASSOCIATION OF STATE HIGHWAY AND TRANSPORTATION OFFICIALS (AASHTO). **Standart Bridge Design Specifications**. Washington, D.C., USA, 2014.

Azevedo, A. F. M. **Método dos Elementos Finitos**. 1ª ed. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. Porto, Portugal, 2003.

Cai, C.S. **Discussion on AASHTO LRFD Load Distribution Factors for Slab-on-Girder Bridges**. Practical Periodical on Structural Design and Construction, ASCE, 2005.

Cardoso Júnior, S. D. **TQS LIP: Pontes em Vigas Múltiplas**. Rio de Janeiro, 2016

Cavalcanti, G. H. **Contribuição ao Estudo de Influência de Transversinas no Comportamento Estrutural de Pontes Pré-moldadas em Vigas e Moldadas no Local em Pórtico**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, Brasil, 2016.

Cavalcanti, G. H.; Barboza, A. S. R. **Análise da Influência de Transversinas no Comportamento Estrutural de Pontes Pré-moldadas em Vigas e Moldadas “in loco”**. IX Congresso Brasileiro de Pontes e Estruturas, Rio de Janeiro, Brasil. 2016.

Cho, D.; Park, S.; Hong, S. **Evaluation of Girder Distribution Factor in PSC Girder Bridge with Curved Concrete Slab Based on AASHTO Specifications**. Journal of Science Engineering, vol. 39, p. 7635-7646, USA, January, 2014.

Chu, K. **Distribution of Girder Loads in a Composite Highway Bridge**, *Center for Transportation Research Bureau of Engineering Research*, The University of Texas, Austin, USA, December, 1985.

CSiBridge®. CSI Analysis Reference Manual. Computers & Structures, Inc. USA. 2013.

Figueiredo, D. L. N.; Barboza, A. S. R.; Barbirato, J. C. C. **Análise do Comportamento de Sistemas Estruturais de Pontes em Vigas Utilizando a Técnica de Analogia de Grelha Aplicada ao Tabuleiro Associada a um Modelo de Pórtico**. Mecânica Computacional Vol XXIX, págs. 133-157 (artículo completo), Buenos Aires, Argentina, 2010.

Filho, W. N. F. **Avaliação dos Coeficientes de Impacto Utilizados no Cálculo de Pontes Rodoviária Via Análise Dinâmica de Estruturas**. Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, Brasil, 2008.

FU, C. C; Wang, S. Q. **Visual Bridge Geometry Modeling User's Manual**. University of Maryland, College Park, MD, 2013.

GAVIOLI, E.R. **Análise de Tabuleiro de Pontes Formados por Elementos Pré-moldados Mediante Método da Grelha: Recomendações de Projeto e Comparações dos Valores Teóricos com Experimentais**. São Carlos, Brasil, 1998;

Hambly, E. C. **Bridge Deck Behavior**. 2ª Edição. *E & FN SPON*, 1991.

Jovem, T. P.; Rebouças, A. S; Filho, J. N.; Diógenes, H. J. F.; Mata, R. C. **Análise Comparativa da Distribuição de Carga em Pontes Hiperestáticas de Concreto Armado com Múltiplas Longarinas por Meio de Modelos Analíticos Clássicos e do Método do Elementos Finitos**. IX Congresso Brasileiro de Pontes e Estruturas, Rio de Janeiro, Brasil. 2016.

Júdice, F.M; Perlingeiro, M. S. P. L; Diaz, E. M; Souza L. **Avaliação da Distribuição Transversal de Cargas em Tabuleiros de Pontes sem Transversinas Internas**. Anais do 50º Congresso Brasileiro do Concreto, Salvador, Brasil, 2008.

LEONHARDT, F. **Princípios Básicos da Construção de Pontes de Concreto**. Editora Interciência Ltda. Rio de Janeiro, Brasil. 1979.

Macheslki, Czarslaw, **Parameters of load Transverse Distribution Across Bridges**, *Roads and Bridges Journal*, February, 2014.

Martin, F. J. **Cálculo de Tabuleiros de Pontes**, *Ciência e Tecnologia*, Rio de Janeiro, Brasil, 1981.

MARCHETTI, O. **Pontes de Concreto Armado**. Editora Blucher. 1 ed. São Paulo, Brasil. 2008.

MASON, J. **Pontes em Concreto Armado e Protendido**. editora Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, Brasil, 1980.

Mendes, L. C.. **Pontes**. 1ª ed. Editora EDUFF, Rio de Janeiro, Brasil, 2003

Medino, U. A. **Análise Comparativa entre os Modelos Analíticos de Distribuição de Cargas em Tabuleiros de Pontes com Longarinas Retas de Engesser-Courbon e Guyon-Massonet com o Modelo de Distribuição Proporcional de Cargas**. Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, Brasil, 2016.

Moura, M. W. **Comparação do Método de Fauchart e do Método dos Elementos Finitos na Avaliação da Distribuição de Esforços Transversais em Pontes Rodoviárias**. IX Congresso Brasileiro de Pontes e Estruturas, Rio de Janeiro, Brasil. 2016.

NETO, A. G. A. **Método de Leonhardt**. Notas de Aula. Universidade Presbiteriana Mackenzie. São Paulo, Brasil. 2015.

Park, R.; Gamble, W.L. (1980). **Reinforced Concrete Slabs**. New York, *John Wiley & Sons*.

PFEIL, Walter. **Pontes em concreto armado**. Editora LTC, 1ª ed., Rio de Janeiro, Brasil, 1979.

Plano Nacional de Logística e Transporte. Ministério dos Transportes. (PNLT, Brasília, 2011).

Pinho, M., Regis, P., Araújo, E., **Tabuleiros de pontes em vias pré-moldadas protendidas com continuidade – aspectos de projeto e construção**. 51º Congresso Brasileiro de Concreto, Curitiba, Paraná, Brasil, 2009.

Roesli, A. **Lateral Load Distribution in Multi-Beam Bridges**, Lehigh University, Institute of Research, Bethlem, Pensilvania, July, 1955.

Rowe, R. E., **Concrete Bridge Design**, *Applied Science Publishers Ltd.*, London, 1972.

Soriano, H. L. **Método de Elementos Finitos em Análise de Estruturas**. Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil, 2003.

Souza L., S.; Judice, F.M.; Perlingeiro, M.S.P.L. **Análise de Comportamento e de Esforços Devidos à Carga Móvel em Tabuleiros sem Transversinas Internas**. II Congresso de Pontes e Estruturas. Rio de Janeiro, 2007.

Souza Lima, S.; Judice, F.M.; Perlingeiro, M.S.P.L. **Avaliação da Distribuição Transversal de Cargas em Tabuleiros de Pontes sem Transversinas Internas**, 50º Congresso Brasileiro de Concreto, Rio de Janeiro, Brasil, 2008.

SPERNAU, W. **Notas de aula de Pontes ECV-5260**. UFSC, Florianópolis, Brasil, 2012.

Szilard, R. **Theories and Applications of Plate Analysis: Classical, Numerical and Engineering Methods**. *Hoboken: John Wiley & Sons*, 2004.

Takeya, T.; El Debs, M. K. **Introdução às Pontes de Concreto**. Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos, Departamento de Engenharia de Estruturas. São Carlos, Brasil, 2007.

Timoshenko, S; Goodier, J. N. **Theory of Elasticity**. New York: *McGraw-Hill*, 1951.

Timoshenko, S; Woinowsky-Krieger, S. **Theory of plates and shells**. New York: *McGraw-Hill*, 1959.

Vaz, L. E. **Método de Elementos Finitos em Análise de Estruturas**. *Editora Campos*, 2010.

Zokaie, T.; Osterkamp, T.A.; Imbsen, R.A. **Distribution of Wheel Loads on Highway Bridges**. National Cooperative Highway Research Program, Report 12-26, 1991.