



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

Estéfane George Macedo de Lacerda

**ANÁLISE NÃO LINEAR DE TRELIÇAS PELO
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS POSICIONAL**

**Natal
2014**

Estéfane George Macedo Lacerda

**ANÁLISE NÃO LINEAR DE TRELIÇAS PELO
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS POSICIONAL**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Ada Cristina Scudelari
Coorientador: Prof. Dr. Daniel Nelson Maciel

Natal
2014

UFRN / Biblioteca Central Zila Mamede
Catalogação da Publicação na Fonte

Lacerda, Estéfane George Macedo.

Análise não linear de treliças pelo método dos elementos finitos posicional. / Estéfane George Macedo Lacerda. – Natal, RN, 2014.
92 f. : il.

Orientadora: Prof. Dr. Ada Cristina Scudelari.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Nelson Maciel

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.

1. Treliça – Dissertação. 2. Não linearidade geométrica - Dissertação. 3. Elementos finitos – Dissertação. 4. Formulação posicional – Dissertação. 5. Medidas de deformação – Dissertação. 6. Comprimento de arco – Dissertação. I. Scudelari, Ada Cristina. II. Maciel, Daniel Nelson. III. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. IV. Título.

RN/UF/BCZM

CDU 624

ESTÉFANE GEORGE MACEDO DE LACERDA

**ANÁLISE NÃO LINEAR DE TRELIÇAS PELO
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS POSICIONAL**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação, em Engenharia Civil, da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

BANCA EXAMINADORA

Prof^a. Dra. Ada Cristina Scudelari – Orientadora (UFRN)

Prof. Dr. Daniel Nelson Maciel – Co-orientador (UFRN)

Prof. Dr. João Carlos Arantes Costa Júnior – Examinador Externo ao Programa (UFRN)

Prof. Dr. Alexandre José Soares Miná – Examinador Externo à instituição (UFPB)

Natal, 28 de fevereiro de 2014.

ANÁLISE NÃO LINEAR DE TRELIÇAS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS POSICIONAL

Estéfane George Macedo Lacerda

Orientador: Prof. Dr. Ada Cristina Scudelari

Coorientador: Prof. Dr. Daniel Nelson Maciel

RESUMO

Este trabalho apresenta a formulação posicional não linear geométrica para treliças usando diferentes medidas de deformação. A formulação posicional é uma abordagem alternativa para problemas não lineares. Essa formulação considera as posições nodais como variáveis do sistema não linear em vez dos deslocamentos (que é largamente utilizado na literatura). O trabalho também descreve o método do comprimento de arco, usado para traçar caminhos de equilíbrio com *snap-through* e *snap-back*. Aplicações numéricas com treliças já consagradas na literatura e comparações com outros trabalhos são fornecidas para provar a acurácia da formulação proposta.

Palavras-chave: treliça, não linearidade geométrica, elementos finitos, formulação posicional, medidas de deformação, comprimento de arco

NONLINEAR ANALYSIS OF TRUSSES USING THE POSITIONAL FINITE ELEMENT METHOD

Estéfane George Macedo Lacerda

Adviser: Prof. Dr. Ada Cristina Scudelari

Co-adviser: Prof. Dr. Daniel Nelson Maciel

ABSTRACT

This work presents the positional nonlinear geometric formulation for trusses using different strain measures. The positional formulation presents an alternative approach for nonlinear problems. This formulation considers nodal positions as variables of the nonlinear system instead of displacements (widely found in literature). The work also describes the arc-length method used for tracing equilibrium paths with snap-through and snap-back. Numerical applications for trusses already established in the literature and comparisons with other studies are provided to prove the accuracy of the proposed formulation.

Keywords: truss, geometric nonlinearity, finite elements, positional formulation, strain measures, arc-length method

Agradecimentos

Os agradecimentos principais são direcionados aos orientadores Dra. Ada Cristina Scudelari e Dr. Daniel Nelson Maciel pela confiança e conhecimentos transmitidos.

Agradecidos também são direcionados aos professores que gentilmente revisaram o texto da dissertação: Dr. João Carlos Arantes Costa Júnior e Dr. Alexandre José Soares Miná.

Agradecimentos especiais são direcionados a todos que fazem parte do PEC: professores, funcionários e colegas do mestrado.

Agradeço também a Deus e a minha família.

Sumário

Sumário	vi
Lista de ilustrações	ix
Lista de algoritmos	xi
Lista de símbolos	xii
1	INTRODUÇÃO 1
1.1	Relevância e Justificativa 1
1.2	Objetivos 2
1.3	Generalidades e revisão da literatura 3
1.4	Organização do trabalho 5
2	ANÁLISE ESTRUTURAL NÃO LINEAR 7
2.1	Hipóteses da análise linear 7
2.2	Tipos de não linearidade 7
2.2.1	Não linearidade geométrica 8
2.2.2	Não linearidade física 8
2.2.3	Condições de contorno não linear 9
2.3	O caminho de equilíbrio 9
2.3.1	Pontos especiais no caminho de equilíbrio 10
2.3.2	A tangente de rigidez 10
2.3.3	<i>Snap-through, snap-back</i> e bifurcação 10
2.4	Exemplos de problemas com comportamento estrutural não linear . . 11
2.4.1	Exemplo de bifurcação 11
2.4.2	Exemplo de snap-through 13
2.5	Deflexão, deslocamento e deformação 15
2.6	Medidas de deformação unidimensional 16
2.6.1	Deformação de engenharia 16

2.6.2	Deformação de Green	16
2.6.3	Deformação logarítmica	17
2.6.4	Deformação de Almansi	18
2.6.5	Alongamento	18
2.7	Medidas de deformação bidimensional	18
3	MÉTODOS NUMÉRICOS PARA ANÁLISE ESTRUTURAL NÃO LINEAR	21
3.1	Método de Newton-Raphson	21
3.1.1	Método de Newton-Raphson para um grau de liberdade	21
3.1.2	Método de Newton-Raphson para mais de um grau de liberdade	25
3.2	Análise Incremental-Iterativa	27
3.2.1	Método de Newton-Raphson modificado	29
3.2.2	Controle de carga versus controle de deslocamento	31
3.3	Método do comprimento de arco	31
3.3.1	Restrição de hiperesfera	33
3.3.2	Formulação genérica	37
3.3.3	Restrição de hiperplano	38
3.3.4	Solução preditora	39
3.3.5	Comprimento do arco	41
3.3.6	Algoritmo de Riks-Wempner	42
4	O ELEMENTO DE TRELIÇA PARA DIFERENTES MEDIDAS DE DEFOR-	
	MAÇÃO	44
4.1	Geometria do elemento de treliça	44
4.2	O princípio da energia potencial mínima	45
4.3	Método de Newton-Raphson	46
4.4	O gradiente do comprimento da barra e outras expressões	47
4.5	Formulação com deformação de Green	48
4.6	Formulação com deformação de engenharia	49
4.7	Formulação com deformação logarítmica	50
4.8	O princípio dos trabalhos virtuais	51
4.9	Formulação com deformação logarítmica permitindo mudança de vo-	
	lume	52
4.10	Matrizes de rigidez tangente para diferentes medidas de deformação	55
4.11	Treliças espaciais	55
5	APLICAÇÕES NUMÉRICAS	57
5.1	Viga de treliça engastada	57
5.2	Estrutura com barra rígida e mola	60
5.3	Cúpula de treliça com 24 barras	62

5.4	Treliça espacial com 12 barras	65
5.5	Cúpula de treliça com 168 barras	69
5.6	Arco de treliça de Crisfield	72
	Conclusão	76
A	CÓDIGO FONTE	78
	Referências	88

Lista de ilustrações

Figura 1 – Viga engastada	8
Figura 2 – O caminho de equilíbrio	9
Figura 3 – Pontos especiais no caminho de equilíbrio	11
Figura 4 – Estrutura viga e mola	12
Figura 5 – O problema de bifurcação	12
Figura 6 – Treliça de duas barras	13
Figura 7 – Geometria do deslocamento da treliça de duas barras	13
Figura 8 – Relação carga-deslocamento da treliça com duas barras	14
Figura 9 – Diferença entre <i>deformation</i> e <i>strain</i>	15
Figura 10 – Alongamento da barra.	16
Figura 11 – Rotação de 90° de partículas de corpo sólido.	19
Figura 12 – O método de Newton-Raphson.	22
Figura 13 – Treliça com um grau de liberdade.	23
Figura 14 – Método de Newton-Raphson resolvendo a equação de equilíbrio.	24
Figura 15 – Treliça com dois graus de liberdade.	26
Figura 16 – Procedimento Incremental-Iterativo com o Método de Newton-Raphson.	28
Figura 17 – Procedimento Incremental-Iterativo com o Método de Newton-Raphson Modificado.	30
Figura 18 – Limitações do controle de carga e controle de deslocamento.	32
Figura 19 – Restrições no Método do Comprimento de Arco. (a) Restrição de hiperesfera. (b) Restrição de hiperplano atualizado. (c) Restrição hiperplano fixo.	33
Figura 20 – Método do Comprimento de Arco Hiperesférico.	34
Figura 21 – Os componentes residual e tangencial.	36
Figura 22 – Dois ciclos do método do comprimento de arco	37
Figura 23 – Preditor	40
Figura 24 – Caminho de Equilíbrio para dois graus de liberdade.	42
Figura 25 – Direção oposta ao caminho de equilíbrio	42
Figura 26 – Elemento de Treliça.	44

Figura 27 – Mudança de volume da barra.	53
Figura 28 – Treliça engastada.	57
Figura 29 – Deslocamento na extremidade da treliça.	58
Figura 30 – Comparação entre a análise linear e não linear referente ao deslocamento no final da treliça.	59
Figura 31 – Mudança de configuração da viga de treliça.	59
Figura 32 – Estrutura barra-mola.	60
Figura 33 – Relação força-deslocamento na estrutura barra-mola.	61
Figura 34 – Cúpula de treliça com 24 barras.	63
Figura 35 – Caminho de equilíbrio da cúpula de treliça com 24 barras.	64
Figura 36 – Caminho de equilíbrio da cúpula de treliça com 24 barras para diferentes medidas de deformação.	64
Figura 37 – Treliça espacial com 12 barras.	65
Figura 38 – Caminho do equilíbrio (direção v x carga).	66
Figura 39 – Caminho do equilíbrio (direção w x carga).	66
Figura 40 – Caminho do equilíbrio (direção u x carga).	67
Figura 41 – Caminho do equilíbrio (direção w x direção v).	67
Figura 42 – Caminho do equilíbrio (direção w x direção v).	68
Figura 43 – Caminho do equilíbrio (direção u x direção v).	68
Figura 44 – Cúpula de treliça com 168 barras.	69
Figura 45 – Caminho do equilíbrio (deslocamento vertical do nó 1).	70
Figura 46 – Caminho do equilíbrio (deslocamento vertical do nó 2).	70
Figura 47 – Caminho do equilíbrio (deslocamento horizontal do nó 2).	71
Figura 48 – Arco de treliça de Crisfield.	72
Figura 49 – Caminho de equilíbrio parcial do arco de treliça de Crisfield.	73
Figura 50 – Caminho de equilíbrio do arco de treliça de Crisfield	73
Figura 51 – Mudança de configuração do arco de treliça.	74
Figura 52 – Mudança de configuração do arco de treliça (continuação).	75

Lista de Algoritmos

1	Procedimento Incremental-Iterativo com o Método de Newton-Raphson.	28
2	Procedimento Incremental-Iterativo com o Método de Newton-Raphson Modificado.	30
3	Algoritmo de comprimento de arco de Riks-Wempner.	43

Lista de símbolos

K	Matriz de rigidez
K_t	Matriz de rigidez tangente
f	Vetor de forças externas
q	Vetor forças internas
u	Vetor de deslocamentos
x	Vetor de posições
d	Equação (4.13)
B	Equação (4.22)
C	Equação (4.23)
$\epsilon_E, \epsilon_G, \epsilon_L$	Deformações de engenharia, Green e logarítmica
λ	Alongamento (no Capítulo 2) e Fator de carga (no Capítulo 3)
l, a, v	Comprimento, área de seção e volume atuais da barra
L, A, V	Comprimento, área de seção e volume iniciais da barra
Π	Energia potencial total
U	Energia de deformação
E	Módulo de elasticidade
ν	Coefficiente de Poisson
g	Força residual
$\hat{\mathbf{f}}$	Vetor de forças fixo ($\mathbf{f} = \lambda \hat{\mathbf{f}}$)

$\Delta\lambda$	Incremento do fator de carga
$\Delta\mathbf{u}$	Incremento do vetor de deslocamentos
$\delta\lambda$	Subincremento do fator de carga (gerado pelo método de Newton-Raphson)
$\delta\mathbf{u}$	Subincremento vetor de deslocamentos (gerado pelo método de Newton-Raphson)
Δl	Comprimento de arco

CAPÍTULO 1

Introdução

Esta pesquisa é sobre análise estrutural geometricamente não linear de treliças usando o métodos dos elementos finitos (MEF). O MEF é atualmente uma importante e, frequentemente, indispensável ferramenta de análise estrutural (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2005; BATHE, 2006). Em particular, a pesquisa usa a formulação posicional do método dos elementos finitos desenvolvido originalmente por Coda (2003) e colaboradores.

O método dos elementos finitos posicional difere, principalmente, do método dos elementos finitos padrão para sólidos no seguinte aspecto: o método padrão tem como incógnitas os deslocamentos nodais, enquanto no método posicional, as incógnitas são as posições nodais. Este simples fato, acarreta diversas outras diferenças na formulação do método.

A pesquisa será focada na análise de um elemento estrutural chamado de treliça. Treliça é um arranjo estável de barras delgadas interligadas. As barras são conectadas por pinos sem atrito de forma que nenhum momento possa ser transmitido pela conexão. Desse modo, as treliças caracterizam-se por ser um arranjo de barras que somente transmitem força axial, mas podem estar sujeitas a momento fletor, se submetidas à ação de forças inerciais.

Há dois tipos básicos de não linearidade que ocorrem em análise estrutural. O primeiro tipo é chamado de *não linearidade física* que é causado por um comportamento elástico não linear, plástico ou viscoso do material que compõe a estrutura. Neste caso, a relação deformação-deslocamento é não linear. O segundo tipo é chamado de *não linearidade geométrica* e ocorre quando as deformações são suficientemente grandes para causar mudanças significativas na estrutura fazendo com que as equações de equilíbrio sejam formuladas na configuração deformada da estrutura.

1.1 RELEVÂNCIA E JUSTIFICATIVA

A análise não linear das estruturas é fundamental para concepção de treliças mais leves e eficientes (menos barras) dentro de padrões de segurança e qualidade porque quanto mais leves e com menos barras, maiores são as chances de ocorrerem problemas não line-

ares de estabilidade (HRINDA; NGUYEN, 2008). É fundamental, também, para o estudo de estruturas próximo ao colapso devido à grandes modificações na geometria da estrutura e a perda de linearidade na relação deformação-tensão. No entanto, recentemente tem havido um aumento significativo de busca por métodos e teorias de análise não lineares motivada pela ação conjunta de outros fatores (GARCIA, 2007; GRECO, 2004):

- As estruturas estão cada vez mais inovadoras, principalmente em características geométricas e físicas, exigindo uma análise não linear para obter resultados mais realistas a fim de aproveitar o máximo possível dessas características;
- O estágio atual de evolução dos métodos numéricos em análise estrutural. Principalmente, os métodos dos elementos finitos e suas variantes que estão com um comportamento aproximativo cada vez melhor e também estão computacionalmente mais eficientes;
- O aumento da capacidade de processamento dos computadores e de outros recursos computacionais junto com sua disponibilidade cada vez maior.

Devido a crescente procura por análise não linear, é necessária a realização de pesquisas que reflitam mais exatamente os avanços dos métodos nesta área que crescem com o aumento dos recursos computacionais modernos.

A treliça é uma estrutura simples, mas a pesquisa em análise de treliças se justifica porque as principais características dos elementos finitos mais complexos, bem como muitos fenômenos (e.g., bifurcação e *snap-through*) e métodos envolvidos na análise não linear em geral podem ser completamente aplicados e estudados nas treliças com a vantagem de evitar a inerente complexidade das estruturas mais sofisticadas.

A formulação posicional do MEF é o método escolhido nesta pesquisa porque ele alcançou resultados satisfatórios em análises não lineares de variadas estruturas. Contudo, por ser uma formulação desenvolvida recentemente, há poucos trabalhos publicados quando comparados a outros já estabelecidos na literatura. Desse modo, a pesquisa contribui para aprimorar e ampliar as aplicações da formulação posicional.

1.2 OBJETIVOS

- Desenvolver, de forma mais completa possível, a formulação posicional do elemento de treliça;
- Implementar os elementos de treliça elaboradas no item anterior, a fim de ter uma biblioteca capaz de reproduzir os resultados das diferentes treliças da literatura;
- Descrever e implementar o processo incremental-iterativo usando o método de Newton-Raphson para controle de carga e de deslocamento;

- Descrever e implementar o método do comprimento de arco para lidar com problemas como *snap-through* e *snap-back*;
- Selecionar um número de treliças já consagradas na literatura e que apresente um certo nível de dificuldade. Depois, aplicar a formulação desenvolvida neste trabalho com as treliças selecionadas e comparar com trabalhos anteriores.

1.3 GENERALIDADES E REVISÃO DA LITERATURA

A análise não linear geométrica se refere ao estudo do comportamento de estruturas que sofrem grandes mudanças na sua geometria (deslocamentos e rotações). Nestes casos, certas suposições pela qual se fundamenta as teorias lineares deixam de ser válidas. Um exemplo disso é a suposição de que os deslocamentos da estrutura sejam muito pequenos. Outro exemplo é a suposição de que as condições de contorno não se modifica durante a aplicação das cargas. Quando tais suposições não são mais válidas é requerido teorias não lineares para estudar a estrutura. Elas tem aplicação em engenharia civil, mecânica, aeronáutica e bioengenharia.

Teorias não lineares tem sido descritas em livros específicos, sendo (TRUEDELLE; NOLL; ANTMAN, 2004) uma obra seminal e avançada neste assunto. Outros livros populares neste assunto são (OGDEN, 1997; HOLZAPFEL, 2000; CIARLET, 1988). Vale também mencionar (NOVOZHILOV, 2011; ANTMAN, 2005). E na literatura nacional consta (GARCIA, 2007). Os livros de mecânica do contínuo, apesar de mais abrangentes, também fornecem fundamentação para teorias não lineares como, por exemplo, os livros (MALVERN, 1977; LAI; RUBIN; KREMPPL, 2009; MASE; SMELSER; MASE, 2009; COIMBRA, 1981; GURTIN, 1981; SILHAVY, 1997).

A maioria dos livros de métodos dos elementos finitos para estruturas focam a análise linear. Alguns deles fornecem capítulos introdutórios sobre análise não linear como por exemplo (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2005; BATHE, 2006). Livros inteiramente dedicados à análise não linear são poucos. Um dos livros pioneiros foi (ODEN, 2006) (republicação). Depois vieram (CRISFIELD, 1991; CRISFIELD, 1997), que é considerado um clássico, e (KLEIBER, 1989). Entre os livros recentes ou atualizados destacam-se (KRENK, 2009; BORST et al., 2012; BONET; WOOD, 2008; BELYTSCHKO et al., 2014; WRIGGERS, 2008; FELLIPA, 2012).

A análise não linear, neste trabalho, utilizará a formulação posicional do método dos elementos finitos desenvolvido por H. Coda (CODA, 2003) e seus colaboradores. Esta formulação é baseada no princípio da mínima energia potencial e as incógnitas fundamentais do problema são as posições dos nós do elemento finito, aos invés dos deslocamentos, que são as incógnitas na formulação padrão dos elementos finitos para sólidos.

A formulação posicional é classificada como sendo uma formulação lagrangeana total. Uma breve explicação desta classificação é dada a seguir. Uma formulação pode ter uma des-

crição lagrangeana ou euleriana. Na descrição lagrangeana, as mudanças de configuração da estrutura são medidas a partir de um referencial fixo no espaço. Na descrição euleriana, as mudanças de configuração da estrutura são medidas a partir de um referencial que se move pelo espaço. Há dois tipos básicos de formulação lagrangeana: total e atualizada (BATHE, 2006). A formulação lagrangeana total é também chamada simplesmente de formulação lagrangeana. Nesta formulação, a configuração de referência é a configuração inicial no tempo zero. Na formulação atualizada, a configuração de referência é a última configuração calculada, ou seja, a configuração de referência é atualizada a cada incremento de carga ou tempo. Maiores explicações podem ser encontradas em (WONG; TIN-LOI, 1990).

Apesar da formulação posicional ser recente, já existem algumas aplicações por Coda e colaboradores. Uma das primeiras aplicações foi em análise dinâmica de pórticos planos (GRECO; CODA, 2004). Em (GRECO, 2004) foi feito um estudo do impacto entre estruturas de pórtico sendo realizadas análises estáticas e dinâmicas considerando também efeitos elastoplásticos. O artigo (GRECO; CODA, 2006) apresenta uma análise dinâmica não linear geométrica de estruturas unidimensionais utilizando um algoritmo da família de integradores temporais de Newmark.

Em (MARQUES, 2006), o trabalho de Greco (2004) foi ampliado para problemas não lineares de sólidos realizando análises estáticas e dinâmicas e considerando também o problema de impacto entre sólidos bidimensionais.

Em (MACIEL, 2008) foi realizada uma análise não linear geométrica dinâmica de pórticos e sólidos tridimensionais considerando também plasticidade. Além disso, foi estudado o problema de impacto para sólidos tridimensionais. Nesse trabalho foi utilizado o método de Newton-Raphson e o integrador temporal de Newmark. Adotou-se, também, a cinemática de Reissner na análise de pórticos.

Análises de cascas foram realizadas em (CODA; PACCOLA, 2007; CODA; PACCOLA, 2008). Em (CODA; PACCOLA, 2008) foi realizada análise não linear geométrica de cascas com variação de espessura e utilização de elementos curvos. Em (CARRAZEDO, 2009) foi estudado o problema de impacto considerando transferência de calor e seus efeitos. Em (SILVA, 2010), a formulação posicional foi combinada com o método dos elementos de contorno (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1992) na análise não linear geométrica do acoplamento solo-estrutura. Outros trabalhos com a formulação posicional são (GRECO; CODA H. B.; VENTURINI, 2004; MINSKI, 2008; PASCON; CODA, 2009; REIS, 2012).

Vale destacar dois trabalhos na formulação posicional aplicada às treliças. No primeiro deles (GRECO et al., 2006) foi realizado uma análise estática não linear de treliças espaciais sofrendo grandes deslocamentos e tendo comportamento elasto-plástico. Houve um bom acordo numérico com as soluções analíticas dos problemas e também com as soluções numéricas encontradas pelo software de MEF ANSYS[®]. Os autores enfatizaram a simplicidade do método posicional e sua boa convergência em estruturas severamente deformadas pós-

flambagem.

No segundo artigo (GRECO et al., 2012), a formulação posicional foi comparada com a formulação co-rotacional (COOK, 2001) e com os resultados produzidos pelo ANSYS® usando treliças planas e espaciais encontradas da literatura. Também, houve um bom acordo numérico entre os resultados das duas formulações. Os autores afirmaram que a formulação posicional é consideravelmente mais simples que a formulação co-rotacional e, por ser mais simples, processou os cálculos mais rapidamente que a formulação co-rotacional. Contudo, a formulação co-rotacional é mais vantajosa no que diz respeito à reutilização do código computacional para formulações baseadas em outras leis constitutivas. Isto porque na formulação posicional é requerido derivar uma nova formulação posicional toda vez que uma nova lei constitutiva vem a ser estudada.

Treliças quando submetidas a grandes cargas apresentam não linearidades geométricas e estas frequentemente contêm certos pontos críticos chamados de *snap-through* (ponto crítico em relação a carga) e *snap-back* (ponto crítico em relação ao deslocamento) que estão relacionados com a instabilidade da estrutura. Obter os pontos críticos e o caminho de equilíbrio dessas treliças requer estratégias numéricas especiais. Uma das estratégias mais utilizadas é o método do comprimento de arco originalmente criado por Riks (RIKS, 1972; RIKS, 1979) e Wempner (WEMPNER, 1971).

Na década de 1980, foram propostas várias variantes do método original que ainda são muito utilizadas (CRISFIELD, 1981; RAMM, 1981; SCHWEIZERHOF; WRIGGERS, 1986; FRIED, 1984), sendo o método de Crisfield um dos mais conhecidos. Vários trabalhos tem sido propostos visando aperfeiçoar esses métodos. O problema das raízes complexas do método de Crisfield tem sido tratado em (LAM; MORLEY, 1992; ZHOU; MURRAY, 1994). (FORDE; STIEMER, 1987) propôs um método baseado em princípios de ortogonalidade que forneceu exatamente o mesmo resultado do método de Crisfield sem precisar calcular raízes. Em (TENG; LUO, 1998) foi introduzido o conceito de comprimento de arco acumulado. O método permite convergência em um predefinido estado de deformação. Sendo utilizado em análise de bifurcação. Um apanhado mais completo de métodos antigos e recentes são encontrados em (XIAO-ZU; BASHIR-AHMED, 2004; RITTO-CORRÊA; CAMOTIM, 2008).

1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O trabalho está organizado em cinco capítulos. O primeiro capítulo apresentou os objetivos e justificativas da pesquisa e uma revisão bibliográfica. O segundo capítulo é uma visão geral da análise estrutural não linear, introduzindo conceitos para o restante dos capítulos tais como as medidas de deformação. O terceiro capítulo apresenta os métodos numéricos para resolver o sistema de equações não lineares que surge na análise não linear e técnicas (o procedimento incremental-iterativo e o comprimento de arco) para traçar o caminho de equilíbrio. No quarto capítulo, é apresentado a formulação posicional do MEF do elemento de treliça

para diferentes medidas de deformação. O Capítulo 5 apresenta aplicações computacionais utilizando treliças *benchmark* encontradas na literatura. Por fim, a conclusão da pesquisa.

CAPÍTULO 2

Análise Estrutural Não Linear

Este capítulo descreve alguns conceitos básicos encontrados na análise não linear de estruturas tais como caminho de equilíbrio, pontos especiais neste caminho e tipos de não linearidade. Além disso, apresenta exemplos de fenômenos não lineares e descreve as medidas de deformação não lineares. Também procura ilustrar algumas diferenças entre a análise linear e não linear.

2.1 HIPÓTESES DA ANÁLISE LINEAR

Na análise linear de estruturas, a formulação do método dos elementos finitos é construída assumindo as seguintes hipóteses no modelo estrutural (BATHE, 2006):

- Os deslocamentos nodais são infinitesimalmente pequenos;
- O material é linearmente elástico;
- As condições de contorno não se modificam durante a aplicação das cargas.

Quando isto acontece, o vetor de deslocamentos \mathbf{u} se relaciona linearmente como o vetor de cargas \mathbf{f} da seguinte forma

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}$$

onde \mathbf{K} é a matriz de rigidez. Então, se as cargas aumentarem por um fator α , isto é, $\alpha\mathbf{f}$ então os deslocamentos aumentam pelo mesmo fator, isto é, $\alpha\mathbf{u}$. Quando isto não acontece, é porque existem não linearidades no sistema estrutural como descritas a seguir.

2.2 TIPOS DE NÃO LINEARIDADE

Os tipos de não linearidade em um sistema estrutural são diversos. A seguir será apresentada as principais delas.

2.2.1 Não linearidade geométrica

Na análise linear, as equações de equilíbrio são elaboradas com base na geometria inicial da estrutura (i.e., antes da estrutura sofrer deslocamentos ou rotações). Naturalmente, se o sistema estrutural sofrer grandes mudanças na sua geometria então aquelas equações de equilíbrio deixam de ser válidas necessitando ser reformuladas a cada mudança de geometria, causando perda de linearidade nas relações deslocamento e deformação. Este tipo de não linearidade é denominado de não linearidade geométrica. São classificadas em:

- *Pequenas deformações, mas grandes deslocamentos ou rotações*

Neste caso, a estrutura sofre deformações pequenas, mas os deslocamentos e rotações não são pequenos. Este tipo de não linearidade ocorre, em geral, em arcos, molas, barras de treliça e placas e cascas finas.

Um exemplo tomado de (BORST et al., 2012) e mostrado na Figura 1 ilustra como uma viga pode ter pequena deformação e grande deslocamento. Podemos obter uma deformação arbitrariamente pequena nesta viga se aumentarmos sua rigidez EI . E, por outro lado, podemos obter deslocamentos arbitrariamente grandes na mesma viga se aumentarmos seu comprimento l .

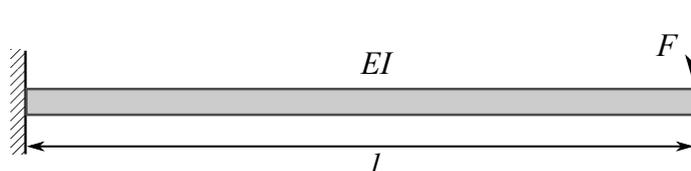


Figura 1 – Viga engastada

- *Grandes deformações*

Por ser grande a deformação, este tipo de não linearidade, frequentemente, gera também não linearidade física. Pode-se considerar, em muitos casos, acima 5% de deformação como sendo grande deformação. Este tipo de não linearidade ocorre na formação de metais e em materiais de borracha.

O conceito de grande e pequeno é, naturalmente, impreciso. Alguns autores preferem usar o termo deformação infinitesimal para pequena deformação e deformação finita (não infinitesimal) para grande deformação.

2.2.2 Não linearidade física

Muitos materiais apresentam um comportamento não linear tais como elasticidade não linear, plasticidade, viscoelasticidade e fluência. Por exemplo, o concreto, o aço e o solo

apresentam comportamento elastoplástico. Metais em alta temperatura, argila, borracha e polímeros apresentam viscoelasticidade. A não linearidade física caracteriza-se por causar relações não lineares entre tensão e deformação e pelo fato da análise estrutural depender do caminho ou histórico de deformação do material.

2.2.3 Condições de contorno não linear

Ocorre quando as condições de contorno se alteram durante o deslocamento da estrutura. Isto ocorre, por exemplo, devido ao contato ou impacto entre dois corpos ou quando as forças externas são dependentes dos deslocamentos (e.g., forças não conservativas).

No contexto da formulação posicional do MEF, há exemplos deste tipo de não linearidade em (MACIEL, 2008) (forças não conservativas) e (GRECO, 2004; MARQUES, 2006) (impacto).

2.3 O CAMINHO DE EQUILÍBRIO

Um gráfico, frequentemente, utilizado para estudar o comportamento de um sistema estrutural, relaciona carga \times deslocamento ou força \times deflexão ou alguma outra medida que os represente. Se o gráfico carga \times deslocamento é não linear então o comportamento da estrutura é não linear. A curva contínua neste gráfico é denominada de caminho. Se cada ponto sobre o caminho representa uma configuração de equilíbrio estático da estrutura então a curva recebe a denominação de *caminho de equilíbrio* como mostra a Figura 2. O estudo do caminho de equilíbrio é fundamental para revelar conceitos chave de um comportamento estrutural não linear.

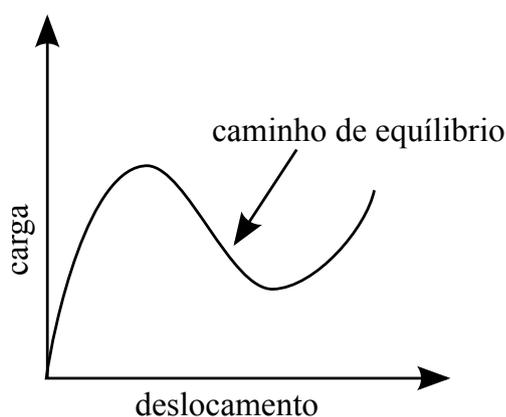


Figura 2 – O caminho de equilíbrio. Cada ponto na curva representa uma configuração de equilíbrio estático da estrutura

2.3.1 Pontos especiais no caminho de equilíbrio

Alguns pontos no caminho de equilíbrio são de especial interesse. Entre eles estão os chamados *pontos críticos* que são de dois tipos:

- *Ponto de limite*: é um ponto extremo (ponto de máximo ou mínimo) no caminho de equilíbrio. Nestes pontos, a tangente é horizontal;
- *Ponto de bifurcação*: é um ponto no qual dois ou mais caminhos de equilíbrio se cruzam.

Quando atinge os pontos críticos, a estrutura pode torna-se instável, por isso, a identificação deles é de grande importância para um projeto de engenharia. A interpretação física dos pontos críticos é deixada para a Seção 2.4.

Há também outros pontos especiais no caminho de equilíbrio. O *ponto de viragem* é ponto no caminho de equilíbrio cuja tangente é vertical. Tem mais importância computacional do que física porque pode afetar o desempenho de alguns métodos numéricos. Está associado com o fenômeno de *snap-back*.

E finalmente, há o *ponto de falha* que é o ponto que termina o caminho de equilíbrio, isto é, onde ocorre falha da estrutura.

2.3.2 A tangente de rigidez

A tangente do caminho de equilíbrio é chamada de tangente de rigidez e representa, de forma geral, a razão:

$$\frac{\text{carga ou força}}{\text{deslocamento ou deflexão}}$$

Nos pontos onde a tangente de rigidez é negativa, a estrutura é instável.

2.3.3 *Snap-through*, *snap-back* e bifurcação

A Figura 3 ilustra pontos de limite (L), pontos de bifurcação (B), pontos de viragem (V) e pontos de falha (F). Na Figura 3(a) é mostrado um fenômeno chamado *snap-through*¹. A partir do ponto em que o deslocamento atinge o primeiro ponto de limite, a tangente de rigidez torna-se negativa e a estrutura torna-se instável. O que ocorre fisicamente é um salto repentino entre os dois pontos de limite. Podemos ver este fenômeno diariamente nos interruptores de luz. É comum em treliças e arcos rasos (do inglês, *shallow*), isto é, suavemente curvados. Na Figura 3(b), mostra o fenômeno *snap-back* que é uma forma amplificada do *snap-through* na qual o caminho de equilíbrio chega a virar. É comum em cúpulas de treliça e em cascas

¹ Alguns autores (GRECO, 2004), traduzem *snap-through* como salto de deslocamento (ou simplesmente salto) e *snap-back* como salto de força.

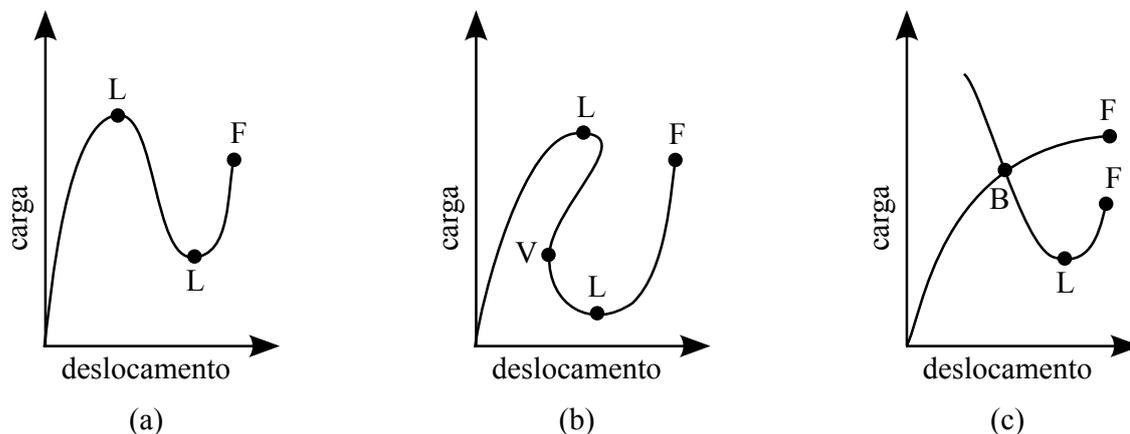


Figura 3 – Pontos especiais no caminho de equilíbrio. (a) *Snap-through* (b) *Snap-back* (c) Bifurcação

finas. A Figura 3(c) ilustra o ponto de bifurcação (cruzamento de dois caminhos). O fenômeno de bifurcação é, às vezes, chamado de flambagem. Na Seção 2.4, será apresentado exemplos de alguns desses fenômenos.

2.4 EXEMPLOS DE PROBLEMAS COM COMPORTAMENTO ESTRUTURAL NÃO LINEAR

2.4.1 Exemplo de bifurcação

Este exemplo é tomado de (WRIGGERS, 2008). Na Figura 4(a) é mostrada uma viga rígida suportada, na extremidade esquerda, por uma mola rotacional elástica com rigidez c . A equação de equilíbrio é formulada com base na Figura 4(b):

$$Fl \sin \theta = c\theta$$

ou seja,

$$\frac{Fl}{c} = \frac{\theta}{\sin \theta} \tag{2.1}$$

A solução trivial deste problema é $\theta = 0$ que é representado pela linha vertical do gráfico da Figura 5 e vale para qualquer valor de F . Para valores de F tal que $\frac{Fl}{c} > 1$, existe uma outra solução também mostrada na Figura 5. O ponto $\frac{Fl}{c}$ é um ponto de bifurcação, isto é, de cruzamento das duas soluções.

Pela Figura 5, a estrutura pode começar seguindo a solução representada pelo caminho da linha vertical. Este caminho torna-se instável a partir do ponto de bifurcação (é mostrado através de uma linha tracejada). Um pequena perturbação fará estrutura tomar o caminho da esquerda ou direita. Neste caso, ocorrerá grandes deslocamentos (chamado de flambagem) com o aumento do carregamento que, em geral, levará a estrutura ao colapso.

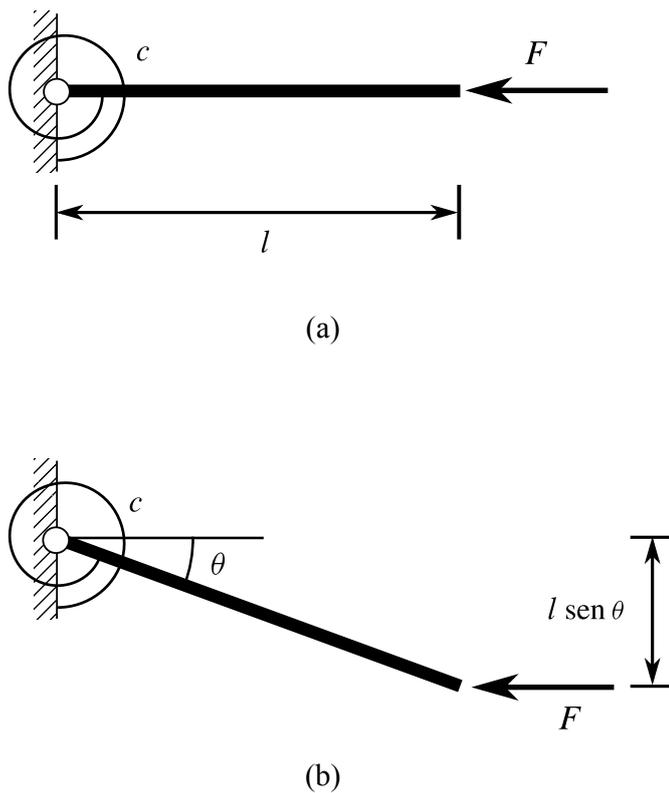


Figura 4 – Estrutura viga e mola

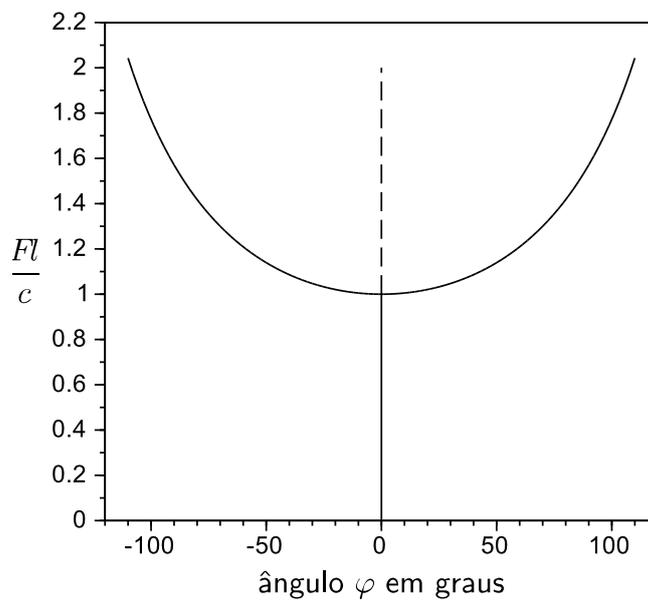


Figura 5 – O problema de bifurcação. A linha sólida representa equilíbrio estável e a linha tracejada representa equilíbrio instável.

Por isso, é importante identificar o ponto de bifurcação e a correspondente carga (de-

nominada de *carga crítica*) na análise da estrutura. Neste problema, a carga crítica (F_c) que corresponde ao ponto de bifurcação é

$$F = F_c = \frac{c}{l}$$

A flambagem ocorre quando a carga aplicada excede a carga crítica.

2.4.2 Exemplo de snap-through

Este exemplo é tomado de (BATHE, 2006). A estrutura apresentada na Figura 6(a) consiste de duas barras suportando uma carga no centro. Devido a simetria da estrutura, é possível simplificar a treliça usando uma das metades da estrutura conforme mostra a Figura 6(b).

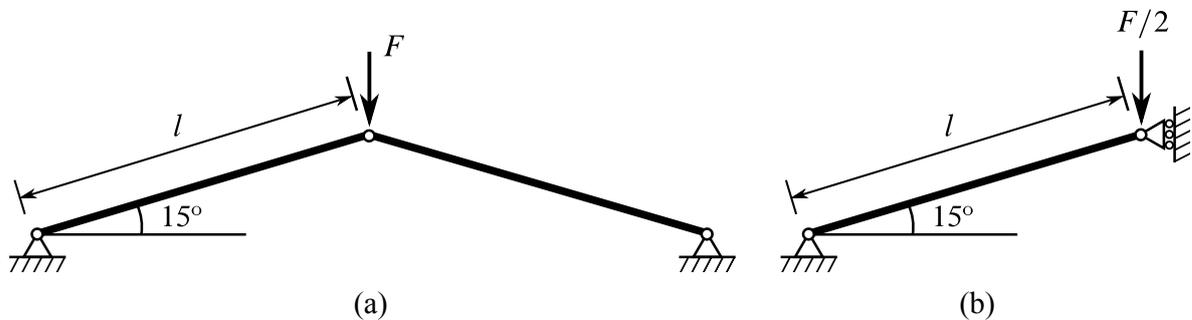


Figura 6 – (a) Treliça de duas barras. (b) Modelo simplificado.

Assume-se que a força axial na barra é dada por $N = k\Delta l$, onde k é a rigidez da barra e Δl é o alongamento da barra. A Figura 7 ilustra a geometria do problema. w é o deslocamento vertical no ponto de aplicação da carga e θ o ângulo depois do deslocamento. A equação de equilíbrio é, portanto, dada por

$$N \sin \theta = k\Delta l \sin \theta = F/2 \tag{2.2}$$

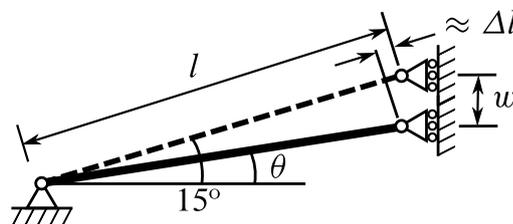


Figura 7 – Geometria do deslocamento da treliça de duas barras.

Pela Figura 7, obtém-se as seguintes relações:

$$(l - \Delta l) \cos \theta = l \cos 15^\circ \tag{2.3}$$

$$(l - \Delta l) \sin \theta = l \sin 15^\circ - w \tag{2.4}$$

Da equação (2.4), temos

$$\text{sen } \theta = \frac{l \text{ sen } 15^\circ - w}{l - \Delta l} \quad (2.5)$$

Elevando ao quadrado ambos os lados da Equação (2.3) e usando a relação $\cos^2 \alpha = 1 - \text{sen}^2 \alpha$, obtém-se

$$(l - \Delta l)^2 (1 - \text{sen}^2 \theta) = l^2 (1 - \text{sen}^2 15^\circ) \quad (2.6)$$

Substituindo (2.5) em (2.6), obtém-se

$$\Delta l = l - \sqrt{l^2 - 2lw \text{ sen } 15^\circ + w^2} \quad (2.7)$$

Finalmente, aplicando (2.5) e (2.7) na equação de equilíbrio (2.2), obtém-se a relação força \times deslocamento dada por

$$\frac{F}{2kl} = \left[-1 + \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{w}{l} \text{ sen } 15^\circ + \left(\frac{w}{l}\right)^2}} \right] \left(\text{sen } 15^\circ - \frac{w}{l} \right) \quad (2.8)$$

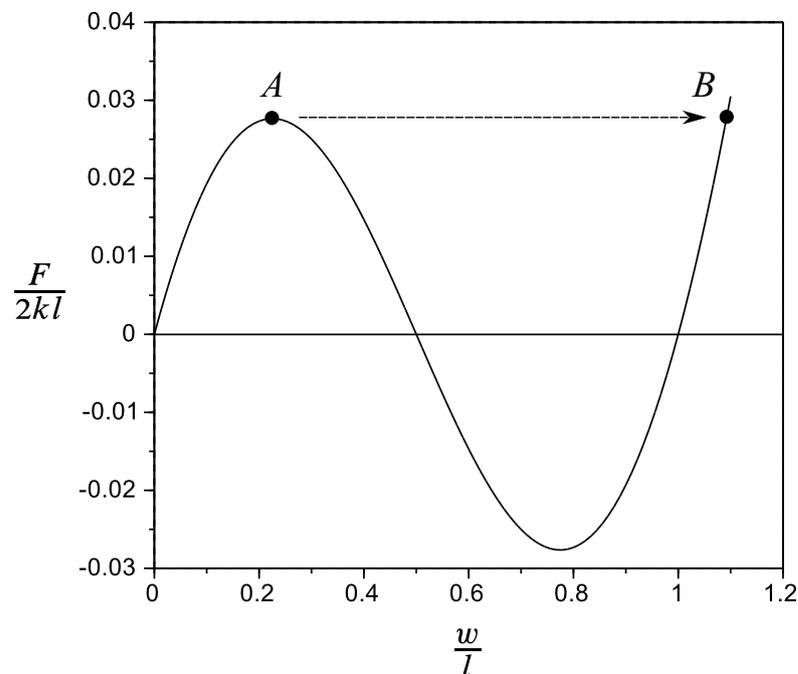


Figura 8 – Relação carga-deslocamento da treliça com duas barras.

A Figura 8 mostra o gráfico da Equação (2.8). O ponto A é um ponto de limite. Após o ponto A, o caminho torna-se instável (tangente negativa). Nota-se que se houver um aumento monotônico de carga, o caminho seguido pelo deslocamento saltará repentinamente toda a

região entre ponto A e o ponto B. Este fenômeno de mudança instantânea entre dois estados de equilíbrio distantes um do outro é o *snap-through*.

Outro exemplo (WRIGGERS, 2008) deste fenômeno é aquele que ocorre na abertura de um pote de geleia na qual ocorre um estalo. Este estalo está relacionado com a queda de pressão interna e com o fenômeno de *snap-through* na tampa do recipiente (uma estrutura de casca fina) e indica que o pote foi aberto pela primeira vez. O fenômeno *snap-through* está associado com treliças, vigas e cascas e placas finas e podem causar o colapso total da estrutura.

2.5 DEFLEXÃO, DESLOCAMENTO E DEFORMAÇÃO

Segundo (FELLIPA, 2012), deflexão é a magnitude ou a amplitude de um deslocamento. Deslocamento é um vetor e deflexão é um escalar. Deformação, na língua portuguesa, tem dois significados diferentes: o significado de *deformation* e o significado de *strain*.

Deformação, no sentido de *deformation* como usado em livros como (OGDEN, 1997), refere-se a uma transformação do corpo de uma configuração de referência para a configuração atual. O conceito de *deformation* não difere um simples movimento de corpo rígido de uma alteração na forma do corpo. Portanto, ambos são deformações no sentido de *deformation*. Já deformação, no sentido de *strain*, refere-se a uma medida adimensional normalizada do deslocamento entre os pontos materiais do corpo com relação a uma configuração (ou comprimento) de referência. *Strain* mede o quanto uma deformação no sentido de *deformation* é diferente de um movimento de corpo rígido. Em (COIMBRA, 1981) evitou-se este duplo significado do termo deformação, adotando-se o termo **mudança de configuração** para o conceito de *deformation*.

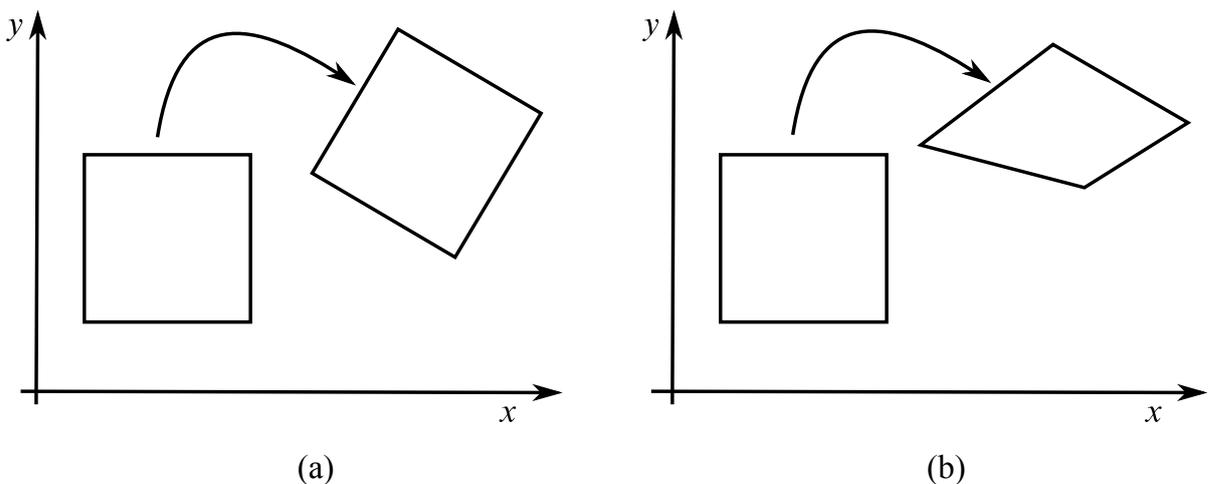


Figura 9 – Diferença entre *deformation* e *strain*. (a) ilustra um movimento de corpo rígido e (b) ilustra um movimento com alteração na forma do corpo. Ambos são *deformation*, mas uma medida de *strain* deveria ser zero em (a) e diferente de zero em (b).

A Figura 9 procura esclarecer estes conceitos. A Figura 9(a) ilustra um movimento de corpo rígido. Na Figura 9(b) ilustra um movimento que não é de corpo rígido, pois o corpo muda de forma. Ambos os movimentos são considerados *deformation* (mudança de configuração). Contudo, qualquer medida de *strain* deveria ser nula para a Figura 9(a) e diferente de zero para a Figura 9(b).

2.6 MEDIDAS DE DEFORMAÇÃO UNIDIMENSIONAL

A deformação de barra é caracterizada por um deslocamento u na barra como mostra a Figura 10. L é comprimento inicial (antes da deformação) da barra e l é seu comprimento após a deformação tal que $u = l - L$.

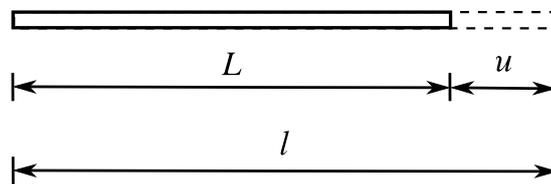


Figura 10 – Alongamento da barra.

Há várias medidas de deformação que podem ser apropriadas para a análise não linear de treliças. O termo deformação usado aqui refere-se ao termo em inglês *strain*. Serão apresentadas nas seções seguintes.

2.6.1 Deformação de engenharia

A *deformação de engenharia* ou de *Cauchy* é a medida de deformação mais simples sendo dada por:

$$\varepsilon_E = \frac{u}{L} = \frac{l - L}{L} \quad (2.9)$$

A deformação de engenharia mede a deformação mesmo que a barra tenha sofrido uma grande rotação na direção de ε_E .

2.6.2 Deformação de Green

Seria conveniente existir uma medida com base em l^2 porque o cálculo do comprimento l envolve uma raiz quadrada que seria eliminada com l^2 . Considerando a deformação de engenharia, podemos reescreve-la da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \varepsilon_E &= \frac{l - L}{L} = \frac{(l - L)(l + L)}{L(l + L)} \\ &= \frac{l^2 - L^2}{L^2(2 + \varepsilon_E)} \end{aligned}$$

No caso da deformação ser pequena temos $\varepsilon_E \approx 0$. Então ε_E pode ser omitido na expressão anterior e teremos,

$$\varepsilon_G = \frac{l^2 - L^2}{2L^2} \quad (2.10)$$

que é denominada de *deformação de Green*.

A relação entre as deformações de Green e engenharia é dada por:

$$\varepsilon_G = \varepsilon_E \left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon_E\right)$$

Há muitos exemplos de estruturas com grandes deslocamentos, mas com pequenas deformações. Nestes casos, a deformação de Green é perfeitamente adequada. Por isso, a deformação de Green e suas versões para duas e três dimensões é bastante utilizada na análise dessas estruturas.

2.6.3 Deformação logarítmica

Se a deformação for muito grande, como ocorre em materiais semelhantes à borracha, então a medida de deformação mais adequada é a *deformação logarítmica*. É também conhecida por deformação *natural*, deformação *verdadeira* ou deformação de *Hencky*. A ideia por trás, é uma medida que some todas os incrementos infinitesimais de deformação que ocorrem durante o alongamento da barra deste do comprimento inicial L até o final l . O incremento infinitesimal de deformação é dado por:

$$d\varepsilon = \frac{dl}{l}$$

A integração deste incremento é a definição da deformação logarítmica:

$$\varepsilon_L = \int_L^l d\varepsilon = \ln \frac{l}{L} \quad (2.11)$$

A relação entre as deformações logarítmica e de engenharia é dada por:

$$\varepsilon_L = \ln(1 + \varepsilon_E)$$

A relação entre as deformações logarítmica e de Green é dada por:

$$\varepsilon_L = \frac{1}{2} \ln(1 + 2\varepsilon_G)$$

Apesar da deformação logarítmica poder ser generalizada para mais de uma dimensão, tal generalização é complexa e de alto custo computacional (BONET; WOOD, 2008).

2.6.4 Deformação de Almansi

A deformação de Almansi ou Euler-Almansi é dada por:

$$\varepsilon_A = \frac{l^2 - L^2}{2l^2} \quad (2.12)$$

A concepção da deformação de Almansi é similar a deformação de Green. A diferença é que a primeira tem como referência a configuração deformada (descrição euleriana) e a segunda tem como referência a configuração inicial (descrição lagrangeana).

2.6.5 Alongamento

A última expressão a ser apresentada é

$$\lambda = \frac{l}{L} \quad (2.13)$$

onde λ é denominado de *alongamento* (do inglês, *stretch*). Colocando as deformações em função do alongamento λ , temos

$$\begin{aligned} \varepsilon_E &= \lambda - 1 && \text{deformação de engenharia} \\ \varepsilon_G &= \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1) && \text{deformação de Green} \\ \varepsilon_L &= \ln \lambda && \text{deformação logarítmica} \\ \varepsilon_A &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda^2} \right) && \text{deformação de Almansi} \end{aligned}$$

2.7 MEDIDAS DE DEFORMAÇÃO BIDIMENSIONAL

Este trabalho de pesquisa utilizada somente medidas de deformação unidimensional por lidar com treliças. Por isso, esta seção descreve, brevemente, somente duas medidas de deformação bidimensional apenas para ressaltar diferenças entre a análise linear e não linear.

Começaremos com um exemplo tomado de (BONET; WOOD, 2008). Considere (X, Y) (em maiúsculas) e (x, y) (em minúsculas) como sendo as posições inicial e final (após o deslocamento) de uma partícula qualquer de um sólido. Neste exemplo, as duas posições estão relacionadas por

$$x = -Y, \quad y = X$$

O deslocamento sofrido pelo ponto (X, Y) é, portanto,

$$u_x = x - X = -X - Y$$

$$u_y = y - Y = X - Y$$

Este conjunto de fórmulas é denominado de *campo de deslocamentos*.

Aplicando aqueles deslocamentos em cada ponto do seguimento de reta OP da Figura 11 obtêm-se o seguimento de reta OP'. A seguir, calcula-se as deformações usando medidas para deformações pequenas e para deformações grandes para mostrar a inadequação da medida para deformações pequenas neste exemplo.

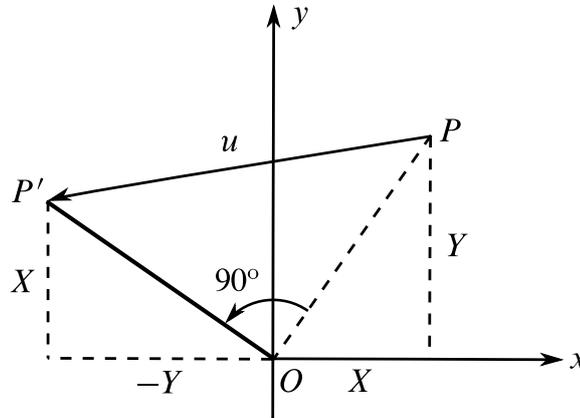


Figura 11 – Rotação de 90° de partículas de corpo sólido.

Na análise linear, mede-se a deformação de uma partícula através do seguinte tensor:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} \end{bmatrix}$$

onde seus componentes são

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial X} \tag{2.14a}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial Y} \tag{2.14b}$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial Y} + \frac{\partial u_y}{\partial X} \right) \tag{2.14c}$$

Este tensor é bem conhecido dos livros de resistência dos materiais. Alguns autores (LAI; RUBIN; KREMPL, 2009) denominam este tensor de *tensor de deformação infinitesimal* porque assume que as deformações são pequenas (infinitesimais).

Aplicando as fórmulas (2.14) no exemplo, obtêm-se as seguintes deformações:

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = -1; \epsilon_{xy} = 0 \tag{2.15}$$

Claramente o deslocamento de OP para OP' é uma rotação de corpo rígido e, por isso, não existe deformação alguma. Então as deformações fornecidas em (2.15) estão incorretas, pois todas deveriam ser nulas.

Na análise não linear, utiliza-se frequentemente a deformação de Green que quando generalizado para duas dimensões é dado pelo tensor:

$$\begin{bmatrix} E_{xx} & E_{xy} \\ E_{xy} & E_{yy} \end{bmatrix}$$

onde os componentes são

$$E_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial X} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial X} \right)^2 \right] \quad (2.16a)$$

$$E_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial Y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial Y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial Y} \right)^2 \right] \quad (2.16b)$$

$$E_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial Y} + \frac{\partial u_x}{\partial X} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial X} \frac{\partial u_x}{\partial Y} + \frac{\partial u_y}{\partial X} \frac{\partial u_y}{\partial Y} \right) \quad (2.16c)$$

Aplicando as fórmulas (2.16) para mesmo o exemplo, obtêm-se a resposta correta (de acordo com nossa intuição) para a deformação:

$$E_{xx} = E_{yy} = E_{xy} = 0 \quad (2.17)$$

Comparando as duas medidas descritas na seção, ou seja (2.14) e (2.16), nota-se que a medida de deformação de Green usada na análise não linear é bem mais complexa que a deformação infinitesimal. Em geral, as fórmulas envolvidas na análise não linear são mais complexas e de maior custo computacional. Nota-se também que para pequenas deformações, o tensor de deformação de Green se reduz (tende) ao tensor de deformação infinitesimal.

Uma descrição detalhada do tensor de deformação infinitesimal e de Green (também conhecido como *tensor de deformação lagrangeano*) podem ser encontrada em livros de mecânica do contínuo (MALVERN, 1977; LAI; RUBIN; KREMPL, 2009; MASE; SMELSER; MASE, 2009).

CAPÍTULO 3

Métodos Numéricos para Análise Estrutural Não Linear

O problema básico da análise não linear é encontrar a configuração de equilíbrio de uma estrutura que está sob a ação de forças aplicadas. As condições de equilíbrio dos elementos finitos que representam esta estrutura podem ser expressas pelo seguinte sistema de equações não lineares (BATHE, 2006):

$$\mathbf{q} - \mathbf{f} = 0 \quad (3.1)$$

onde \mathbf{f} é o vetor de forças externas nodais e \mathbf{q} é o vetor de forças internas nodais correspondente às tensões da estrutura. Este capítulo descreve alguns dos métodos numéricos mais conhecidos para resolver estas equações não lineares. A exposição começa com o método de Newton-Raphson para um grau de liberdade porque simplifica a sua interpretação geométrica. Depois, será apresentado o procedimento incremental-iterativo e, por fim, o método do comprimento de arco.

3.1 MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

3.1.1 Método de Newton-Raphson para um grau de liberdade

O método de Newton-Raphson (também chamado de método de Newton¹) é um método numérico clássico aplicado na engenharia e na ciência para resolver sistemas de equações não lineares. A apresentação a seguir começa descrevendo esse método de uma forma genérica para em seguida ser particularizado para a solução da Equação (3.1).

Considere uma equação escrita na forma $g(x) = 0$. Suponha que $g(x)$ é contínua e diferenciável e tenha raiz próxima de um ponto estimado. A Figura 12 mostra o método de Newton sendo processado para encontrar a raiz de $g(x) = 0$. O método começa a partir de um ponto x_0 que é a primeira estimativa da raiz (em geral, uma simples suposição). A próxima estimativa é x_1 , obtida pelo cruzamento do eixo x com a reta tangente à $g(x)$ no ponto

¹ Não confundir com o método de Newton usado em otimização.

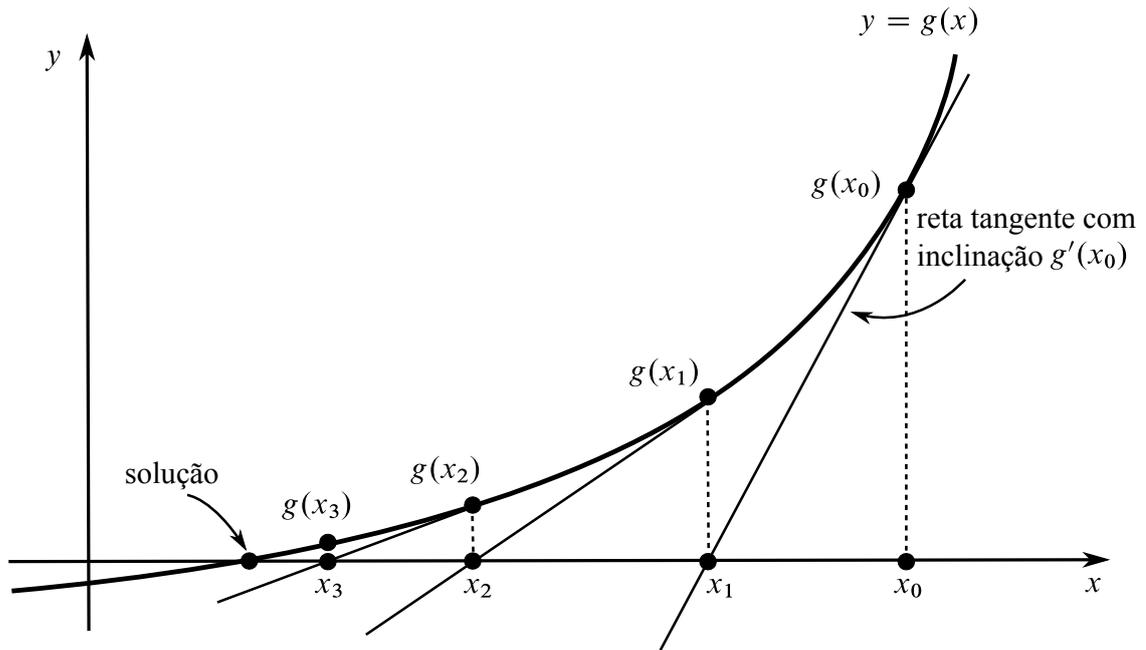


Figura 12 – O método de Newton-Raphson.

$(x_0, g(x_0))$. As outras estimativas x_2, x_3, \dots são obtidas de forma semelhante. A sequência de estimativas é obtida pela fórmula:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{g(x_i)}{g'(x_i)} \tag{3.2}$$

Esta fórmula pode ser deduzida sem esforço observando a Figura 12, mas também pode ser deduzida pela expansão em série de Taylor de $g(x)$. Em torno do ponto x_i , a série é dada por:

$$g(x) = g(x_i) + (x - x_i)g'(x_i) + \frac{1}{2!}(x - x_i)^2g''(x_i) + \dots$$

Fazendo $g(x) = 0$ (pois procura-se a raiz) e desprezando os termos de segunda ordem e superior, obtém-se

$$0 \approx g(x_i) + (x - x_i)g'(x_i)$$

logo,

$$x \approx x_i - \frac{g(x_i)}{g'(x_i)}$$

e substituindo x por x_{i+1} , obtém-se (3.2).

A seguir, o método será aplicado a uma treliça simples tomada de (CRISFIELD, 1991) e ilustrada na Figura 13. A barra tem módulo de elasticidade E e área da seção A . A equação de equilíbrio vertical é dada por

$$q(u) - f = 0$$

onde q é a força interna na barra e f é a força externa. Neste exemplo, $q = N \sin \theta$ onde N

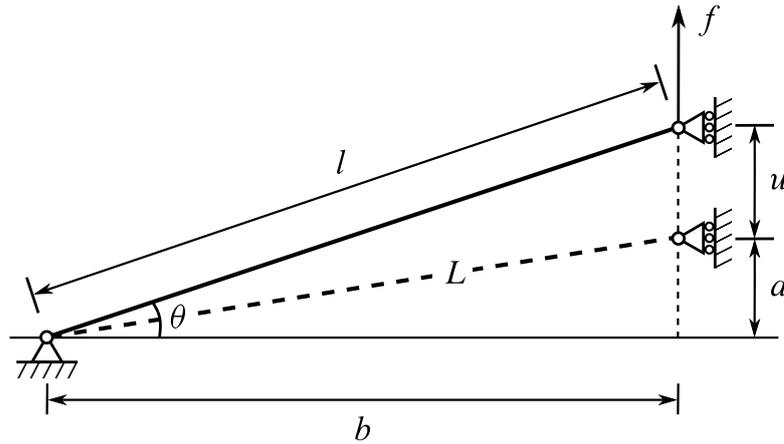


Figura 13 – Treliça com um grau de liberdade.

sendo a força axial na barra. Assume-se aqui que θ é pequeno. Portanto, tem-se

$$q(u) = N \text{sen } \theta = \frac{N(a + u)}{l} \approx \frac{N(a + u)}{L} \quad (3.3)$$

O método de Newton-Raphson é utilizado aqui para encontrar a raiz da função:

$$g(u) = q(u) - f = 0$$

Aplicação a Equação (3.2) para função $g(u)$, obtém-se

$$u_{i+1} = u_i - K_t^{-1}g(u_i) \quad (3.4)$$

onde,

$$K_t = g'(u_i) = \frac{d}{du}[q(u) - f] = \frac{dq(u)}{du}$$

pois $df/du = 0$ uma vez que f é uma constante.

Na mecânica computacional, K_t é chamado de *tangente de rigidez* e $g(u_i)$ é chamado de *força residual* ou *força de desequilíbrio* (do inglês, *out-of-balance force*). Contudo, é importante distinguir a tangente de rigidez do método de Newton-Raphson com a tangente de rigidez que está sobre o caminho de equilíbrio pois esta tem uma importante interpretação física relacionada com a estabilidade da estrutura, conforme mencionado na Seção 2.3.2. Já a primeira pode não ter relação com o estado de equilíbrio até antes do método convergir, podendo tornar-se positiva, negativa ou zero durante o processo de convergência, sem que isto tenha relação alguma com a estabilidade da estrutura.

Frequentemente, a Equação (3.4) é apresentada desdobrada em duas:

$$\begin{aligned} \Delta u_i &= -K_t^{-1}g(u_i) \\ u_{i+1} &= u_i + \Delta u_i \end{aligned}$$

A Figura 14 mostra o método de Newton de uma forma diferente, mas equivalente, da que foi apresentada na Figura 12. A Figura 14 mostra o processo de convergência para a interseção da curva $q(u)$ com uma reta horizontal de altura f . Começando com uma estimativa inicial u_0 , obtêm-se uma nova estimativa

$$u_1 = u_0 + \Delta u_0, \quad \text{onde } \Delta u_0 = -K_t^{-1}g(u_0)$$

E assim por diante:

$$u_2 = u_1 + \Delta u_1, \quad \text{onde } \Delta u_1 = -K_t^{-1}g(u_1)$$

$$u_3 = u_2 + \Delta u_2, \quad \text{onde } \Delta u_2 = -K_t^{-1}g(u_2)$$

⋮

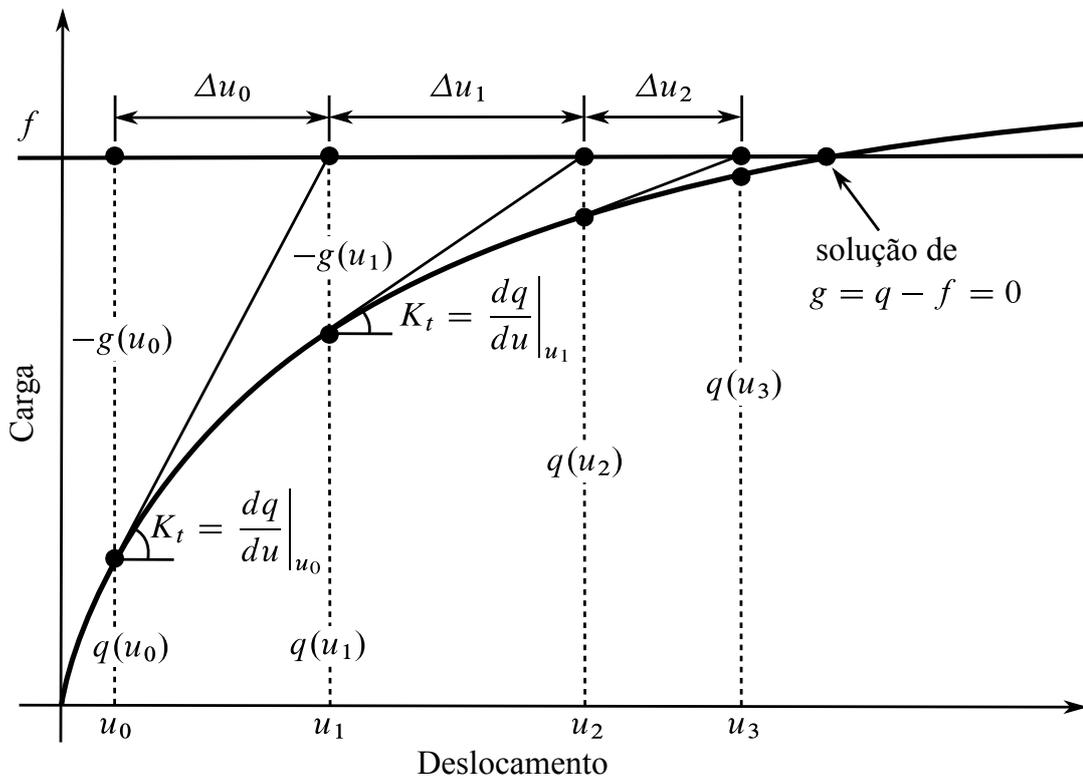


Figura 14 – Método de Newton-Raphson resolvendo a equação de equilíbrio.

As iterações terminam quando satisfaz a algum critério de parada. Dois critérios de parada comumente usados são (GILAT; SUBRAMANIAN, 2008):

1. Erro relativo estimado: as iterações terminam quando o erro relativo é menor do que um valor de tolerância "tol" pré-especificado:

$$\left| \frac{u_{i+1} - u_i}{u_i} \right| = \left| \frac{\Delta u_i}{u_i} \right| \leq \text{tol}$$

2. Tolerância em $g(u)$: as iterações terminam quando o valor absoluto de $g(u_i)$ é menor do que um valor de tolerância “tol” pré-especificado:

$$|g(u_i)| \leq \text{tol}$$

A seguir será determinado a tangente de rigidez para este problema. Considerando que a força axial na barra é $N = EA\varepsilon$, então a tangente de rigidez, Equação 3.3, é

$$K_t = \frac{dq}{du} = EA \frac{d\varepsilon}{du} \left(\frac{a+u}{L} \right) + \frac{N}{L} \quad (3.5)$$

Adotando a deformação de Green, Equação (4.17), tem-se

$$\varepsilon = \frac{l^2 - L^2}{2L^2} = \frac{(a+u)^2 + b^2 - (a^2 + b^2)}{2L^2} = \left(\frac{a}{L} \right) \left(\frac{u}{L} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{u}{L} \right)^2 \quad (3.6)$$

e substituindo $\frac{d\varepsilon}{du}$ em (3.5), obtém-se

$$K_t = \frac{EA}{L} \left(\frac{a}{L} \right)^2 + \frac{EA}{L} \left(\frac{2au + u^2}{L^2} \right) + \frac{N}{L} \quad (3.7)$$

Em problemas com mais de um grau de liberdade, a tangente de rigidez torna-se uma matriz chamada de *matriz de rigidez tangente* \mathbf{K}_t . Deste modo, os três termos do lado direito da Equação (3.7) pode ser interpretados do seguinte modo. O primeiro termo é chamado de *matriz de rigidez linear* porque é constante uma vez que é função apenas da geometria inicial. O segundo termo é chamado de *matriz de deslocamento inicial* e representa uma contribuição geométrica e não linear. O último termo é chamado de *matriz de tensão inicial* e é importante no estudo da estabilidade dos membros estruturais que estão sujeitas a forças compressivas (BORST et al., 2012).

3.1.2 Método de Newton-Raphson para mais de um grau de liberdade

Nesta seção, o método de Newton-Raphson é estendido para mais de um grau de liberdade utilizando o exemplo mostrado na Figura 15 que difere do exemplo anterior somente pela adição de um segundo grau de liberdade. Agora há duas equações de equilíbrio que juntas formam o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} g_1(u_1, u_2) = q_1(u_1, u_2) - f_1 = 0 \\ g_2(u_1, u_2) = q_2(u_1, u_2) - f_2 = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

onde,

$$\begin{aligned} q_1 &= N \cos \theta \approx N \\ q_2 &= N \sin \theta \approx \frac{N(a+u_2)}{L} \end{aligned}$$

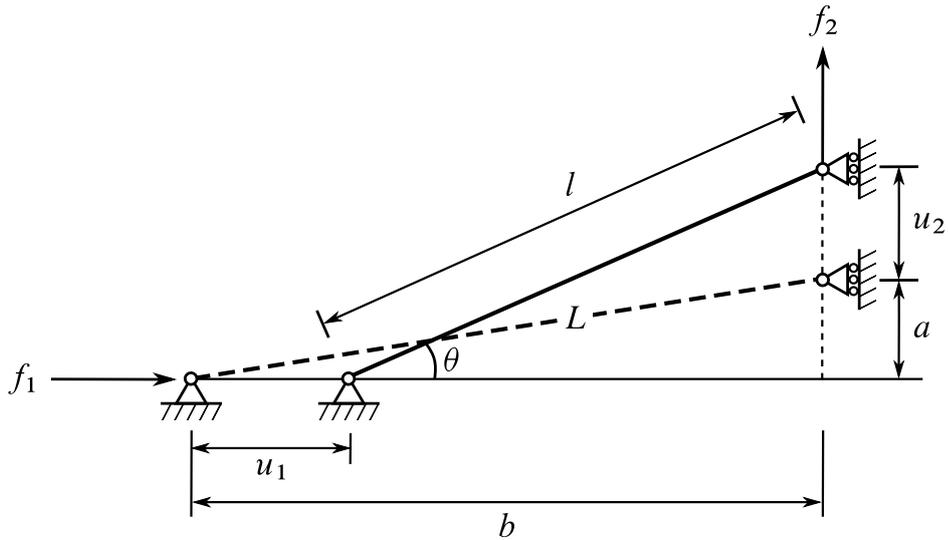


Figura 15 – Treliza com dois graus de liberdade.

O método de Newton-Raphson para mais de um grau de liberdade é deduzido de forma similar a seção anterior. Aplicando a expansão em série de Taylor (já truncada) no sistema (3.8) no ponto $(u_{1,i}, u_{2,i})$, tem-se

$$g_1(u_1, u_2) = g_1(u_{1,i}, u_{2,i}) + (u_1 - u_{1,i}) \frac{\partial g_1}{\partial u_1} + (u_2 - u_{2,i}) \frac{\partial g_1}{\partial u_2} \quad (3.9a)$$

$$g_2(u_1, u_2) = g_2(u_{1,i}, u_{2,i}) + (u_1 - u_{1,i}) \frac{\partial g_2}{\partial u_1} + (u_2 - u_{2,i}) \frac{\partial g_2}{\partial u_2} \quad (3.9b)$$

ressaltando que as derivadas são calculadas no ponto $(u_{1,i}, u_{2,i})$. Tem-se que

$$\frac{\partial g_i}{\partial u_j} = \frac{\partial [q_i - f_i]}{\partial u_j} = \frac{\partial q_i}{\partial u_j}, \quad (3.10)$$

Agora, aplica-se (3.10) nas equações (3.9) e considera-se que $g_1(u_1, u_2) = 0$ e $g_2(u_1, u_2) = 0$ (pois procura-se a raiz). Depois, faz-se o rearranjo das equações (3.9) em forma de matrizes e obtém-se

$$\begin{bmatrix} g_1(u_{1,i}, u_{2,i}) \\ g_2(u_{1,i}, u_{2,i}) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial u_1} & \frac{\partial q_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial q_2}{\partial u_1} & \frac{\partial q_2}{\partial u_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 - u_{1,i} \\ u_2 - u_{2,i} \end{bmatrix}$$

Substituindo (u_1, u_2) por $(u_{1,i+1}, u_{2,i+1})$, obtém-se a fórmula do método de Newton-Raphson:

$$\Delta \mathbf{u}_i = -\mathbf{K}_t^{-1} \mathbf{g}_i \quad (3.11)$$

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \Delta \mathbf{u}_i \quad (3.12)$$

onde,

$$\mathbf{u}_i^T = [u_{1,i}, u_{2,i}], \quad \Delta \mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} u_{1,i+1} - u_{1,i} \\ u_{2,i+1} - u_{2,i} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_t = \begin{bmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial u_1} & \frac{\partial q_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial q_2}{\partial u_1} & \frac{\partial q_2}{\partial u_2} \end{bmatrix} = \frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{u}_i)}{\partial \mathbf{u}}$$

$$\mathbf{g}_i = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{u}_i) \\ g_2(\mathbf{u}_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1(\mathbf{u}_i) - f_1 \\ q_2(\mathbf{u}_i) - f_2 \end{bmatrix} = \mathbf{q}_i - \mathbf{f}$$

Nota-se que a matriz de rigidez \mathbf{K}_t é a matriz *jacobiana* das forças internas \mathbf{q} e, no Capítulo 4, será mostrado que ela é também a matriz *hessiana* da energia de deformação. Em estruturas com comportamento linear, o valor de \mathbf{K}_t é constante sendo chamado simplesmente de matriz de rigidez \mathbf{K} sem o subscrito t . Ambos \mathbf{K} e \mathbf{K}_t relacionam pequenas variações de cargas ou forças com pequenas variações de deslocamentos.

Para sistemas com n graus de liberdade, a matriz tangente de rigidez torna-se:

$$\mathbf{K}_t = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial u_1} & \frac{\partial q_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial q_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial q_2}{\partial u_1} & \frac{\partial q_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial q_2}{\partial u_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial q_n}{\partial u_1} & \frac{\partial q_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial q_n}{\partial u_n} \end{bmatrix}$$

Computacionalmente, a Equação (3.11) não é resolvida determinando a inversa \mathbf{K}_t^{-1} . A expressão \mathbf{K}_t^{-1} foi usada apenas por simplicidade notacional. No computador, é resolvido o sistema linear correspondente

$$\mathbf{g}_i = -\mathbf{K}_t \Delta \mathbf{u}_i,$$

em geral, através da fatoração de \mathbf{K}_t usando decomposição LU. Descrições de decomposição LU são encontradas em livros texto de métodos numéricos (CHAPRA; CANALE, 2008; BURDEN; FAIRES, 2003).

3.2 ANÁLISE INCREMENTAL-ITERATIVA

O método de Newton-Raphson só fornece a solução de um simples ponto no caminho de equilíbrio. Para obter outros pontos, combina-se as iterações de Newton-Raphson com um procedimento incremental. A ideia é aplicar as iterações para vários ciclos de nível de carga. Ou seja, no primeiro ciclo obtém-se uma solução para um nível de carga $\Delta \mathbf{f}$. No segundo ciclo, obtém-se outra solução para um nível de carga $2\Delta \mathbf{f}$ e assim por diante, gerando uma

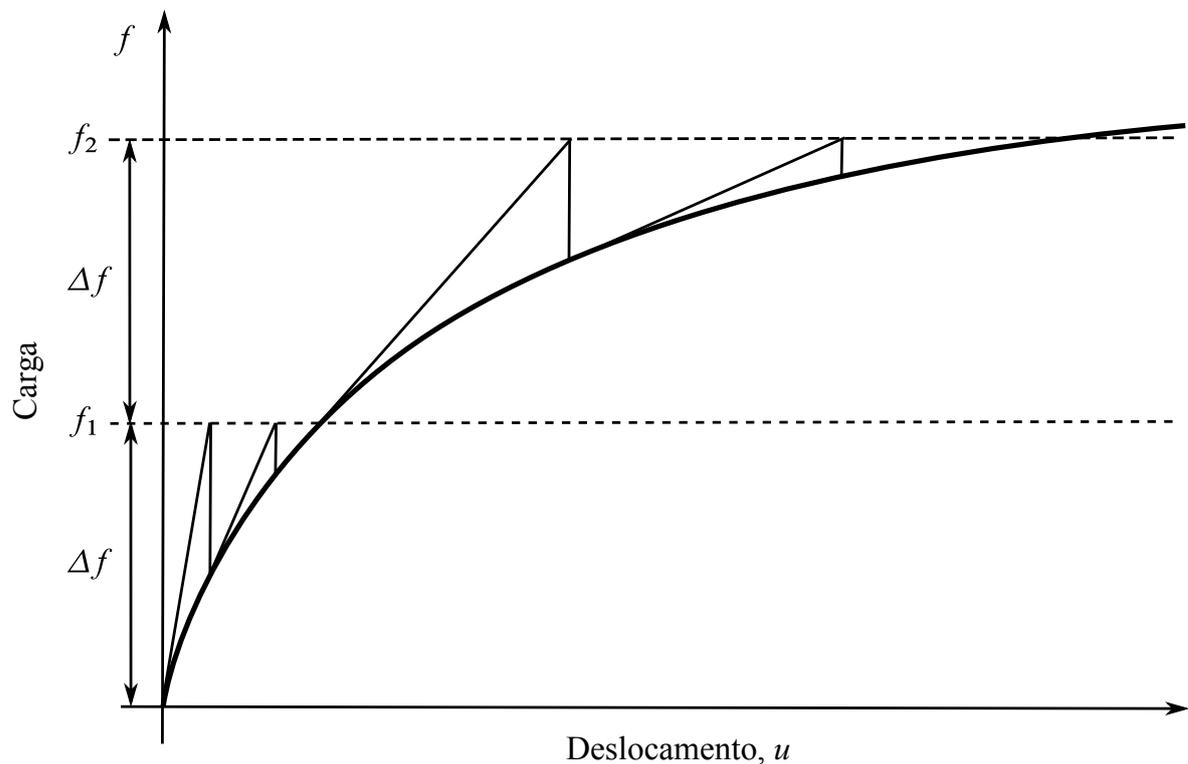


Figura 16 – Procedimento Incremental-Iterativo com o Método de Newton-Raphson.

```

f = Δf, u = 0;
for n = 1 to  $n_{max}$  do
  | g = q(u) - f;
  | for i = 1 to  $i_{max}$  do
  | |  $\mathbf{K}_t = \frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}$ ;
  | | Δu = - $\mathbf{K}_t^{-1}$ g;
  | | u = u + Δu;
  | | g = q(u) - f;
  | | if ||g|| ≤ tol · ||Δf|| then break;
  | end
  | output u, f;
  | f = f + Δf
end

```

Algoritmo 1: Procedimento Incremental-Iterativo com o Método de Newton-Raphson.

solução para cada nível de carga. O procedimento é ilustrado na Figura 16 e descrito no Algoritmo 1.

CrITÉRIOS de parada tipicamente usados no método de Newton-Raphson com mais de um grau de liberdade são:

1. Erro relativo estimado:

$$\frac{\|\Delta \mathbf{u}_i\|}{\|\mathbf{u}_i\|} \leq \text{tol}$$

2. Tolerância em $\mathbf{g}(\mathbf{u})$:

$$\frac{\|\mathbf{g}\|}{\|\Delta \mathbf{f}\|} < \text{tol}$$

onde “tol” é a tolerância, um pequeno valor pré-especificado pelo usuário.

O procedimento incremental-iterativo deveria ser usado mesmo quando se busca uma solução para um único nível de carga. Impor uma grande carga \mathbf{f} de uma só vez para o método de Newton-Raphson pode levar a problemas de convergência. Pois, a solução inicial pode estar muito longe da solução final e neste caso, a prática mostra que as iterações podem encontrar dificuldades para convergir e até mesmo não encontrar a solução do problema. Incrementar a carga lentamente até atingir a carga desejada \mathbf{f} , torna a solução inicial, em cada nível, próxima da solução final facilitando a convergência.

Além disso, o procedimento incremental-iterativo é importante para materiais que exibem dependência do caminho seguido pela estrutura durante sua deformação. Diferentes tensões podem ser obtidas dependendo da forma com que são aplicadas as cargas. Aplicar incrementos de cargas pequenos permite seguir mais de perto o caminho de deformação e obter a solução correta do problema (BORST et al., 2012).

3.2.1 Método de Newton-Raphson modificado

O método de Newton-Raphson requer computar e fatorar a matriz de rigidez tangente em cada iteração. Há problemas que geram grandes matrizes de rigidez tangente, principalmente problemas tridimensionais. Nesses casos, o custo computacional de montar e fatorar grandes matrizes repetidas vezes é consideravelmente alto. Vários métodos tem sido propostos, para lidar com esse problema como o método de Newton-Raphson Modificado, entre outros.

O método de Newton-Raphson modificado consiste em computar a matriz de rigidez tangente uma única vez e na primeira iteração de cada ciclo de nível de carga no procedimento incremental-iterativo. O procedimento é ilustrado na Figura 17 e descrito no Algoritmo 2.

O método de Newton-Raphson modificado pode ser bem eficiente quando se usa decomposição LU para resolver os sistemas lineares. Pois, a matriz de rigidez tangente é fatorada uma única vez em cada ciclo e a mesma fatoração é reaproveitada para resolver o sistemas lineares das iterações seguintes do ciclo.

A convergência do método de Newton-Raphson modificado é mais lenta (requer maior número de iterações) do que o método de Newton-Raphson e isso pode diminuir ou mesmo anular sua possível vantagem computacional. Mas, há outros métodos alternativos (e mais

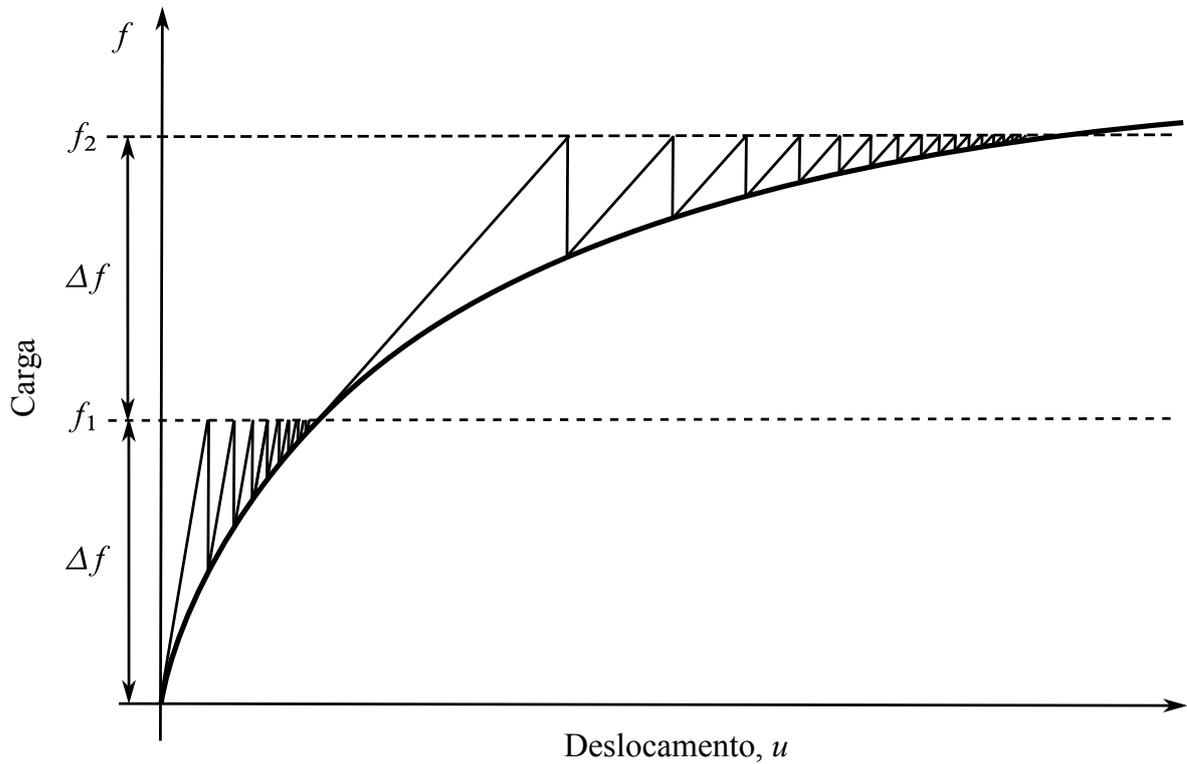


Figura 17 – Procedimento Incremental-Iterativo com o Método de Newton-Raphson Modificado.

```

f = Δf, u = 0;
for n = 1 to  $n_{max}$  do
     $\mathbf{K}_t = \frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}$ ;
    g = q(u) - f;
    for i = 1 to  $i_{max}$  do
        Δu = - $\mathbf{K}_t^{-1}$ g;
        u = u + Δu;
        g = q(u) - f;
        if ||g|| ≤ tol · ||Δf|| then break;
    end
    output u, f;
    f = f + Δf
end

```

Algoritmo 2: Procedimento Incremental-Iterativo com o Método de Newton-Raphson Modificado.

sofisticados) para lidar com o alto custo computacional do Newton-Raphson, como por exemplo, os métodos quasi-Newton cuja descrição pode ser encontrada em (KRENK, 2009) e em livros textos de otimização numérica ou programação não linear em geral (LUENBERGER, 2009).

3.2.2 Controle de carga versus controle de deslocamento

Na seção 3.2, as cargas foram aplicadas de forma incremental. Uma outra alternativa é prescrever deslocamentos incrementais em vez de cargas incrementais. A primeira alternativa é denominada *controle de carga* e a segunda é chamada de *controle de deslocamento*. Quando um deslocamento é prescrito em um nó, geram-se tensões na estrutura que resulta em uma força naquele nó que é oposta, mas igual em módulo, a força externa que causaria o mesmo deslocamento que foi prescrito naquele nó.

O controle de carga tem suas limitações para traçar o caminho de equilíbrio. Por exemplo, na Figura 18(a) não seria possível alcançar o ponto B. Pois o aumento de carga faria o trajeto saltar diretamente para o ponto C. E mesmo neste caso, pode causar problemas de convergência. A matriz de rigidez tangente torna-se singular no ponto A (ponto de limite) do caminho de equilíbrio como mostra a Figura 18(b) e por isso não pode ser invertida. Isto significa que a tangente de rigidez é horizontal. Além disso, um salto de A para C pode ser muito para que o método de Newton-Raphson possa convergir corretamente.

O controle de deslocamento deveria, sempre que possível, ser utilizado no lugar do controle de carga pois supera parte de suas limitações. O ponto B da Figura 18(c) seria alcançado naturalmente e a matriz de rigidez tangente não se tornaria singular no ponto de máximo (ponto de limite).

Contudo, o *snap-back* causa dificuldades ao controle de deslocamento da mesma forma que o *snap-through* causa ao controle de carga. Por exemplo, o controle de deslocamento não pode alcançar pontos como o ponto B da Figura 18(c), saltando de A para C. Um método indicado para resolver todos esses problemas é denominado de método do comprimento de arco, descrito a seguir.

3.3 MÉTODO DO COMPRIMENTO DE ARCO

Foram vistos, anteriormente, procedimentos para determinar o caminho de equilíbrio controlando a carga ou o deslocamento. Foi mostrado que estes procedimentos tem suas limitações, tais como tangente horizontal nos pontos de limite e dificuldade de seguir o caminho gerado pelo fenômeno *snap-back*. O método do comprimento de arco supera todos estes problemas de uma forma elegante e eficiente. De fato, ele tornou-se método preferido para determinar o caminho de equilíbrio, apesar de outros métodos também terem sido propostos. Ver (KRENK, 2009).

No método do comprimento de arco incrementa-se simultaneamente tanto a carga como o deslocamento. Para conseguir isto, adiciona-se uma nova equação ou restrição no sistema de equações de equilíbrio e uma nova incógnita: *o fator de carga*. A Figura 19 ilustra o processamento do método do comprimento de arco para diferentes tipos de restrições utilizando iterações do método de Newton-Raphson. A Figura 19(a) ilustra a restrição deno-

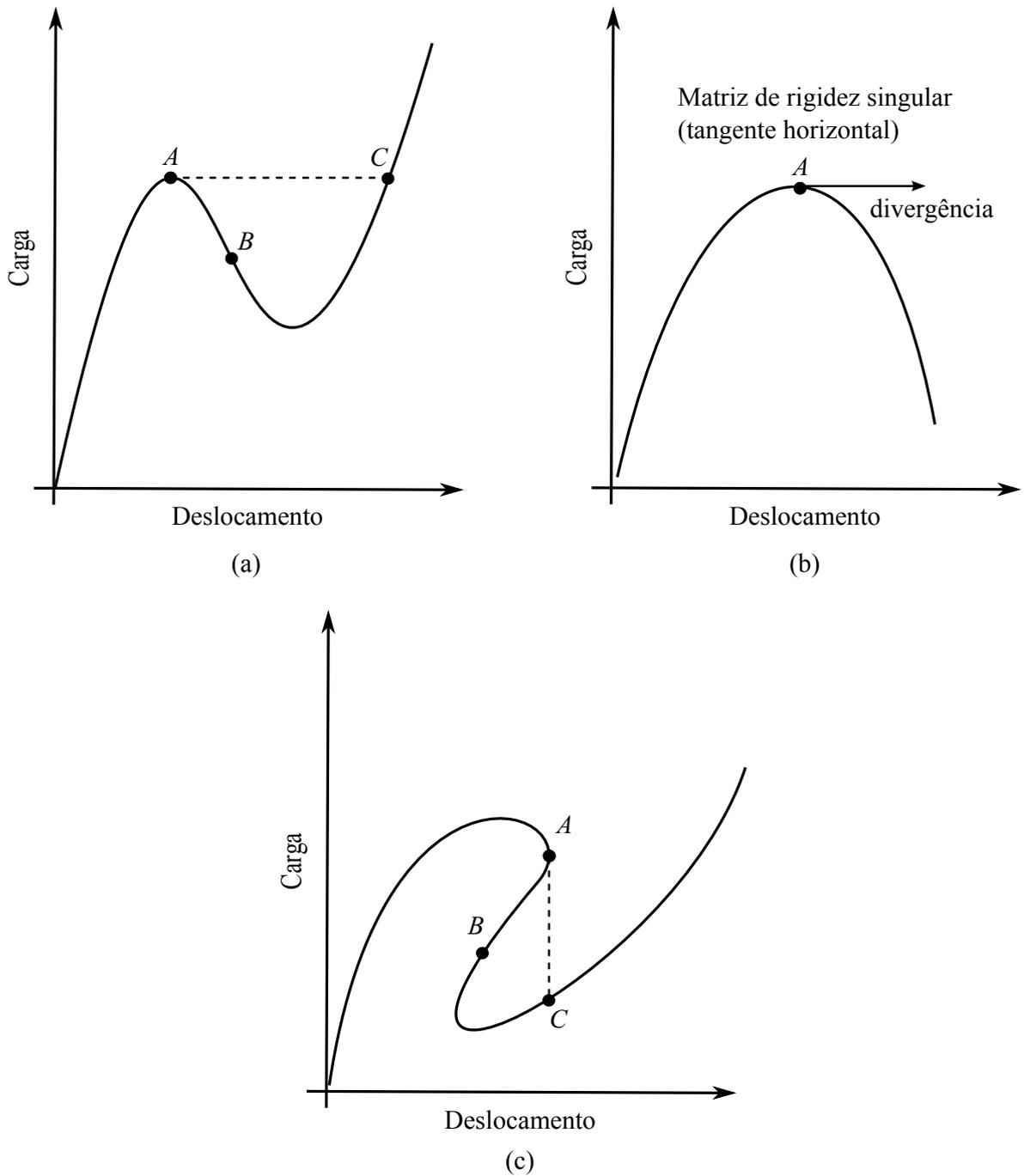


Figura 18 – Limitações do controle de carga e controle de deslocamento. (a) Snap-through. (b) Matriz de rigidez tangente singular. (c) Snap-back.

minada de restrição de hiperesfera. Versões linearizadas desta restrição são chamadas de restrições de hiperplano e são mostradas na Figura 19(b) (hiperplano atualizado) e na Figura 19(c) (hiperplano fixo). A apresentação a seguir, começa descrevendo o método com a restrição de hiperesfera.

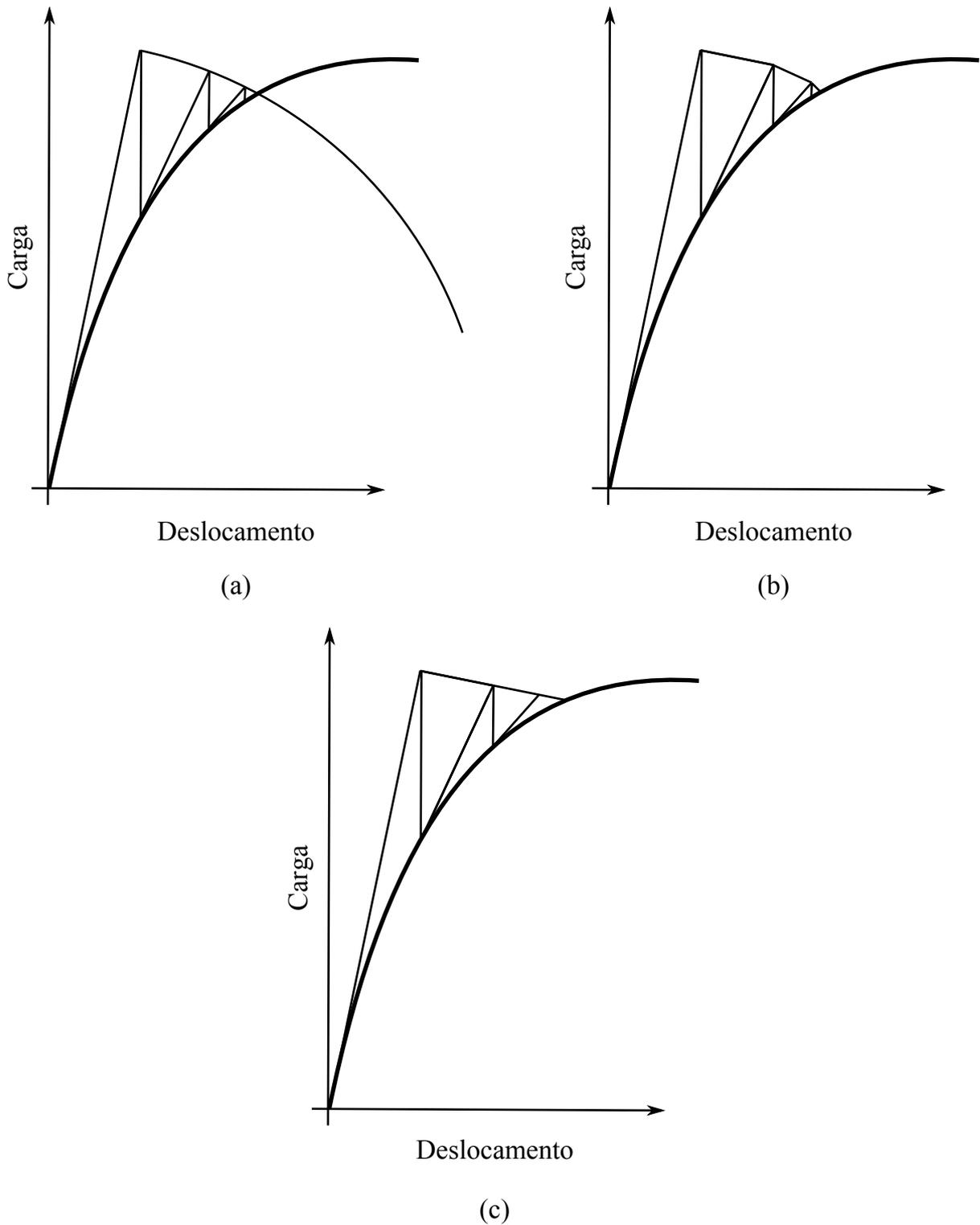


Figura 19 – Restrições no Método do Comprimento de Arco. (a) Restrição de hiperesfera. (b) Restrição de hiperplano atualizado. (c) Restrição hiperplano fixo.

3.3.1 Restrição de hiperesfera

O método de comprimento de arco controla os incrementos de carga e deslocamento. O incremento do deslocamento é representado por $\Delta \mathbf{u}$. A carga é expressa de uma forma

normalizada como sendo o produto de uma carga fixa \hat{f} por um fator de carga λ , ou seja, $f = \lambda \hat{f}$. O incremento de carga é representado por $\Delta \lambda \hat{f}$.

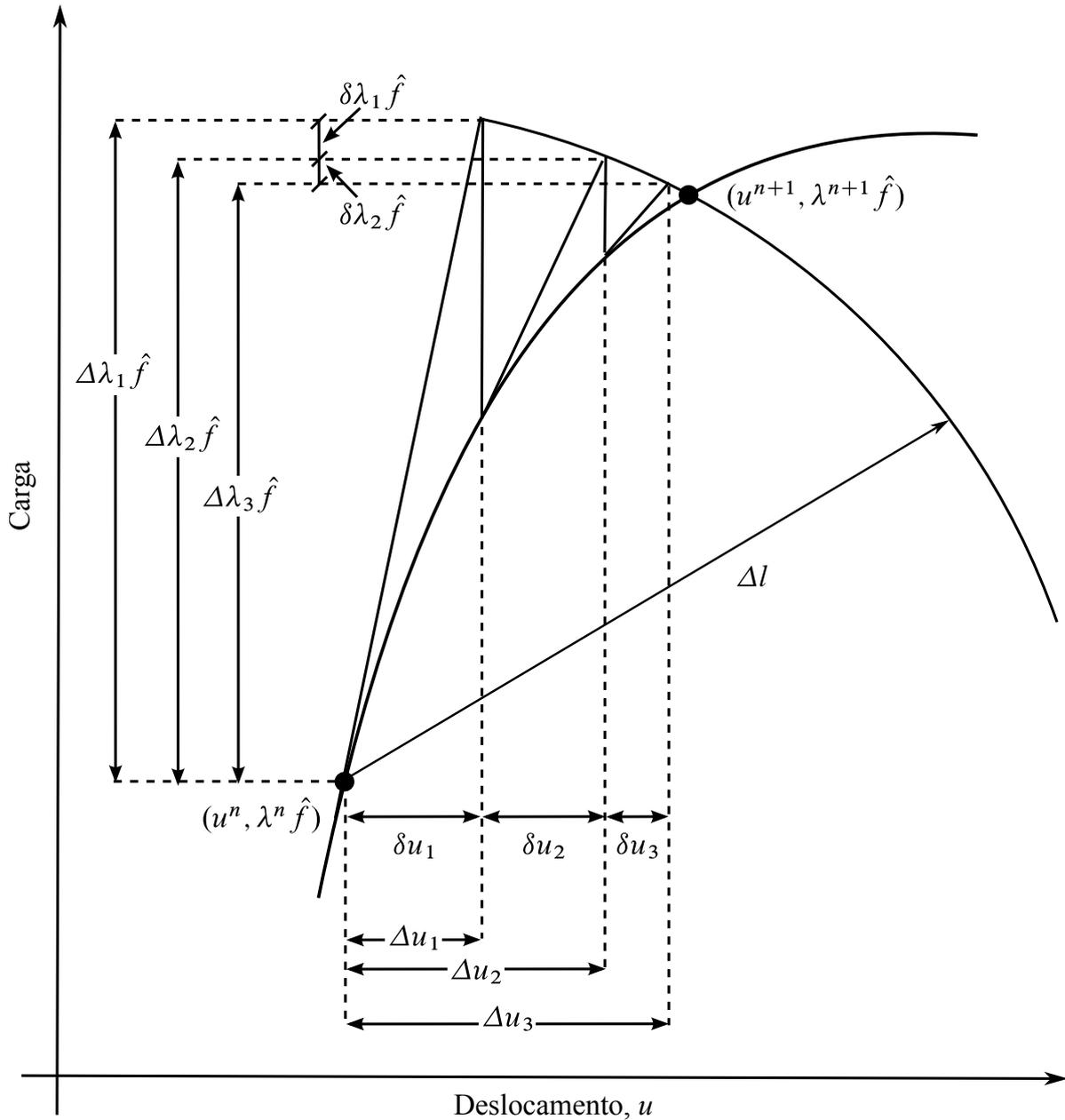


Figura 20 – Método do Comprimento de Arco Hiperesférico.

A restrição de hiperesfera, mostrada na Figura 20, foi proposta por (CRISFIELD, 1981) e é ainda muito utilizada. É expressa matematicamente pela equação:

$$c = (\Delta \mathbf{u}^T \Delta \mathbf{u} + \Delta \lambda^2 \psi^2 \hat{\mathbf{f}}^T \hat{\mathbf{f}}) - \Delta l^2 = 0 \quad (3.13)$$

onde Δl é o comprimento de arco que de certo modo determina o incremento de carga. ψ é um fator de escala necessário para o termo de carga porque unidades diferentes são usadas para carga e para deslocamento. Contudo, frequentemente, usa-se $\psi = 0$ e, neste caso, a restrição (3.13) passa a ser chamada de *restrição cilíndrica* (em vez de hiperesférica).

Adicionando a Equação (3.13) ao sistema de equações de equilíbrio (3.1), obtém-se um novo sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{g} = \mathbf{q} - \lambda \hat{\mathbf{f}} = \mathbf{0} \\ \mathbf{c} = (\Delta \mathbf{u}^T \Delta \mathbf{u} + \Delta \lambda^2 \psi^2 \hat{\mathbf{f}}^T \hat{\mathbf{f}}) - \Delta l^2 = 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

Resolvendo o sistema, obtém-se $\Delta \mathbf{u}$ e $\Delta \lambda$ que são incrementos relativos a um ponto $(\mathbf{u}^n, \lambda^n)$ qualquer no caminho de equilíbrio. Em outras palavras, a solução do sistema gera um novo ponto $(\mathbf{u}^{n+1}, \lambda^{n+1})$ no caminho de equilíbrio dado por

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \Delta \mathbf{u} \quad (3.15)$$

$$\lambda^{n+1} = (\lambda^n + \Delta \lambda) \hat{\mathbf{f}} = \lambda^{n+1} \hat{\mathbf{f}} \quad (3.16)$$

O sistema (3.14) poderia ser resolvido diretamente pelo método de Newton-Raphson que então resultaria em:

$$\begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}_i \\ \delta \lambda_i \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial \lambda} \\ \left(\frac{\partial \mathbf{c}_i}{\partial \mathbf{u}} \right)^T & \frac{\partial \mathbf{c}_i}{\partial \lambda} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_i \\ \mathbf{c}_i \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

onde usa-se o símbolo δ para representar os incrementos do método de Newton-Raphson. Desenvolvendo, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}_i \\ \delta \lambda_i \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_t & -\hat{\mathbf{f}} \\ 2\Delta \mathbf{u}_i^T & 2\Delta \lambda_i \psi^2 \hat{\mathbf{f}}^T \hat{\mathbf{f}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_i \\ \mathbf{c}_i \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

com,

$$\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{i+1} \\ \Delta \lambda_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_i \\ \Delta \lambda_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}_i \\ \delta \lambda_i \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Contudo, a matriz que resultou neste sistema não possui boas propriedades numéricas (não é simétrica e nem banda). Por causa disso, o sistema não é resolvido, em geral, da forma convencional. Em vez disso, utiliza-se o método proposto por (BALTOZ; DHATT, 1979) que resolve o sistema em duas etapas. A primeira equação do Sistema (3.18) fornece a equação

$$-\mathbf{K}_t \delta \mathbf{u}_i + \hat{\mathbf{f}} \delta \lambda_i = \mathbf{g}_i$$

da qual obtém-se,

$$\delta \mathbf{u}_i = \delta \mathbf{u}_i^R + \delta \lambda_i \delta \mathbf{u}_i^F \quad (3.20)$$

sendo os dois componentes dados por

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}_i^F &= \mathbf{K}_t^{-1} \hat{\mathbf{f}} \\ \delta \mathbf{u}_i^R &= -\mathbf{K}_t^{-1} \mathbf{g}_i \end{aligned}$$

O componente $\delta \mathbf{u}_i^R$ é gerado pela força residual \mathbf{g}_i e corresponde ao incremento do método de Newton-Raphson usado no procedimento incremental-iterativo. O componente $\delta \mathbf{u}_i^F$ é um incremento de retorno para ajustar a carga a fim de satisfazer a restrição. O vetor $\delta \mathbf{u}_i^F$ é também chamado de deslocamento tangencial porque é tangente ao caminho de equilíbrio (no espaço de deslocamentos). Os componentes são ilustrados na Figura 21.

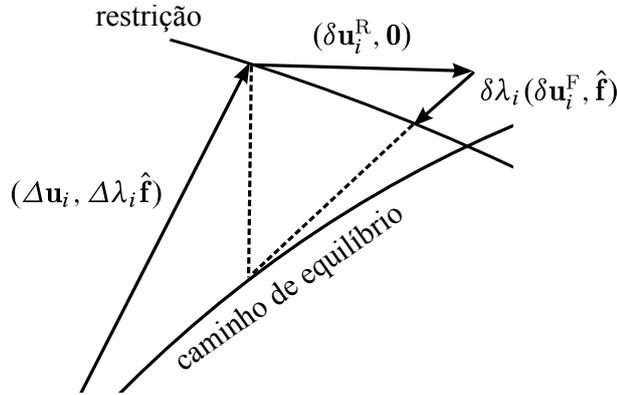


Figura 21 – Os componentes residual e tangencial.

Substituindo (3.20) na segunda equação do Sistema (3.18), obtém-se uma equação quadrática:

$$\alpha_1 \delta \lambda_i^2 + \alpha_2 \delta \lambda_i + \alpha_3 = 0 \quad (3.21)$$

onde,

$$\alpha_1 = (\delta \mathbf{u}_i^F)^T \delta \mathbf{u}_i^F + \psi^2 \hat{\mathbf{f}}^T \hat{\mathbf{f}} \quad (3.22)$$

$$\alpha_2 = 2(\Delta \mathbf{u}_i + \delta \mathbf{u}_i^R)^T \delta \mathbf{u}_i^F + 2\psi^2 \Delta \lambda_i \hat{\mathbf{f}}^T \hat{\mathbf{f}} \quad (3.23)$$

$$\alpha_3 = (\Delta \mathbf{u}_i + \delta \mathbf{u}_i^R)^T (\Delta \mathbf{u}_i + \delta \mathbf{u}_i^R) + \psi^2 \Delta \lambda_i^2 \hat{\mathbf{f}}^T \hat{\mathbf{f}} - \Delta l^2 \quad (3.24)$$

Resolvendo a equação quadrática, obtém-se $\delta \lambda_i$ e pode-se determinar $\Delta \mathbf{u}_{i+1}$ pelas equações (3.20) e (3.19). No entanto, a equação quadrática pode ter duas raízes e escolher uma delas constitui um problema a parte. Considere $\delta \lambda_i'$ e $\delta \lambda_i''$ como sendo duas raízes da equação quadrática. Portanto, tem-se dois candidatos a solução:

$$\Delta \mathbf{u}_{i+1}' = \Delta \mathbf{u}_i + \delta \mathbf{u}_i^R + \delta \lambda_i' \delta \mathbf{u}_i^F \quad (3.25)$$

$$\Delta \mathbf{u}_{i+1}'' = \Delta \mathbf{u}_i + \delta \mathbf{u}_i^R + \delta \lambda_i'' \delta \mathbf{u}_i^F \quad (3.26)$$

Qual deles escolher? O critério é escolher o candidato que se encontra mais próximo do incremento anterior $\Delta \mathbf{u}_i$ para prevenir que se “caminhe para trás” durante o traçado do caminho do equilíbrio. Computacionalmente, isto pode ser feito escolhendo o candidato que forma o menor ângulo com $\Delta \mathbf{u}_i$. Estes ângulos são dados por:

$$\cos \theta' = \frac{\Delta \mathbf{u}_i^T \Delta \mathbf{u}_{i+1}'}{\Delta l^2}, \quad \cos \theta'' = \frac{\Delta \mathbf{u}_i^T \Delta \mathbf{u}_{i+1}''}{\Delta l^2}$$

É possível que a equação quadrática tenha raízes complexas e isto causa problemas de divergência da solução. Este problema tem sido tratado por vários autores (LAM; MORLEY, 1992; ZHOU; MURRAY, 1994).

Uma vez escolhida a solução da equação quadrática, são obtidos $\Delta \mathbf{u}_{i+1}$ e $\Delta \lambda_{i+1}$ a partir de (3.20) e (3.19). As demais iterações de Newton-Raphson são processados da mesma forma. Depois de convergirem, obtém-se $(\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{f}^{n+1})$ usando (3.15) e (3.16) e então é processado um novo ciclo para obter o ponto seguinte $(\mathbf{u}^{n+2}, \mathbf{f}^{n+2})$ no caminho de equilíbrio e assim por diante. Ver Figura 22.

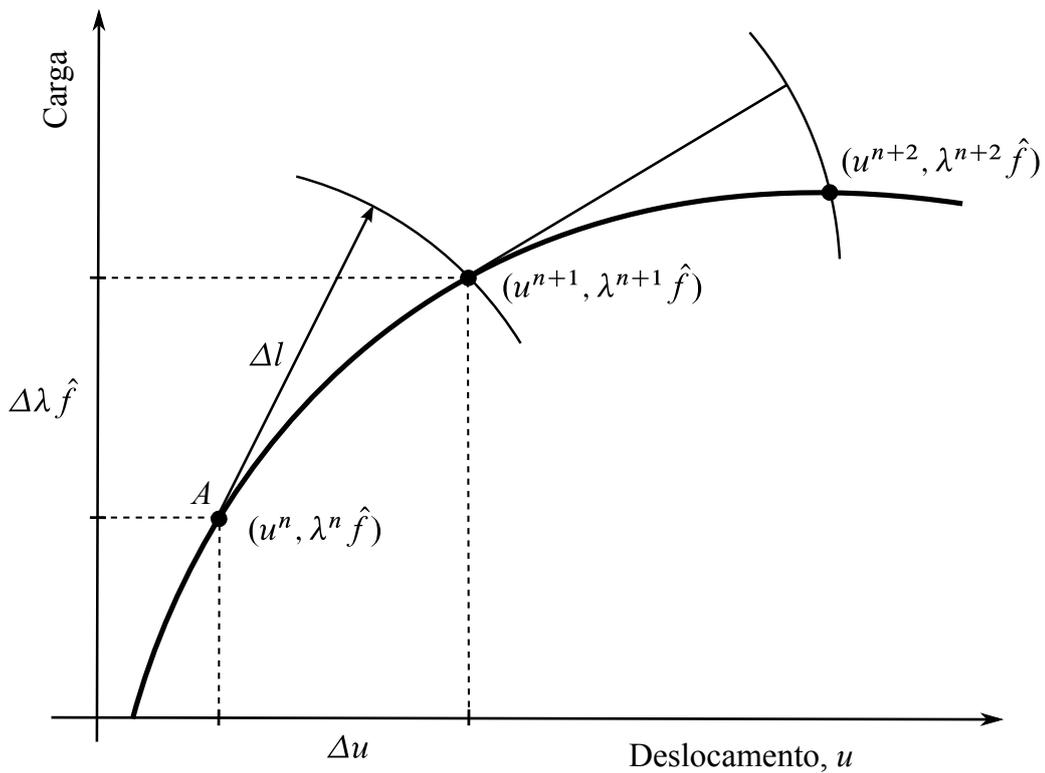


Figura 22 – Dois ciclos do método do comprimento de arco

3.3.2 Formulação genérica

Esta seção descreve o método comprimento de arco de forma genérica, isto é, sem especificar a restrição. Será usado, basicamente, os mesmos passos descritos na seção anterior, e por isso a descrição será abreviada. Suponha que estamos no ponto $(\mathbf{u}^n, \mathbf{f}^n)$ do caminho de equilíbrio. Agora tem-se o seguinte sistema para resolver:

$$\begin{cases} \mathbf{g} = \mathbf{q} - \lambda \hat{\mathbf{f}} = \mathbf{0} \\ c = 0 \end{cases} \quad (3.27)$$

onde $c = 0$ é uma restrição qualquer. Aplicando o método de Newton, tem-se

$$\begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}_i \\ \delta \lambda_i \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_t & -\hat{\mathbf{f}} \\ \mathbf{h}_i^T & s_i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_i \\ c_i \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{i+1} \\ \Delta \lambda_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_i \\ \Delta \lambda_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}_i \\ \delta \lambda_i \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

onde,

$$\mathbf{h} = \frac{\partial c}{\partial \mathbf{u}}, \quad s = \frac{\partial c}{\partial \lambda}$$

Este sistema é resolvido da mesma forma da seção anterior. Da primeira equação do Sistema (3.28), obtém-se

$$\delta \mathbf{u}_i = \delta \mathbf{u}_i^R + \delta \lambda_i \delta \mathbf{u}_i^F \quad (3.30)$$

onde,

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}_i^F &= \mathbf{K}_t^{-1} \hat{\mathbf{f}} \\ \delta \mathbf{u}_i^R &= -\mathbf{K}_t^{-1} \mathbf{g}_i \end{aligned}$$

Substituindo (3.30) na segunda equação do Sistema (3.28), obtém-se:

$$\delta \lambda_i = - \frac{c_i + \mathbf{h}_i^T \delta \mathbf{u}_i^R}{s_i + \mathbf{h}_i^T \delta \mathbf{u}_i^F} \quad (3.31)$$

Uma vez que as iterações convergiram, obtém-se um novo ponto no caminho de equilíbrio:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{n+1} &= \mathbf{u}^n + \Delta \mathbf{u} \\ \mathbf{f}^{n+1} &= \mathbf{f}^n + \Delta \lambda \hat{\mathbf{f}} \end{aligned}$$

3.3.3 Restrição de hiperplano

A restrição de hiperplano é uma versão linearizada da restrição de hiperesfera. Há duas versões: uma com hiperplano atualizado e outra com hiperplano fixo. A restrição de hiperplano atualizado condiciona o sub-incremento $(\delta \mathbf{u}, \delta \lambda \hat{\mathbf{f}})$ para que este se encontre no hiperplano ortogonal ao incremento *atual* $(\Delta \mathbf{u}, \Delta \lambda \hat{\mathbf{f}})$. Ver Figura 19(b). Ou seja:

$$c = (\Delta \mathbf{u}, \Delta \lambda \hat{\mathbf{f}})^T (\delta \mathbf{u}, \psi \delta \lambda \hat{\mathbf{f}}) = 0$$

onde a constante ψ foi introduzida aqui pelo mesmo motivo que existe na Equação 3.13, como um fator de escala para as cargas pois elas são expressas em uma unidade diferente dos deslocamentos. Desenvolvendo, tem-se

$$c = \Delta \mathbf{u}^T \delta \mathbf{u} + \psi^2 \delta \lambda \Delta \lambda \hat{\mathbf{f}}^T \hat{\mathbf{f}} = 0$$

que é a restrição de hiperplano atualizado. Aplicando esta restrição na formulação genérica da Seção 3.3.2, especialmente na Equação 3.31, obtém-se

$$\delta \lambda_i = - \frac{\Delta \mathbf{u}_i^T \delta \mathbf{u}_i^R}{\Delta \mathbf{u}_i^T \delta \mathbf{u}_i^F + \psi^2 \Delta \lambda_i \hat{\mathbf{f}}^T \hat{\mathbf{f}}} \quad (3.32)$$

Esse método foi proposto em (RAMM, 1981).

A restrição de hiperplano fixo é bem similar. A diferença é que ela condiciona o sub-incremento $(\delta\mathbf{u}, \delta\lambda\hat{\mathbf{f}})$ para que este se encontre no hiperplano ortogonal ao *primeiro* incremento $(\Delta\mathbf{u}_1, \Delta\lambda_1\hat{\mathbf{f}})$. Ver Figura 19(c). Ou seja:

$$c = \Delta\mathbf{u}_1^T \delta\mathbf{u} + \psi^2 \delta\lambda \Delta\lambda_1 \hat{\mathbf{f}}^T \hat{\mathbf{f}} = 0$$

Dai,

$$\delta\lambda_i = -\frac{\Delta\mathbf{u}_1^T \delta\mathbf{u}_i^R}{\Delta\mathbf{u}_1^T \delta\mathbf{u}_i^F + \psi^2 \Delta\lambda_1 \hat{\mathbf{f}}^T \hat{\mathbf{f}}} \quad (3.33)$$

É esse o método do comprimento de arco original conforme foi proposto por (RIKS, 1972).

A experiência numérica mostra que o valor de ψ parece não exercer muita influência no desempenho do método de comprimento de arco que usa essas restrições. O valor $\psi = 0$ tem sido usado na prática e parece ser bem robusto em problemas de engenharia (BORST et al., 2012). Fazer $\psi = 0$ remove a componente da carga. Neste caso, tem-se para o hiperplano atualizado:

$$\delta\lambda_i = -\frac{\Delta\mathbf{u}_1^T \delta\mathbf{u}_i^R}{\Delta\mathbf{u}_1^T \delta\mathbf{u}_i^F} \quad (3.34)$$

e para o hiperplano fixo:

$$\delta\lambda_i = -\frac{\Delta\mathbf{u}_1^T \delta\mathbf{u}_i^R}{\Delta\mathbf{u}_1^T \delta\mathbf{u}_i^F} \quad (3.35)$$

Esta seção mostrou mais algumas alternativas de restrição além daquela já apresentada na Seção 3.3.1. Observa-se que a restrição de hiperplano não requer o cálculo de raízes. Já a restrição hiperesférica tem a vantagem de sempre intersectar o caminho de equilíbrio. Contudo, de acordo com (BORST et al., 2012), todas estas diferentes alternativas produzem, computacionalmente, resultados muitos semelhantes. De forma que não se pode afirmar qual delas é superior a outra, de maneira geral.

3.3.4 Solução preditora

Esta seção dedica-se a determinar a primeira estimativa de um ciclo n , que é denominada de solução preditora ou preditor. A solução preditora é ilustrado na Figura 23 sendo representada pelos incrementos iniciais $\Delta\mathbf{u}_1$ e $\Delta\lambda_1$. Pela Figura 23, a direção do preditor é tangente ao caminho de equilíbrio. Então $\Delta\mathbf{u}_1$ tem a mesma direção do vetor $\delta\mathbf{u}^F = \mathbf{K}_t^{-1}\hat{\mathbf{f}}$ que também é tangente ao caminho de equilíbrio (no espaço de deslocamentos). Então uma possível solução preditora seria

$$\Delta\lambda_1 = \pm \frac{\Delta l}{\|\delta\mathbf{u}^F\|} \quad (3.36)$$

$$\Delta\mathbf{u}_1 = \Delta\lambda_1 \delta\mathbf{u}^F \quad (3.37)$$

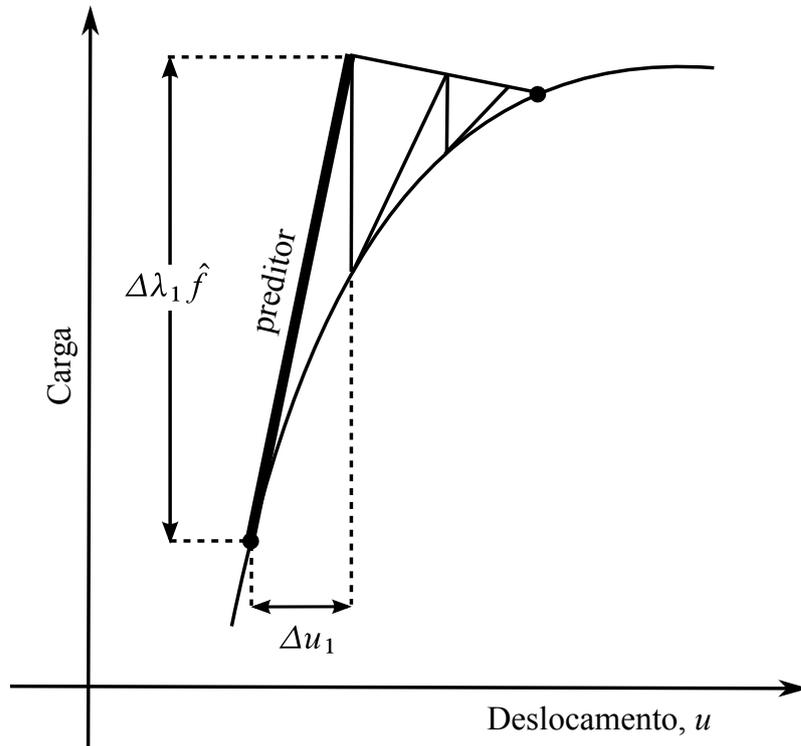


Figura 23 – O preditor é primeira estimativa de um ciclo.

Note que o preditor foi normalizado para que tenha o tamanho do arco. O sinal indefinido da solução preditora (3.36) deve-se ao fato que preditor Δu_1 pode ter ou não o mesmo sentido do vetor δu^F .

De acordo com (NETO; FENG, 1999), determinar o sentido de avanço do preditor é de vital importância para o sucesso do algoritmo comprimento de arco. Ou seja, determinar se $\Delta \lambda_1$ está aumentando ou diminuindo no fim de um incremento. Um critério muito utilizado para determinar o sentido do preditor (FENG; PERIĆ; OWEN, 1995; FENG; PERIĆ; OWEN, 1996) é descrito da seguinte forma: ²

$$\text{sgn}(\Delta \lambda_1) = \text{sgn} [(\Delta u^{n-1})^T \delta u^F]$$

onde Δu^{n-1} é o incremento total do ciclo anterior (resultado da convergência). Em outras palavras:

- se $(\Delta u^{n-1})^T \delta u^F > 0$, então o preditor Δu_1 tem o mesmo sentido de δu^F , isto é,

$$\Delta \lambda_1 = \frac{\Delta l}{\|\delta u^F\|} \tag{3.38}$$

² A função $\text{sgn } x$ retorna o sinal de número real x . Ou seja:

$$\text{sgn } x = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

- se $(\Delta \mathbf{u}^{n-1})^T \delta \mathbf{u}^F < 0$, então o preditor $\Delta \mathbf{u}_1$ tem o sentido oposto de $\delta \mathbf{u}^F$, isto é:

$$\Delta \lambda_1 = -\frac{\Delta l}{\|\delta \mathbf{u}^F\|} \quad (3.39)$$

Uma interpretação geométrica deste critério é dada no seguinte exemplo. Considere de uma estrutura com dois graus de liberdade cujo deslocamento é representado pelo vetor $\mathbf{u} = (v, w)^T$. Suponha que a Figura 24(a) representa um típico caminho de equilíbrio ($v \times f$) desta estrutura. A Figura 24(b) representa a curva de equilíbrio no plano $v \times w$, ou seja, no espaço de deslocamentos. Esta curva também representa o caminho que os incrementos $\Delta \mathbf{u}$ deveriam a seguir durante as iterações do algoritmo.

A Figura 25 mostra dois vetores. O primeiro representa o vetor tangente ao caminho de equilíbrio $\delta \mathbf{u}^F$. O segundo, $\Delta \mathbf{u}^{n-1}$, representa o incremento total do ciclo anterior (resultado da convergência) e, por isso, o incremento $\Delta \mathbf{u}^{n-1}$ conecta dois pontos sobre a curva de equilíbrio. Dois casos podem ocorrer como mostra a Figura 25. No primeiro caso, Figura 25(a), o vetor $\delta \mathbf{u}^F$ tem o sentido de avanço na curva de equilíbrio e o produto $(\Delta \mathbf{u}^{n-1})^T \delta \mathbf{u}^F > 0$. Já no segundo caso, Figura 25(b), o vetor $\delta \mathbf{u}^F$ tem o sentido contrário ao sentido de avanço na curva de equilíbrio e o produto $(\Delta \mathbf{u}^{n-1})^T \delta \mathbf{u}^F < 0$. Neste caso, o preditor não poderia ter o mesmo sentido de $\delta \mathbf{u}^F$ porque o método iria “caminhar para trás” durante o traçado do caminho do equilíbrio. Então, neste caso, o correto seria o preditor ter o sentido contrário a $\delta \mathbf{u}^F$.

Quando se usa o método de Newton-Raphson (que não é o modificado), outra maneira de determinar o preditor é simplesmente extrapolar os incrementos anteriores do deslocamento e do fator de carga:

$$\Delta \mathbf{u}_1^n = \eta \Delta \mathbf{u}^{n-1}, \quad \Delta \lambda_1^n = \eta \Delta \lambda^{n-1}$$

onde η é um fator de escala para determinar o tamanho do arco. Por exemplo, usando a ideia de comprimento variável mostrada na Seção 3.3.5, tem-se

$$\eta = \frac{\Delta l^{n-1}}{\|\mathbf{u}^{n-1}\|} \left(\frac{N_d}{N_{n-1}} \right)^{1/2}$$

Outras maneiras de determinar o preditor é encontrado em (NETO; FENG, 1999).

3.3.5 Comprimento do arco

Comumente usa-se um comprimento de arco variável. Há um método heurístico bem popular para determinar o comprimento do arco. Ele é baseado na observação que mais iterações são necessárias para convergir em trechos do caminho do equilíbrio em que ocorrem grandes mudanças. A ideia é estimar o comprimento de arco Δl^n de forma que o número de iterações para convergir no ciclo n seja igual a um número desejado de iterações N_d , ou seja

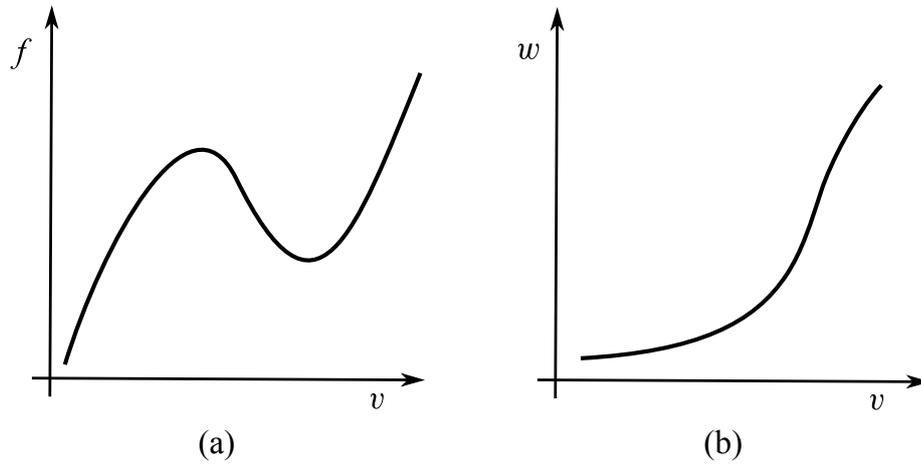


Figura 24 – Caminho de Equilíbrio para dois graus de liberdade.

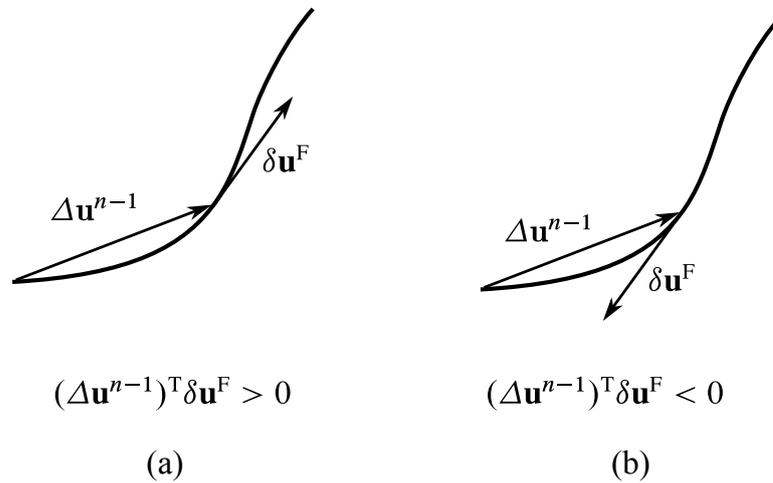


Figura 25 – (a) $\delta \mathbf{u}^F$ tem o sentido de avanço no caminho do equilíbrio. (b) $\delta \mathbf{u}^F$ tem o sentido contrário ao sentido de avanço no caminho do equilíbrio.

$$\Delta l^n = \Delta l^{n-1} \left(\frac{N_d}{N_{n-1}} \right)^\zeta \tag{3.40}$$

onde Δl^{n-1} é o comprimento de arco do ciclo $n - 1$, N_{n-1} é o número de iterações que foram utilizadas para convergir no ciclo $n - 1$ e ζ é um parâmetro para aumentar ou diminuir a influência da razão $\frac{N_d}{N_{n-1}}$. Normalmente, usa-se $\zeta = 0,5$ e N_d entre 3 e 5.

3.3.6 Algoritmo de Riks-Wempner

O algoritmo de Riks-Wempner é apresentado no Algoritmo 3. Nas linhas entre o primeiro e o segundo comando **for** contém a determinação do preditor. Ele é normalizado para ter tamanho Δl e em seguida é verificado se ele segue o sentido de avanço do caminho do equilíbrio. Foi utilizado o método de Newton-Raphson modificado onde a matriz de rigidez

tangente é computada uma única vez no começo de cada ciclo. O critério de convergência é expresso pela norma da força residual normalizada pela norma da força total aplicada:

$$\frac{\|\mathbf{g}\|}{\lambda\|\hat{\mathbf{f}}\|} \leq \text{tol}$$

```

u = 0,  $\Delta\mathbf{u}$  = 0,  $\lambda$  = 0;
for n = 1 to  $n_{max}$  do
     $\mathbf{K}_t = \frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}$ ;
     $\delta\mathbf{u}^F = \mathbf{K}_t^{-1}\hat{\mathbf{f}}$ ;
     $\Delta\lambda = \frac{\Delta l}{\|\Delta\mathbf{u}_1\|}$ ;
    if  $\Delta\mathbf{u}_1^T\delta\mathbf{u}^F < 0$  then
         $\Delta\lambda = -\Delta\lambda$ ;
    end
     $\Delta\mathbf{u}_1 = \Delta\lambda\delta\mathbf{u}^F$ ;
     $\Delta\mathbf{u} = \Delta\mathbf{u}_1$ ;
     $\mathbf{g} = \mathbf{q}(\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}) - (\lambda + \Delta\lambda)\hat{\mathbf{f}}$ ;
    for i = 1 to  $i_{max}$  do
         $\delta\mathbf{u}^R = -\mathbf{K}_t^{-1}\mathbf{g}$ ;
         $\delta\lambda = -\frac{\Delta\mathbf{u}_1^T\delta\mathbf{u}^R}{\Delta\mathbf{u}_1^T\delta\mathbf{u}^F}$ ;
         $\delta\mathbf{u} = \delta\mathbf{u}^R + \delta\lambda\delta\mathbf{u}^F$ ;
         $\Delta\mathbf{u} = \Delta\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}$ ;
         $\Delta\lambda = \Delta\lambda + \delta\lambda$ ;
         $\mathbf{g} = \mathbf{q}(\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}) - (\lambda + \Delta\lambda)\hat{\mathbf{f}}$ ;
        if  $\|\mathbf{g}\| \leq \text{tol} \cdot \lambda\|\hat{\mathbf{f}}\|$  then break;
    end
     $\mathbf{u} = \mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}$ ;
     $\lambda = \lambda + \Delta\lambda$ ;
    output  $\mathbf{u}$ ,  $\lambda$ ;
     $\Delta l = \Delta l \left(\frac{N_d}{i}\right)^{1/2}$ ;
end

```

Algoritmo 3: Algoritmo de comprimento de arco de Riks-Wempner.

CAPÍTULO 4

O Elemento de Treliça para Diferentes Medidas de Deformação

Neste capítulo será apresentado a formulação posicional do método dos elementos finitos para treliças. Serão derivadas fórmulas para a matriz de rigidez tangente e forças internas do elemento de treliça. As fórmulas serão deduzidas para diferentes medidas de deformação incluindo mudança de volume na barra.

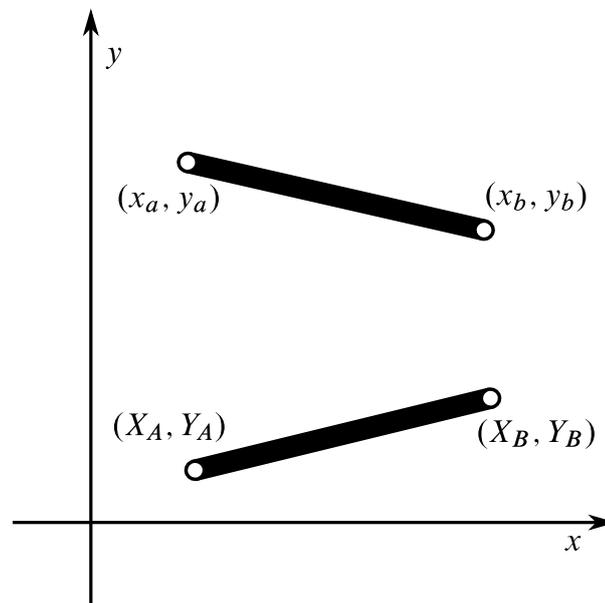


Figura 26 – Elemento de Treliça.

4.1 GEOMETRIA DO ELEMENTO DE TRELIÇA

O elemento de treliça (ou de barra) corresponde a uma barra da treliça e transmite somente força axial. Ele é mostrado na Figura 26. As coordenadas (X_A, Y_A) e (X_B, Y_B) representam a configuração inicial do elemento de barra (também conhecido como coordenadas de referência). Após uma mudança de configuração devido a deslocamentos da treliça, a barra

passa a ter novas coordenadas (x_a, y_a) e (x_b, y_b) . O comprimento inicial (ou referencial) e o comprimento atual da barra são

$$L = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}$$

$$l = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$$

respectivamente. No MEF, é útil reunir as novas coordenadas em um vetor dado por:

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$$

onde,

$$x_1 = x_a, \quad x_2 = y_a, \quad x_3 = x_b, \quad x_4 = y_b$$

A barra tem área de seção A na configuração inicial e área de seção a após a mudança de configuração. Então

$$V = AL \tag{4.1}$$

$$v = al \tag{4.2}$$

são o volume da configuração inicial e o volume após a mudança de configuração da barra, respectivamente.

4.2 O PRINCÍPIO DA ENERGIA POTENCIAL MÍNIMA

Dois princípios variacionais da mecânica (CASSEL, 2013; LÁNCZOS, 1986) são comumente empregados para derivar as equações de elementos finitos para sólidos:

1. O princípio da energia potencial mínima.
2. O princípio dos trabalhos virtuais;

O princípio da energia potencial mínima tem sido o princípio mais empregado na formulação posicional do MEF. Na Seção 4.8, será empregado, como uma alternativa, os trabalhos virtuais na formulação posicional. Nas formulações apresentadas a seguir, será considerado primeiramente o caso em que não há mudança de volume na barra (i.e., $V = v$). O caso em que permite a mudança de volume na barra será descrito na Seção 4.9.

A energia potencial total tem a forma:

$$\Pi = U - P$$

onde U é a energia de deformação e P é a energia potencial das forças externas aplicadas, sendo dada por

$$P = \sum f_i x_i = \mathbf{f}^T \mathbf{x}$$

onde f_i é a força externa aplicada na direção da coordenada x_i .

A energia de deformação é dada por:

$$U = \int u dV \quad (4.3)$$

onde u é a densidade de energia de deformação. Considerando um material isotrópico, homogêneo e elástico, então, de acordo com a lei de Hooke, tem-se

$$u = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 \quad (4.4)$$

onde E is o módulo de elasticidade e ε é uma medida de deformação. Então, tem-se

$$U = \int_V \frac{1}{2} E \varepsilon^2 dV = \frac{1}{2} E A L \varepsilon^2 \quad (4.5)$$

O princípio da energia potencial mínima declara que a configuração equilibrada corresponde a um valor mínimo da energia potencial total. Em outras palavras, a configuração equilibrada é obtida requerendo que todas derivadas parciais em relação as coordenadas x_i se anulem:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i} - f_i = 0, \quad \text{for } i = 1, \dots, 4 \quad (4.6)$$

e escrevendo na forma matricial, tem-se

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{q} - \mathbf{f} = 0 \quad (4.7)$$

onde,

$$\mathbf{q} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} \quad (4.8)$$

é o **vetor de forças internas**.

A expressão (4.7) representa o sistema equações de equilíbrio. Este sistema é não linear e pode ser resolvido pelo método de Newton-Raphson.

4.3 MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

O método de Newton-Raphson foi descrito no Capítulo 3 para resolver o sistema de equações de equilíbrio (3.1) que é similar ao sistema de equações de equilíbrio dado por (4.7). A diferença fundamental é que no primeiro as incógnitas são os deslocamentos e no segundo as incógnitas são as posições. De fato, todos os métodos e algoritmos descritos no Capítulo 3 podem ser aplicados diretamente para resolver o sistema (4.7) desde que se faça a devida substituição das variáveis de deslocamentos pelas variáveis de posições.

Para ser tornar adequado ao método de Newton-Raphson, o sistema (4.7) é reescrito da seguinte forma:

$$\mathbf{g} = \mathbf{q} - \mathbf{f} = 0 \quad (4.9)$$

onde \mathbf{g} é a força residual. Desta forma, o método de Newton-Raphson é dado pela seguinte fórmula iterativa (cf. Equação (3.11)):

$$\Delta \mathbf{x}_i = -\mathbf{K}_t^{-1} \mathbf{g}_i \quad (4.10)$$

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \Delta \mathbf{x}_i \quad (4.11)$$

onde \mathbf{K}_t é a matriz de rigidez tangente.

4.4 O GRADIENTE DO COMPRIMENTO DA BARRA E OUTRAS EXPRESSÕES

No desenvolvimento da formulação, algumas expressões como o gradiente do comprimento da barra serão úteis. Usando a notação introduzida na Seção 4.1, primeiramente será obtido a fórmula do gradiente do comprimento da barra ao quadrado porque elimina a raiz quadrada, ou seja

$$\frac{\partial l^2}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} [(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2]$$

então,

$$\frac{\partial l^2}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{d} \quad (4.12)$$

onde

$$\mathbf{d} = [x_a - x_b, y_a - y_b, x_b - x_a, y_b - y_a]^T \quad (4.13)$$

Para calcular o gradiente do comprimento da barra, considere a seguinte relação

$$\frac{\partial l^2}{\partial \mathbf{x}} = 2l \frac{\partial l}{\partial \mathbf{x}}$$

então,

$$\frac{\partial l}{\partial \mathbf{x}} = \frac{1}{2l} \frac{\partial l^2}{\partial \mathbf{x}}$$

Logo,

$$\frac{\partial l}{\partial \mathbf{x}} = \frac{1}{l} \mathbf{d} \quad (4.14)$$

A seguir listamos duas expressões úteis envolvendo o gradiente de funções escalares e vetoriais quaisquer:

$$\frac{\partial (f\mathbf{v})}{\partial \mathbf{x}} = f \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{v} \otimes \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{w} + \left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{v} \quad (4.16)$$

onde \otimes é o produto tensorial. Em livros sobre tensores (FLEISCH, 2011) pode-se obter mais informações sobre gradientes.

4.5 FORMULAÇÃO COM DEFORMAÇÃO DE GREEN

Nesta seção, serão desenvolvidas expressões para o vetor de forças internas e a matriz de rigidez tangente do elemento de treliça usando a deformação de Green:

$$\varepsilon_G = \frac{l^2 - L^2}{2L^2} \quad (4.17)$$

que foi apresentada na Seção 2.6.2.

Começaremos determinando a expressão do gradiente da deformação de Green que será usado no desenvolvimento da formulação.

$$\frac{\partial \varepsilon_G}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left[\frac{l^2 - L^2}{2L^2} \right] = \frac{1}{2L^2} \frac{\partial l^2}{\partial \mathbf{x}}$$

Aplicando (4.12), obtém-se

$$\frac{\partial \varepsilon_G}{\partial \mathbf{x}} = \frac{1}{L^2} \mathbf{d} \quad (4.18)$$

Substituindo a deformação de Green em (4.5), obtém-se a energia de deformação:

$$U = \frac{1}{2} EA L \varepsilon_G^2 \quad (4.19)$$

Então o vetor de forças internas é dado por,

$$\mathbf{q} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} = \frac{EA L}{2} \frac{\partial \varepsilon_G^2}{\partial \mathbf{x}} = EA L \varepsilon_G \frac{\partial \varepsilon_G}{\partial \mathbf{x}}$$

Aplicando (4.18), obtém-se

$$\mathbf{q} = \frac{EA \varepsilon_G}{L} \mathbf{d} \quad (4.20)$$

A matriz de rigidez tangente é dada por

$$\mathbf{K}_t = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left[\frac{EA \varepsilon_G}{L} \mathbf{d} \right] = \frac{EA}{L} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} [\varepsilon_G \mathbf{d}]$$

Aplicando (4.15), obtém-se

$$\mathbf{K}_t = \frac{EA}{L} \varepsilon_G \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{EA}{L} \mathbf{d} \otimes \frac{\partial \varepsilon_G}{\partial \mathbf{x}}$$

Aplicando (4.18), obtém-se

$$\mathbf{K}_t = \frac{EA}{L} \varepsilon_G \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{EA}{L^3} \mathbf{d} \otimes \mathbf{d}$$

Então, tem-se

$$\mathbf{K}_t = \frac{EA}{L^3} \mathbf{B} + \frac{A \sigma_G}{L} \mathbf{C} \quad (4.21)$$

onde $\sigma_G = E\varepsilon_G$ é a tensão na barra e

$$\mathbf{B} = \mathbf{d} \otimes \mathbf{d} \quad (4.22)$$

$$\mathbf{C} = \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Na expressão (4.21), a matriz de rigidez tangente está decomposta em duas matrizes. A primeira representa a contribuição devido a geometria da estrutura. A segunda matriz é chamada de matriz de tensão inicial.

4.6 FORMULAÇÃO COM DEFORMAÇÃO DE ENGENHARIA

Nesta seção, serão obtidas expressões usando a deformação de engenharia análogas aquelas da seção anterior. A deformação de engenharia é dada por

$$\varepsilon_E = \frac{l - L}{L} \quad (4.24)$$

tendo já sido apresentada na Seção 2.6.1. Começaremos determinando o gradiente da deformação de engenharia:

$$\frac{\partial \varepsilon_E}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left[\frac{l - L}{L} \right] = \frac{1}{L} \frac{\partial l}{\partial \mathbf{x}}$$

Aplicando (4.14), obtém-se

$$\frac{\partial \varepsilon_E}{\partial \mathbf{x}} = \frac{1}{Ll} \mathbf{d} \quad (4.25)$$

Substituindo a deformação de engenharia em (4.5), obtém-se a energia de deformação:

$$U = \int_V \frac{1}{2} E \varepsilon_E^2 dV = \frac{1}{2} EAL \varepsilon_E^2 \quad (4.26)$$

Então o vetor de forças internas é dado por

$$\mathbf{q} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} = \frac{EAL}{2} \frac{\partial \varepsilon_E^2}{\partial \mathbf{x}} = EAL \varepsilon_E \frac{\partial \varepsilon_E}{\partial \mathbf{x}}$$

Aplicando (4.25), obtém-se

$$\mathbf{q} = \frac{EA \varepsilon_E}{l} \mathbf{d} \quad (4.27)$$

A matriz de rigidez tangente é dada por

$$\mathbf{K}_t = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left[\frac{EA \varepsilon_E}{l} \mathbf{d} \right] = EA \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left[\frac{\varepsilon_E}{l} \mathbf{d} \right]$$

Aplicando (4.15), obtém-se

$$\mathbf{K}_t = \frac{EA\varepsilon_E}{l} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{x}} + EA\mathbf{d} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left[\frac{\varepsilon_E}{l} \right]$$

Aplicando a regra do quociente do Cálculo, obtém-se

$$\mathbf{K}_t = \frac{EA\varepsilon_E}{l} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{x}} + EA\mathbf{d} \otimes \left(\frac{\frac{\partial \varepsilon_E}{\partial \mathbf{x}} l - \varepsilon_E \frac{\partial l}{\partial \mathbf{x}}}{l^2} \right)$$

Aplicando (4.25) e (4.14), obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_t &= \frac{EA\varepsilon_E}{l} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{x}} + EA\mathbf{d} \otimes \left(\frac{\frac{1}{Ll} l \mathbf{d} - \frac{l-L}{L} \frac{1}{l} \mathbf{d}}{l^2} \right) \\ &= \frac{EA\varepsilon_E}{l} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{EA}{l^3} \mathbf{d} \otimes \mathbf{d} \end{aligned}$$

Então, tem-se

$$\mathbf{K}_t = \frac{EA}{l^3} \mathbf{B} + \frac{A\sigma_E}{l} \mathbf{C} \quad (4.28)$$

onde $\sigma_E = E\varepsilon_E$ é a tensão na barra. Na expressão (4.28), a matriz de rigidez tangente está decomposta em duas matrizes. A primeira representa a contribuição devido a geometria da estrutura. Nota-se que esta contribuição é não linear. A segunda matriz é a matriz de tensão inicial.

4.7 FORMULAÇÃO COM DEFORMAÇÃO LOGARÍTMICA

A deformação logarítmica é dada por

$$\varepsilon_L = \ln \frac{l}{L} \quad (4.29)$$

tendo já sido apresentada na Seção 2.6.3. Começaremos determinando o gradiente da deformação logarítmica:

$$\frac{\partial \varepsilon_L}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left[\ln \left(\frac{l}{L} \right) \right] = \frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial \mathbf{x}}$$

Aplicando (4.14), obtém-se

$$\frac{\partial \varepsilon_L}{\partial \mathbf{x}} = \frac{1}{l^2} \mathbf{d} \quad (4.30)$$

Substituindo a deformação logarítmica em (4.5), obtém-se a energia de deformação:

$$U = \frac{1}{2} EAL\varepsilon_L^2 \quad (4.31)$$

Então, o vetor de forças internas é dado por

$$\mathbf{q} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} = \frac{EAL}{2} \frac{\partial \varepsilon_L^2}{\partial \mathbf{x}} = EAL\varepsilon_L \frac{\partial \varepsilon_L}{\partial \mathbf{x}}$$

Aplicando (4.30), obtém-se

$$\mathbf{q} = \frac{EAL\varepsilon_L}{l^2} \mathbf{d} \quad (4.32)$$

A matriz de rigidez tangente é dada por

$$\mathbf{K}_t = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left[\frac{EAL\varepsilon_L}{l^2} \mathbf{d} \right] = EAL \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left[\frac{\varepsilon_L}{l^2} \mathbf{d} \right]$$

Aplicando (4.15), obtém-se

$$\mathbf{K}_t = \frac{EAL\varepsilon_L}{l^2} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{x}} + EAL\mathbf{d} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left[\frac{\varepsilon_L}{l^2} \right]$$

Aplicando a regra do quociente do Cálculo, obtém-se

$$\mathbf{K}_t = \frac{EAL\varepsilon_L}{l^2} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{x}} + EAL\mathbf{d} \otimes \left(\frac{\frac{\partial \varepsilon_L}{\partial \mathbf{x}} l^2 - \varepsilon_L \frac{\partial l^2}{\partial \mathbf{x}}}{l^4} \right)$$

Aplicando (4.30) e (4.12), obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_t &= \frac{EAL\varepsilon_L}{l^2} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{x}} + EAL\mathbf{d} \otimes \left(\frac{\frac{1}{l^2} \mathbf{d} l^2 - \varepsilon_L 2\mathbf{d}}{l^4} \right) \\ &= \frac{EAL\varepsilon_L}{l^2} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{EAL}{l^4} (1 - 2\varepsilon_L) \mathbf{d} \otimes \mathbf{d} \end{aligned}$$

Então, tem-se

$$\mathbf{K}_t = \frac{EAL}{l^4} (1 - 2\varepsilon_L) \mathbf{B} + \frac{AL\sigma_L}{l^2} \mathbf{C} \quad (4.33)$$

onde $\sigma_L = E\varepsilon_L$ é a tensão na barra.

4.8 O PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

O princípio dos trabalhos virtuais declara que uma variação arbitrária de deslocamento (ou equivalentemente de posição) gera um trabalho interno e um trabalho externo que são idênticos. Isto fornece uma relação entre forças externas e forças internas. Pelo princípio dos trabalhos virtuais tem-se,

$$\int_V \sigma \delta \varepsilon dV = \delta \mathbf{x}^T \mathbf{f} \quad (4.34)$$

ou

$$\int_v \sigma \delta \varepsilon dv = \delta \mathbf{x}^T \mathbf{f} \quad (4.35)$$

onde $\delta \mathbf{x}$ é uma variação arbitrária de posição e $\delta \varepsilon$ é a variação de deformação causada por $\delta \mathbf{x}$. Os termos da esquerda e direita das Equações (4.34) e (4.35), são, respectivamente, o trabalho interno e o trabalho externo causados pela variação arbitrária de posição $\delta \mathbf{x}$. A diferença entre as Equações (4.34) e (4.35) é que na primeira equação, a integral é feita em relação ao volume inicial e é empregada, neste texto, quando não há mudança de volume (volume incompressível). Enquanto na segunda equação, integral é em relação ao volume atual (i.e., após a deformação) e é utilizada, neste texto, quando há mudança de volume.

A título de ilustração, será desenvolvido a mesma formulação posicional com a deformação de Green da Seção 4.5, mas desta vez empregando o princípio dos trabalhos virtuais. Como antes, supõe-se que o volume é incompressível. Então, aplica-se a deformação de Green na equação (4.34) e integra-se em relação ao volume inicial. Ou seja,

$$\begin{aligned} \int \sigma_G \delta \varepsilon_G dV - \delta \mathbf{x}^T \mathbf{f} &= 0 \\ \int \sigma_G \left(\frac{\partial \varepsilon_G}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \delta \mathbf{x} dV - \delta \mathbf{x}^T \mathbf{f} &= 0 \\ \delta \mathbf{x}^T \int \sigma_G \frac{\partial \varepsilon_G}{\partial \mathbf{x}} dV - \delta \mathbf{x}^T \mathbf{f} &= 0 \\ \int \sigma_G \frac{\partial \varepsilon_G}{\partial \mathbf{x}} dV - \mathbf{f} &= 0 \\ \mathbf{q} - \mathbf{f} &= 0 \end{aligned}$$

onde,

$$\mathbf{q} = \int \sigma_G \frac{\partial \varepsilon_G}{\partial \mathbf{x}} dV$$

Aplicando (4.18), tem-se

$$\mathbf{q} = \int \sigma_G \frac{1}{L^2} \mathbf{d} dV = \frac{EA \varepsilon_G}{L} \mathbf{d}$$

que é a mesma expressão de (4.20) que foi obtida pelo princípio da energia potencial mínima.

4.9 FORMULAÇÃO COM DEFORMAÇÃO LOGARÍTMICA PERMITINDO MUDANÇA DE VOLUME

A deformação logarítmica é adequada para grandes deformações. Nestes casos, deveria-se considerar também a mudança de volume causado pelo efeito do coeficiente de Poisson. A Figura 27 mostra uma barra de raio r que muda de volume após a deformação. Após uma deformação infinitesimal $d\varepsilon = \frac{dl}{l}$, a nova área da barra é $a + da$.

Usando o coeficiente de Poisson é possível determinar esta nova área que é dada por:

$$a + da = a(1 - \nu d\varepsilon)^2 = a [1 - 2\nu d\varepsilon + \nu^2 d\varepsilon^2] \quad (4.36)$$

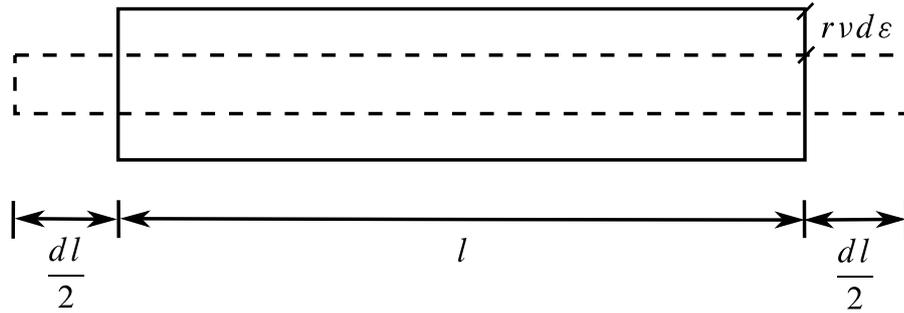


Figura 27 – Mudança de volume da barra.

Desprezando os termos de alta ordem, tem-se

$$a + da = a(1 - 2\nu d\varepsilon) \quad (4.37)$$

$$da = -2a\nu d\varepsilon \quad (4.38)$$

A equação diferencial separável (4.38) pode ser resolvida da seguinte forma:

$$\int_A^a \frac{da}{a} = - \int_A^a 2\nu d\varepsilon = -2\nu \int_L^l \frac{dl}{l}$$

Logo,

$$\ln\left(\frac{a}{A}\right) = -2\nu \ln\left(\frac{l}{L}\right)$$

Então,

$$\frac{a}{A} = \left(\frac{L}{l}\right)^{2\nu} \quad (4.39)$$

Aplicando a deformação logarítmica na equação dos trabalhos virtuais (4.35), tem-se

$$\begin{aligned} \int \sigma_L \delta \varepsilon_L dv - \delta \mathbf{x}^T \mathbf{f} &= 0 \\ \int \sigma_L \left(\frac{\partial \varepsilon_L}{\partial \mathbf{x}}\right)^T \delta \mathbf{x} dv - \delta \mathbf{x}^T \mathbf{f} &= 0 \\ \delta \mathbf{x}^T \int \sigma_L \frac{\partial \varepsilon_L}{\partial \mathbf{x}} dv - \delta \mathbf{x}^T \mathbf{f} &= 0 \\ \int \sigma_L \frac{\partial \varepsilon_L}{\partial \mathbf{x}} dv - \mathbf{f} &= 0 \\ \mathbf{q} - \mathbf{f} &= 0 \end{aligned}$$

onde,

$$\mathbf{q} = \int \sigma_L \frac{\partial \varepsilon_L}{\partial \mathbf{x}} dv$$

é o vetor de forças internas.

Aplicando (4.30), tem-se

$$\mathbf{q} = \int \sigma_L \frac{1}{l^2} \mathbf{d} dv = E \varepsilon_L \frac{1}{l^2} \mathbf{d} \int dv = \frac{E \nu \varepsilon_L}{l^2} \mathbf{d}$$

Então,

$$\mathbf{q} = \frac{E a \varepsilon_L}{l} \mathbf{d}$$

Aplicando (4.39), tem-se

$$\mathbf{q} = \left(\frac{L}{l} \right)^{2\nu+1} \frac{E A \varepsilon_L}{L} \mathbf{d} \quad (4.40)$$

A matriz de rigidez tangente é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_t &= \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{x}} \\ &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left[\frac{E a \varepsilon_L}{l} \mathbf{d} \right] \\ &= E \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left[\frac{a \varepsilon_L}{l} \mathbf{d} \right] \\ &= \frac{E a \varepsilon_L}{l} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{x}} + E \mathbf{d} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left[\frac{a \varepsilon_L}{l} \right] && \text{De (4.15)} \\ &= \frac{E a \varepsilon_L}{l} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{x}} + E \mathbf{d} \otimes \left(\frac{\frac{\partial [a \varepsilon_L]}{\partial \mathbf{x}} l - a \varepsilon_L \frac{\partial l}{\partial \mathbf{x}}}{l^2} \right) && \text{Pela regra do quociente do Cálculo} \\ &= \frac{E a \varepsilon_L}{l} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{x}} + E \mathbf{d} \otimes \left(\frac{l a \frac{\partial \varepsilon_L}{\partial \mathbf{x}} + l \varepsilon_L \frac{\partial a}{\partial \mathbf{x}} - \frac{a \varepsilon_L}{l} \mathbf{d}}{l^2} \right) && \text{De (4.14)} \\ &= \frac{E a \varepsilon_L}{l} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{x}} + E \mathbf{d} \otimes \left(\frac{\frac{a}{l} \mathbf{d} + l \varepsilon_L \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left[A \left(\frac{L}{l} \right)^{2\nu} \right] - \frac{a \varepsilon_L}{l} \mathbf{d}}{l^2} \right) && \text{De (4.39) e (4.30)} \\ &= \frac{E a \varepsilon_L}{l} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{x}} + E \mathbf{d} \otimes \left(\frac{\frac{a}{l} \mathbf{d} - l \varepsilon_L \frac{2\nu a}{l^2} \mathbf{d} - \frac{a \varepsilon_L}{l} \mathbf{d}}{l^2} \right) \\ &= \frac{E a \varepsilon_L}{l} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{E a}{l^3} [1 - (1 + 2\nu) \varepsilon_L] \mathbf{d} \otimes \mathbf{d} \end{aligned}$$

Então, tem-se

$$\mathbf{K}_t = \frac{E a}{l^3} [1 - (1 + 2\nu) \varepsilon_L] \mathbf{B} + \frac{\sigma_L a}{l} \mathbf{C} \quad (4.41)$$

ou

$$\mathbf{K}_t = \frac{E A l^{2\nu}}{l^{2\nu+3}} [1 - (1 + 2\nu) \varepsilon_L] \mathbf{B} + \frac{\sigma_L A l^{2\nu}}{l^{2\nu+1}} \mathbf{C} \quad (4.42)$$

onde $\sigma_L = E\varepsilon_L$ é a tensão na barra.

Quando $\nu = 0,5$, o volume é incompressível e a fórmula (4.42) torna-se igual a fórmula 4.33.

4.10 MATRIZES DE RIGIDEZ TANGENTE PARA DIFERENTES MEDIDAS DE DEFORMAÇÃO

A Tabela 1 resume as fórmulas obtidas para diferentes medidas de deformação. A tabela mostra as quatro matrizes de rigidez tangente que foram obtidas neste capítulo.

Tabela 1 – Matrizes de rigidez tangente

Deformação	Força interna	Matriz de rigidez tangente
Green	$\mathbf{q} = \frac{EA\varepsilon_G}{L} \mathbf{d}$	$\mathbf{K}_t = \frac{EA}{L^3} \mathbf{B} + \frac{A\sigma_G}{L} \mathbf{C}$
Engenharia	$\mathbf{q} = \frac{EA\varepsilon_E}{l} \mathbf{d}$	$\mathbf{K}_t = \frac{EA}{l^3} \mathbf{B} + \frac{A\sigma_E}{l} \mathbf{C}$
Logarítmica	$\mathbf{q} = \frac{EAL\varepsilon_L}{l^2} \mathbf{d}$	$\mathbf{K}_t = \frac{EAL}{l^4} (1 - 2\varepsilon_L) \mathbf{B} + \frac{A\sigma_L}{l^2} \mathbf{C}$
Logarítmica (com mudança de volume)	$\mathbf{q} = \left(\frac{L}{l}\right)^{2\nu+1} \frac{EA\varepsilon_L}{L} \mathbf{d}$	$\mathbf{K}_t = \frac{EAL^{2\nu}}{l^{2\nu+3}} [1 - (1 + 2\nu)\varepsilon_L] \mathbf{B} + \frac{\sigma_L AL^{2\nu}}{l^{2\nu+1}} \mathbf{C}$

4.11 TRELIÇAS ESPACIAIS

As formulações desenvolvidas para treliças planas podem ser estendidas prontamente para treliças espaciais. Para fazer isto, o comprimento inicial (ou referencial) e o comprimento atual da barra são estendidos para

$$L = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2 + (Z_B - Z_A)^2}$$

$$l = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2}$$

respectivamente. O vetor \mathbf{x} é estendido para

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]^T$$

onde,

$$x_1 = x_a, \quad x_2 = y_a, \quad x_3 = z_a, \quad x_4 = x_b, \quad x_5 = y_b, \quad x_6 = z_b$$

O vetor \mathbf{d} é estendido para

$$\mathbf{d} = [x_a - x_b, y_a - y_b, z_a - z_b, x_b - x_a, y_b - y_a, z_b - z_a]^T \quad (4.43)$$

e o vetor \mathbf{C} é estendido para

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

No próximo capítulo, será apresentada aplicações numéricas usando a formulação posicional.

CAPÍTULO 5

Aplicações Numéricas

Este capítulo apresenta resultados numéricos da formulação posicional e dos métodos apresentados nos capítulos anteriores. Para isso, foram utilizados treliças já conhecidas na literatura de mecânica computacional. A formulação posicional e os métodos numéricos foram implementadas na linguagem de programação Scilab¹.

5.1 VIGA DE TRELIÇA ENGASTADA

A treliça engastada de 10 quadros, mostrado na Figura 28 , foi retirada de (ABRAT; SUN, 1983). Suas propriedades são as seguintes:

$$\begin{aligned} A_l &= 80 \times 10^{-6} \text{ m}^2, & L_l &= 7,5 \text{ m} \\ A_t &= 60 \times 10^{-6} \text{ m}^2, & L_t &= 5,0 \text{ m} \\ A_d &= 40 \times 10^{-6} \text{ m}^2, & E &= 7,17 \times 10^{-6} \text{ N/m}^2 \end{aligned}$$

onde A_t , A_v e A_d são as áreas da seção das barras longitudinal, transversal e diagonal, respectivamente. L_l e L_t são os comprimentos das barras longitudinal e transversal, respectivamente. E é o módulo de elasticidade.

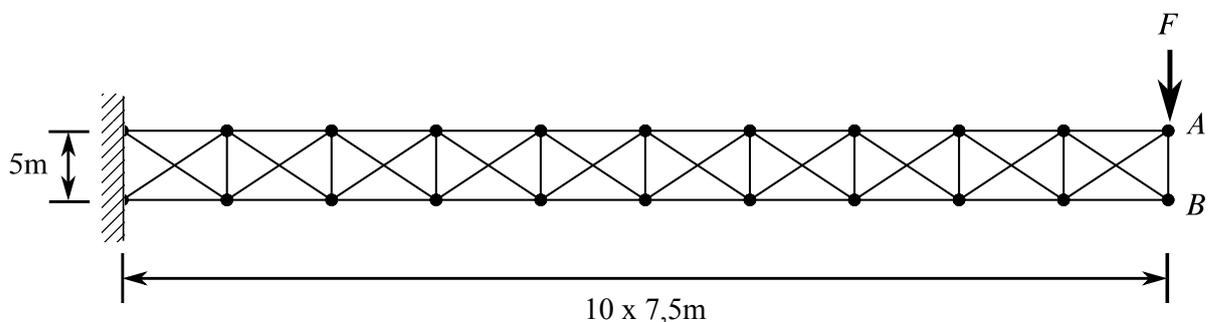


Figura 28 – Treliça engastada.

¹ www.scilab.org

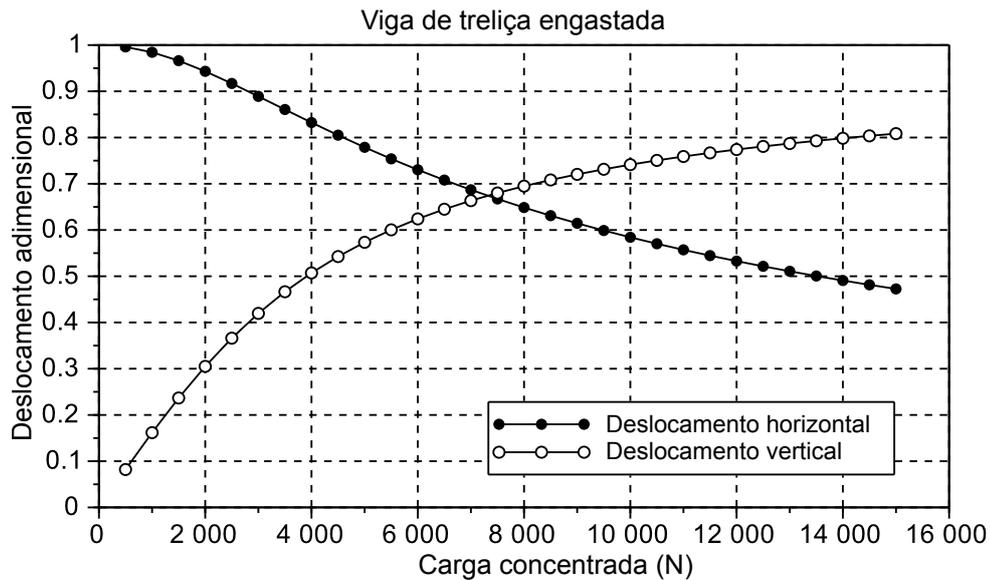


Figura 29 – Deslocamento na extremidade da treliça.

Grandes deformações da treliça submetido a uma força estática concentrada F aplicada no ponto A serão analisadas com a formulação posicional. A Figure 29 mostra o deslocamento vertical e horizontal da barra AB em termos de deslocamentos adimensionais dados pelas seguintes fórmulas

$$\frac{v_A + v_B}{2L} \quad \text{e} \quad 1 + \frac{u_A + u_B}{2L}$$

respectivamente, onde v_A e u_A são deslocamentos vertical e horizontal para o ponto A e v_B e u_B são os deslocamentos vertical e horizontal para o ponto B na qual são dados por

$$\begin{aligned} v_A &= y_a - Y_A, & u_A &= x_a - X_A \\ v_B &= y_b - Y_B, & u_B &= x_b - X_B \end{aligned}$$

onde as coordenadas (X_A, Y_A) e (X_B, Y_B) representam a configuração inicial da barra e (x_a, y_a) e (x_b, y_b) representam a configuração deformada.

A Figura 29 mostra grandes deformações na extremidade da treliça na qual altera significadamente a geometria da estrutura. Estas deformações estão ilustradas na Figura 31 que mostra várias configurações muito deformadas para diferentes forças concentradas.

Na Figura 30 é mostrada uma comparação entre a análise não linear realizada pela formulação posicional com a análise linear realizada pelo método padrão dos elementos finitos para treliças (BATHE, 2006). A Figura 30 mostra que a estrutura tem um comportamento linear para $F < 1500$ N. Contudo, as mudanças de geometria causam não linearidades de tal forma que a deformação não pode ser aproximada satisfatoriamente pela análise linear quando a força concentrada F é grande ($F > 1500$ N).

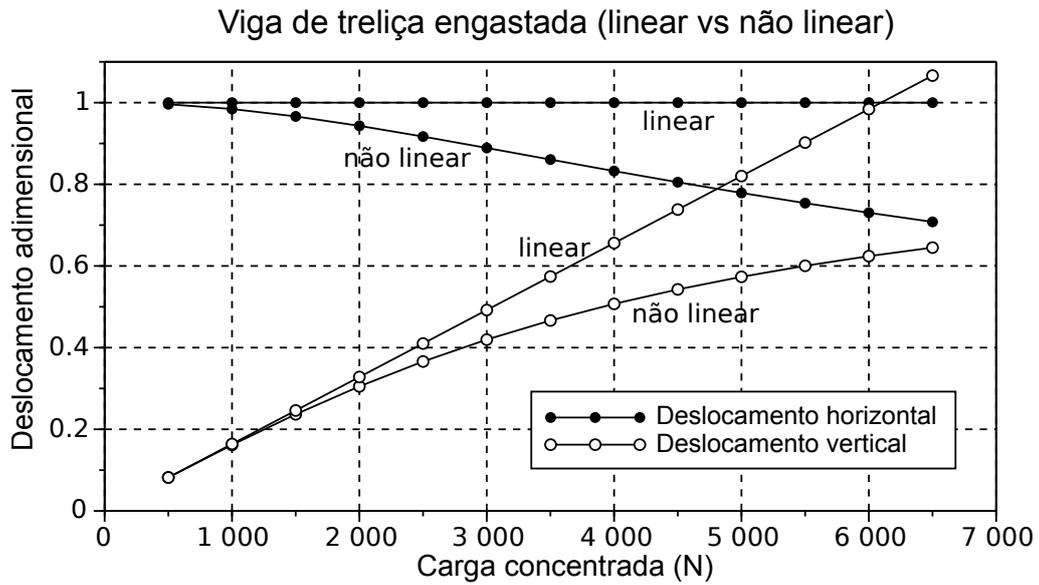


Figura 30 – Comparação entre a análise linear e não linear referente ao deslocamento no final da treliça.

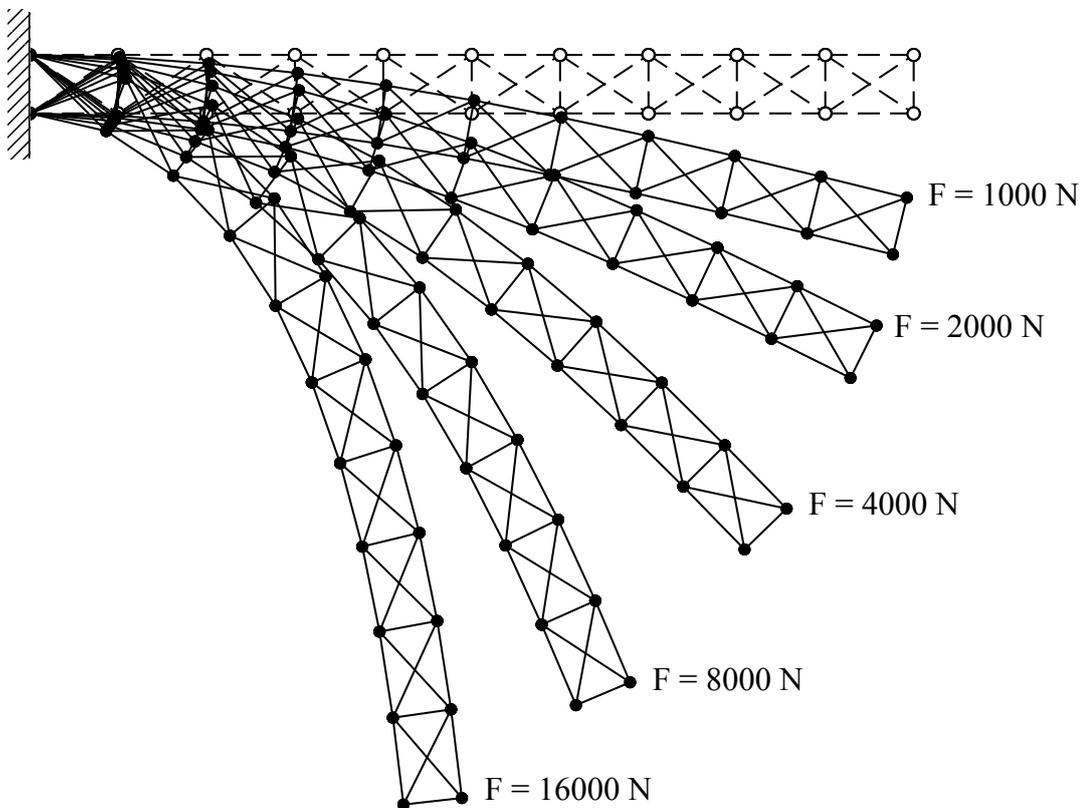


Figura 31 – Mudança de configuração da viga de treliça.

5.2 ESTRUTURA COM BARRA RÍGIDA E MOLA

Este exemplo foi extraído de (BONET; GIL; WOOD, 2012) e demonstra o fenômeno *snap-through*. A estrutura é mostrada na Figura 32 e contém uma barra rígida e uma mola de rigidez $k = 4,5 \text{ N/cm}^2$. Considere a força F e o deslocamento vertical v como sendo positivo para baixo. A solução analítica deste problema, em termos do ângulo deformado θ , é dado em (BONET; GIL; WOOD, 2012) da seguinte forma:

$$u = 10 \cos \theta - 6 \quad (5.1)$$

$$v = 8 - 10 \sin \theta \quad (5.2)$$

$$F = k \operatorname{tg} \theta (10 \cos \theta - 6) \quad (5.3)$$

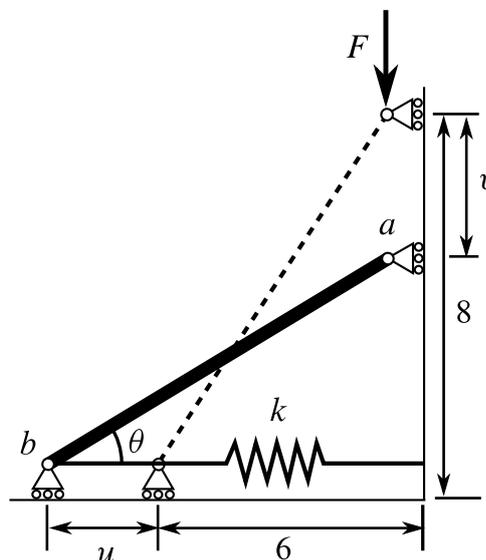


Figura 32 – Estrutura barra-mola.

As equações (5.2) e (5.3) são usadas para obter a solução analítica da relação força-deslocamento mostrado na Figura 33. Na linha sólida, na Figura 33, é o caminho de equilíbrio. Cada ponto do caminho de equilíbrio representa uma posição de equilíbrio da estrutura ou, equivalentemente, o valor mínimo da energia potencial total. Vale notar que em algumas partes do gráfico, há três posições de equilíbrio diferentes para o mesmo valor da força.

A estrutura foi modelada com a formulação posicional usando a deformação de engenharia. Ambos os membros da estrutura foram modelados com elementos de barra. A barra rígida foi modelada por um elemento de barra com $E = 1 \times 10^7 \text{ N/cm}^2$ e área da seção $A = 1 \text{ cm}^2$. A mola foi modelada por um elemento de barra de rigidez equivalente de tal forma que seu módulo de elasticidade é igual a

$$E = \frac{k l}{A} = \frac{4,5 \times 6}{1} = 27 \text{ N/cm}^2$$

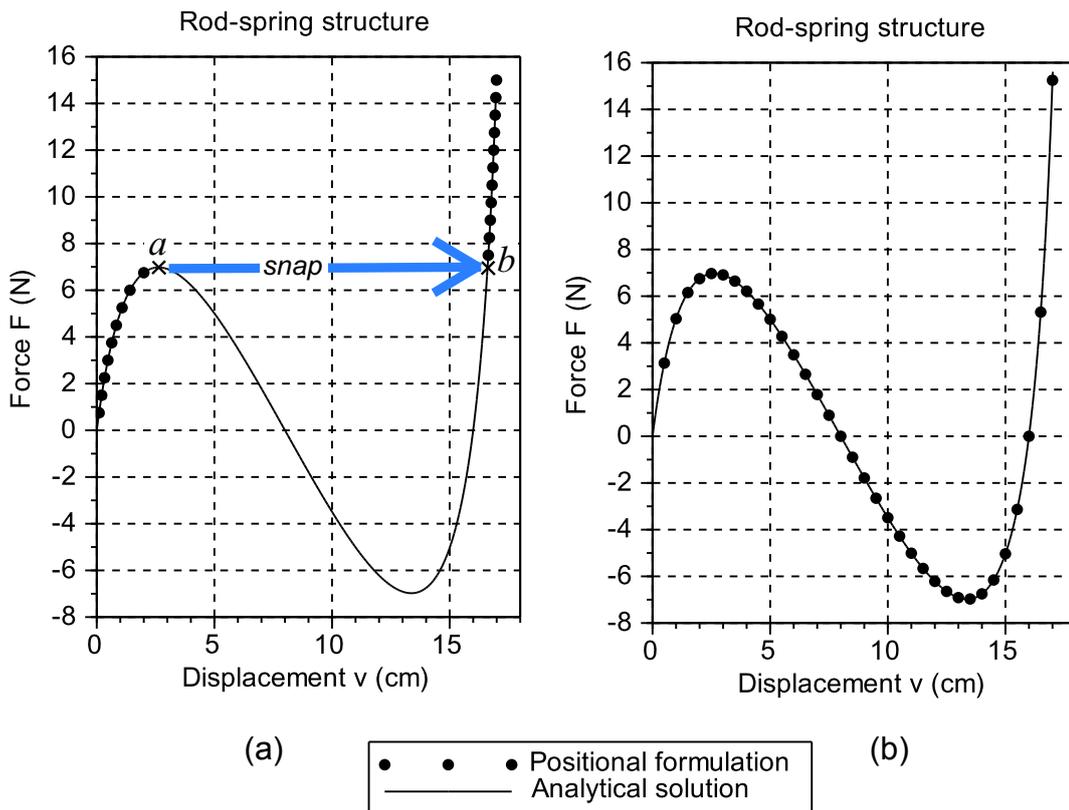


Figura 33 – Relação força-deslocamento na estrutura barra-mola. (a) Controle de carga. (b) Controle de deslocamento.

Dois tipos de gráficos foram produzidos com a formulação posicional que seguem bem de perto o caminho de equilíbrio encontrado pela solução analítica. O primeiro gráfico, na Figura 33(a), foi gerado utilizando controle de carga. A força F é incrementada de zero até 15 N usando um incremento constante de 0,75 N. Quando a força F torna-se maior do que o primeiro pico (no ponto a), a posição de equilíbrio salta para longe do pico e engata-se do lado direito do gráfico (no ponto b). Este comportamento é chamado de *snap-through*.

O segundo gráfico, na Figura 33(b), foi gerado utilizando controle de deslocamento. O deslocamento vertical v é incrementado de zero até 17 cm usando um incremento constante de 0,5 cm. Assim, é possível obter, na Figura 33(b), aquelas posições intermediárias que foram “saltadas” entre o ponto a e o ponto b na Figura 33(a). O ponto a é um ponto crítico que representa a força máxima em que a estrutura pode suportar antes do *snap-through*. Nas posições intermediárias, a força F decresce e reverte de sinal duas vezes enquanto o deslocamento continua a crescer. Contudo, é impossível permanecer em uma das posições intermediárias porque elas são posições de equilíbrio instável. Quando o efeito *snap-through* termina no ponto b , a estrutura começa a suportar valores adicionais de carga.

Neste exemplo, o controle de deslocamento determinou satisfatoriamente o caminho de equilíbrio que é relativamente simples (não apresenta *snap-backs*, por exemplo). Nos

exemplos seguintes, os caminhos de equilíbrio serão mais complexos, requerendo o uso do algoritmo de comprimento de arco.

5.3 CÚPULA DE TRELIÇA COM 24 BARRAS

Este exemplo também foi extraído de (BONET; GIL; WOOD, 2012). A treliça é ilustrada na Figura 34. Na vista superior da cúpula, o círculo externo possui raio de 50 e altura zero. O círculo interno possui raio de 25 e altura de 6,216. A carga é aplicada no ápice da treliça que possui altura de 8,816.

Na Figura 35 é mostrado o caminho de equilíbrio. O deslocamento refere-se ao deslocamento do ápice da treliça. Tanto a carga quanto o deslocamento vertical tem o sentido positivo para baixo. O caminho de equilíbrio é complexo e apresenta os fenômenos de *snap-through* e *snap-back* e por isso não pode ser obtido por simples controle de deslocamento como foi feito na Seção 5.2. Então, o caminho foi gerado com o algoritmo de comprimento de arco. Mais exatamente, o algoritmo de Riks-Wempner descrito pelo Algoritmo 3. O caminho foi gerado com 290 ciclos do algoritmo usando tolerância igual a 10^{-4} .

Os resultados da Figura 35 são compatíveis com os dados obtidos de (BONET; GIL; WOOD, 2012). Estes dados são, de certo modo, aproximados porque foram obtidos por digitalização da página do livro. A formulação posicional utilizou a medida de deformação logarítmica usando coeficiente de poisson igual a $\nu = 0,5$, indicando que volume da barra é incompressível. Esta foi a mesma medida de deformação usada em (BONET; GIL; WOOD, 2012).

Na Figura 36 é mostrado dois gráficos de caminho de equilíbrio obtidos pela formulação posicional usando deformação logarítmica ($\nu = 0,5$) e deformação de Green. A deformação logarítmica difere da deformação de Green quando há grande deformação (do inglês, *strain*). Nesta figura, nota-se que há uma diferença nos dois gráficos na vizinhança dos pontos de limites mais extremos sugerindo que nestas configurações ocorrem maiores deformações.

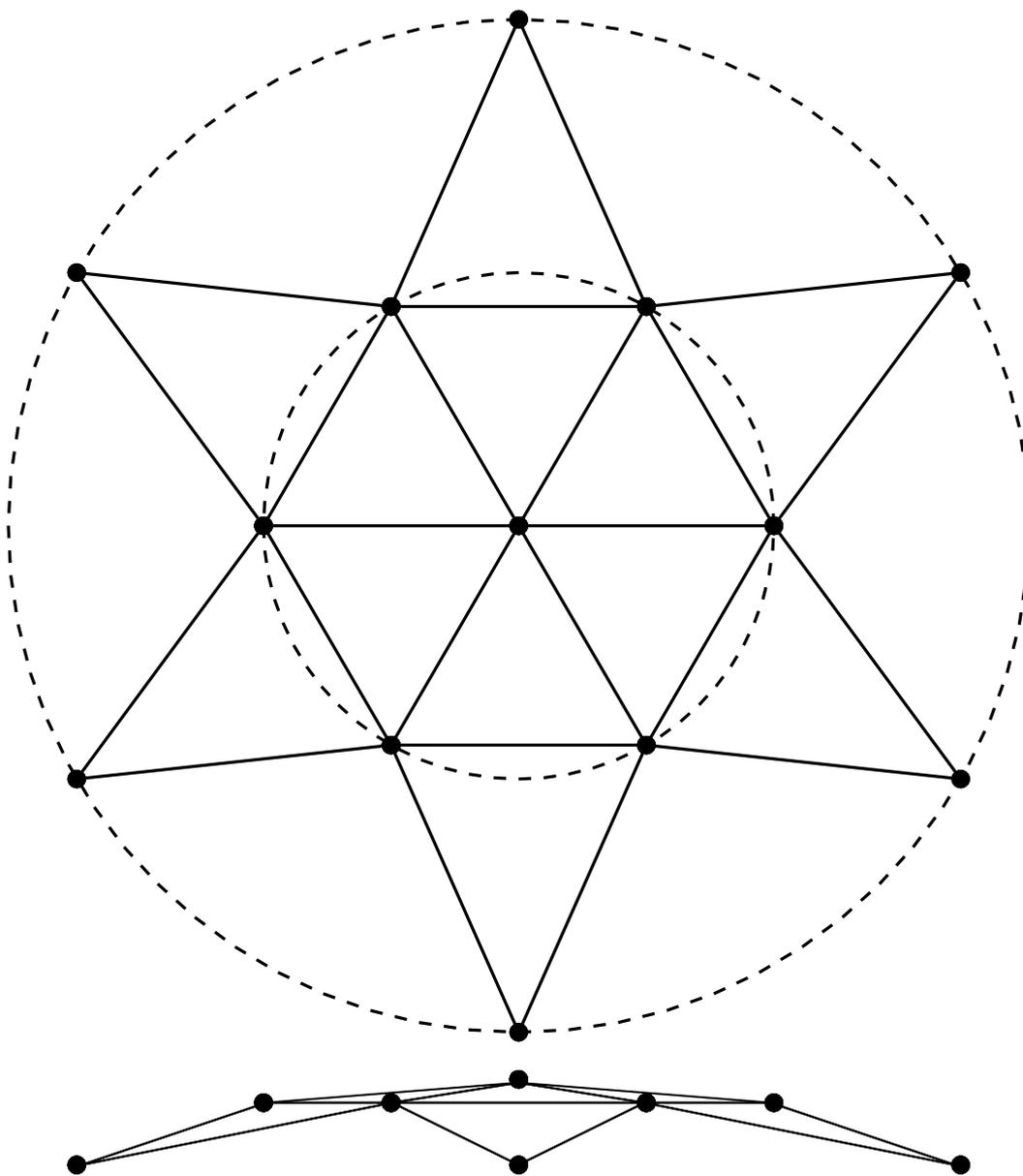


Figura 34 – Cúpula de treliça com 24 barras.

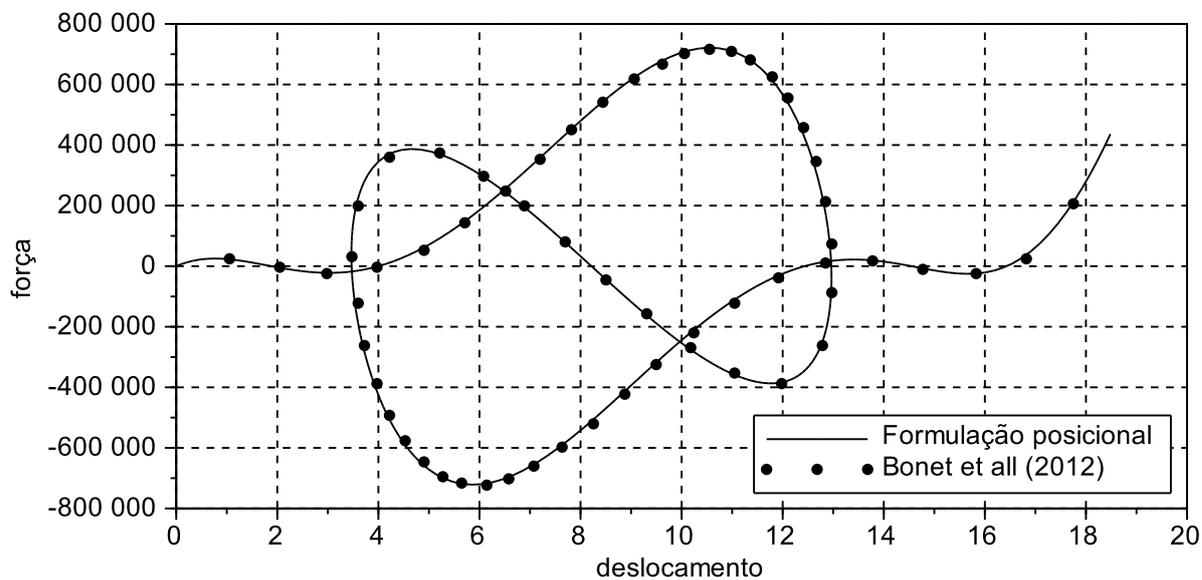


Figura 35 – Caminho de equilíbrio da cúpula de treliça com 24 barras.

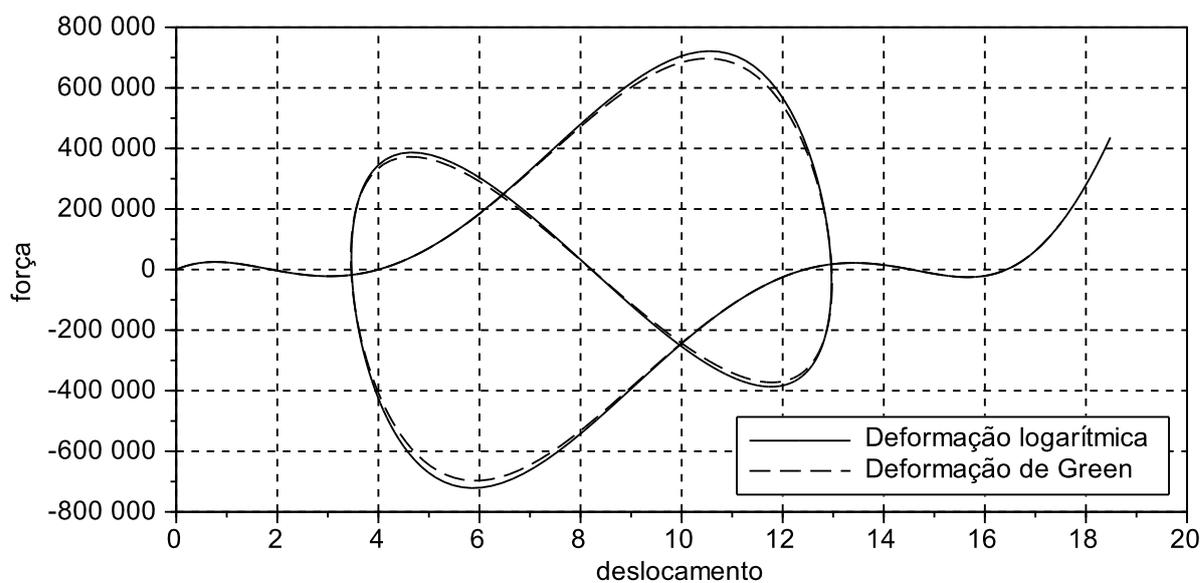


Figura 36 – Caminho de equilíbrio da cúpula de treliça com 24 barras para diferentes medidas de deformação.

5.4 TRELIÇA ESPACIAL COM 12 BARRAS

A treliça espacial com 12 barras é ilustrada na Figura 37. Esta treliça surgiu em (YANG; LEU, 1991), contudo o caminho de equilíbrio não foi gerado de forma completa. O caminho completo foi obtido por (KRENK; HEDEDAL, 1995) usando o algoritmo descrito no artigo e (KRENK, 2009) usando o algoritmo de comprimento de arco. O caminho de equilíbrio é complexo com vários *snap-throughs* e *snap-backs*.

Na treliça, os três nós do topo são livres e os restantes são fixos. Todas as barras possuem a mesma rigidez EA . As dimensões são relativas a altura $h = 1$. Para efeitos de comparação, utilizou-se a mesma notação usada em (KRENK; HEDEDAL, 1995). Ou seja, o deslocamento da treliça é caracterizado pelas variáveis u , v e w . No nó central do topo é aplicada uma força F e nos dois nós vizinhos do topo é aplicada uma força de $1,5F$.

O caminho de equilíbrio foi gerado completo com 79 ciclos pelo algoritmo de comprimento de arco de Riks-Wempner descrito no Algoritmo 3 usando uma tolerância igual a 10^{-4} . Foi utilizado a medida de deformação de Green. A Figura 38 mostra que o resultado concorda com aqueles obtidos por (KRENK; HEDEDAL, 1995) e (KRENK, 2009). As Figuras 39, 40, 41, 42 e 43 mostram o caminho de equilíbrio visto de outras direções.

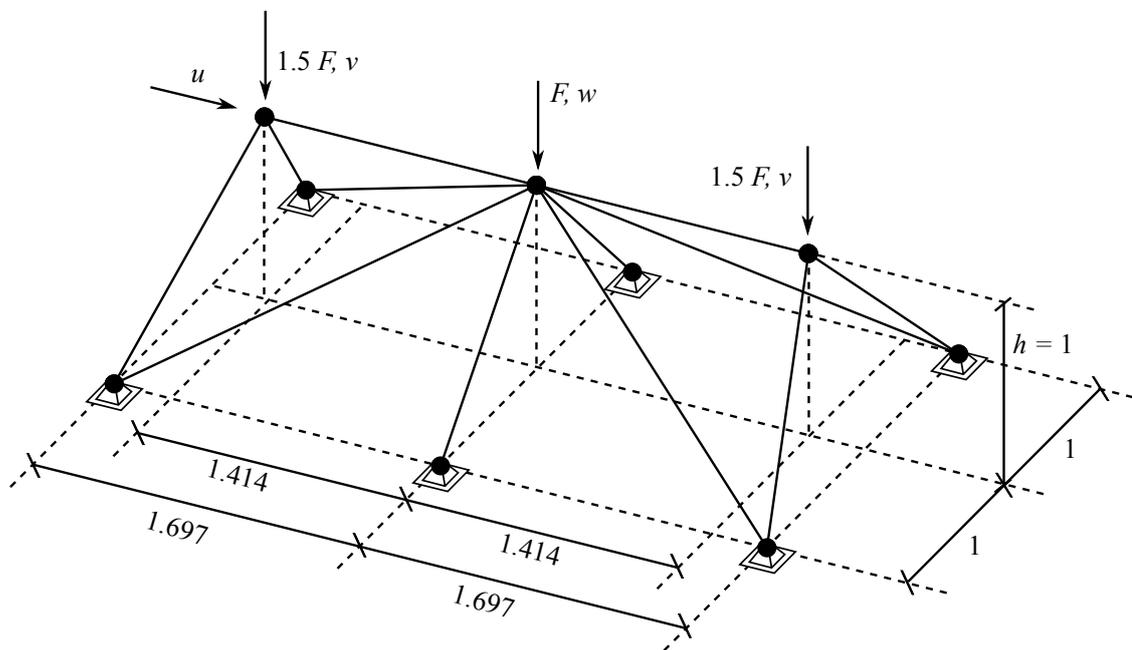


Figura 37 – Treliça espacial com 12 barras.

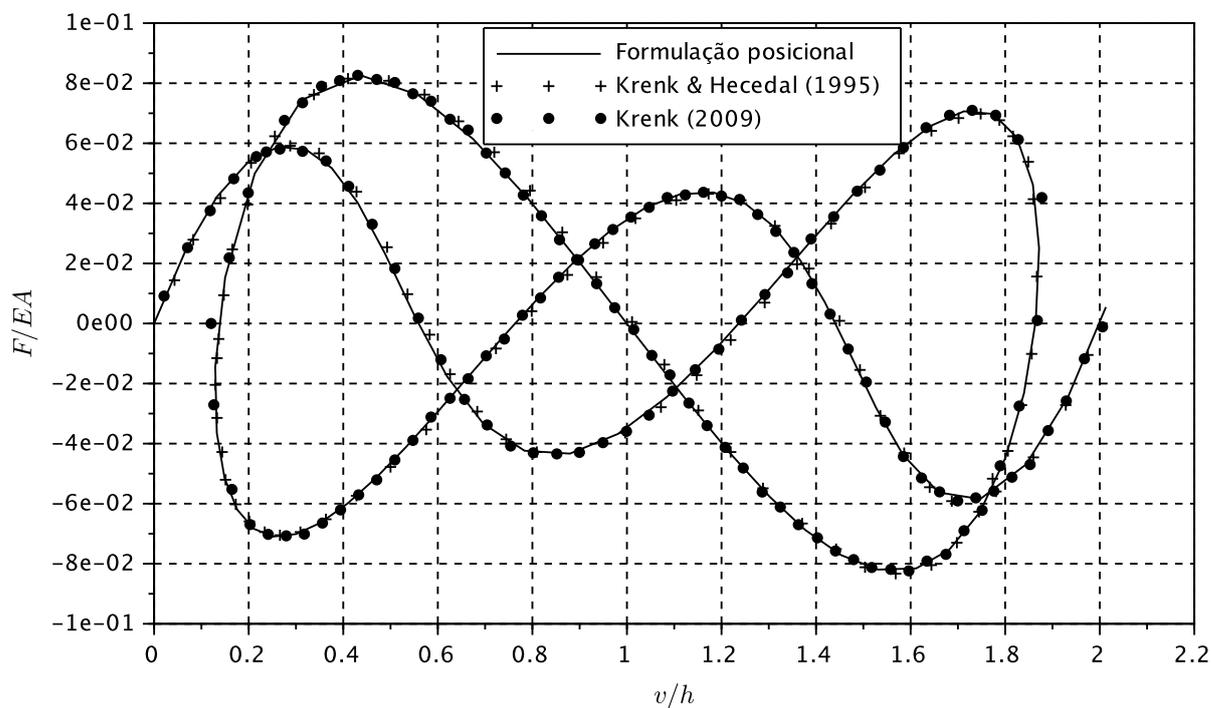


Figura 38 – Caminho do equilíbrio (direção v x carga).

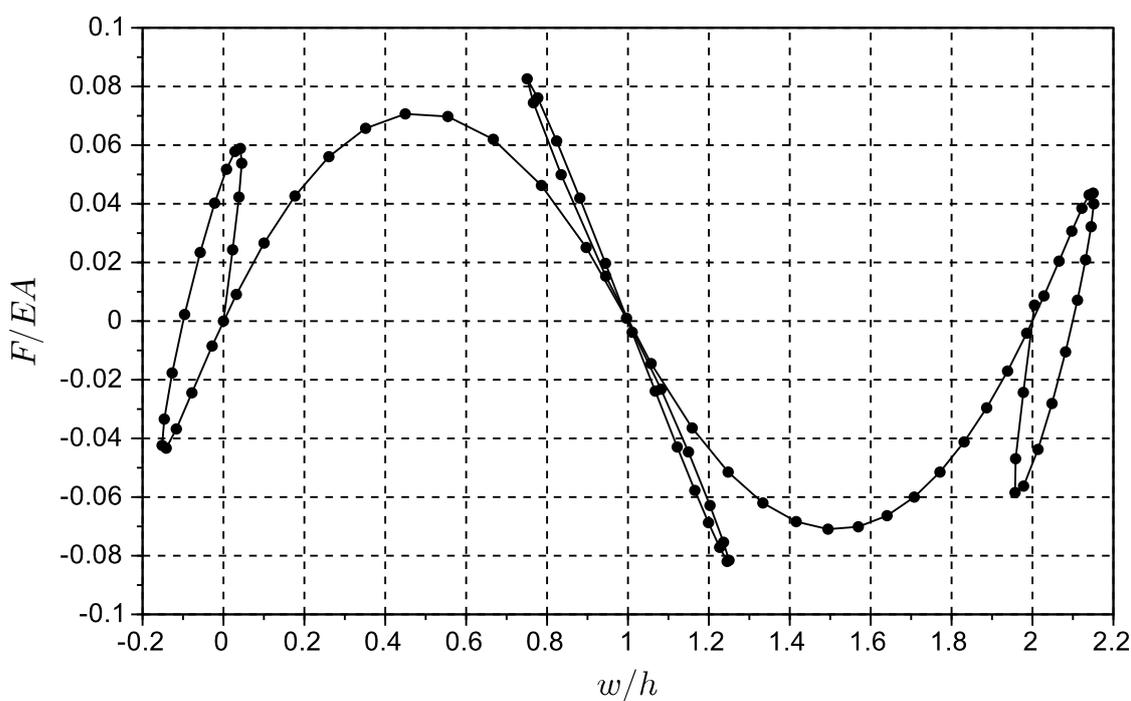


Figura 39 – Caminho do equilíbrio (direção w x carga).

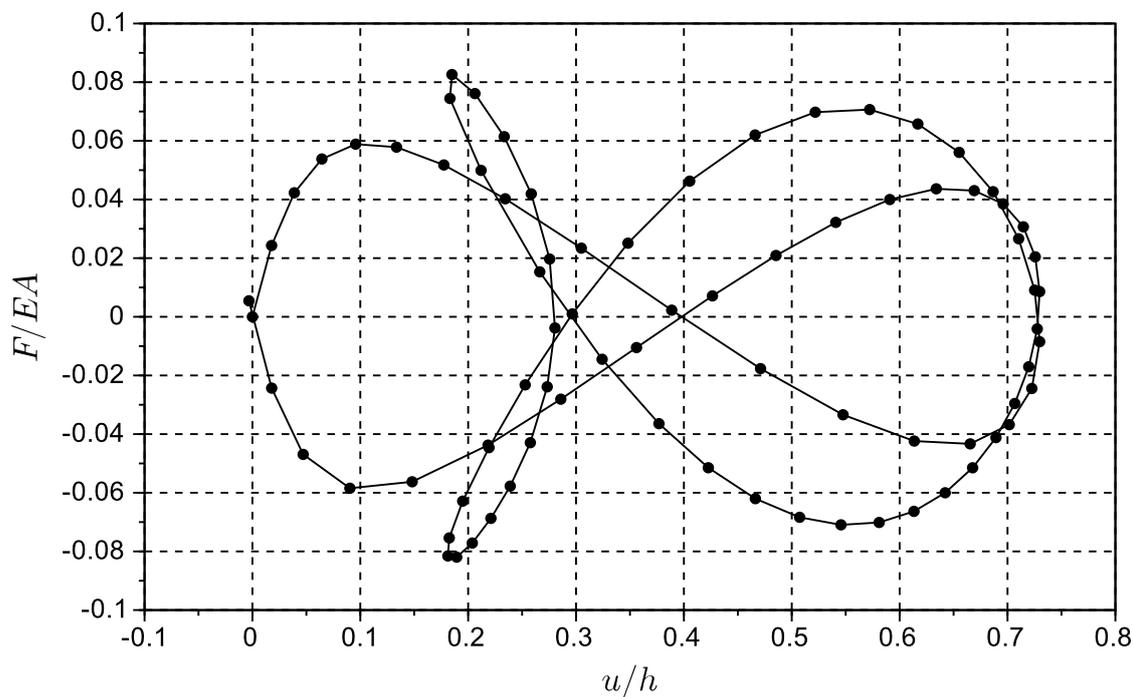


Figura 40 – Caminho do equilíbrio (direção u x carga).

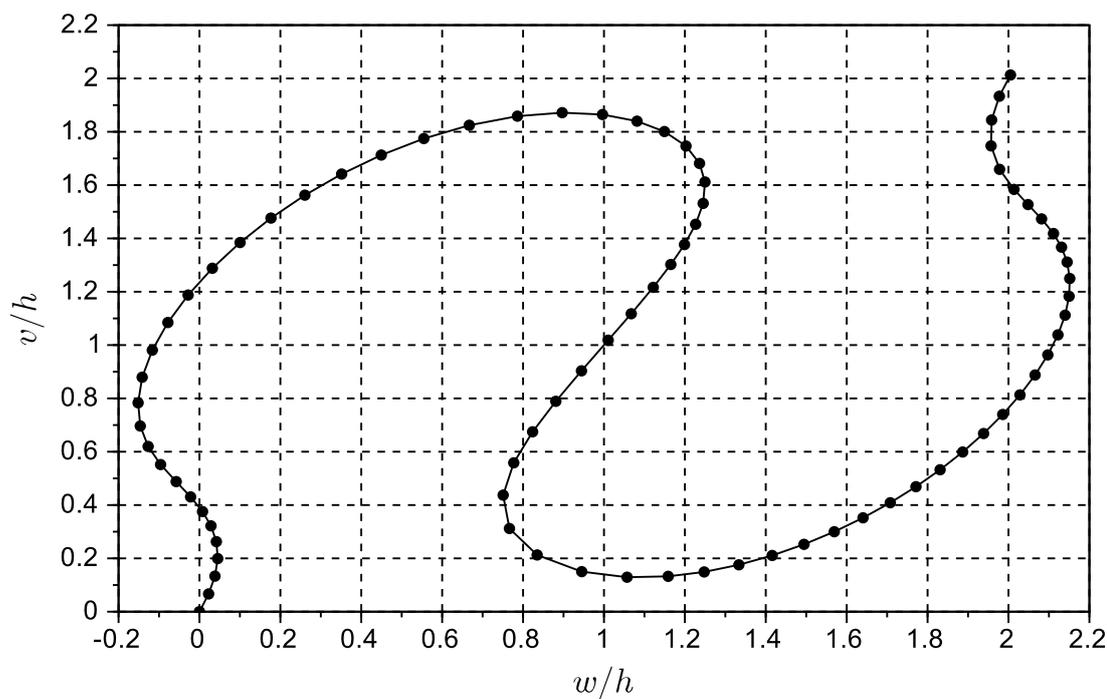


Figura 41 – Caminho do equilíbrio (direção w x direção v).

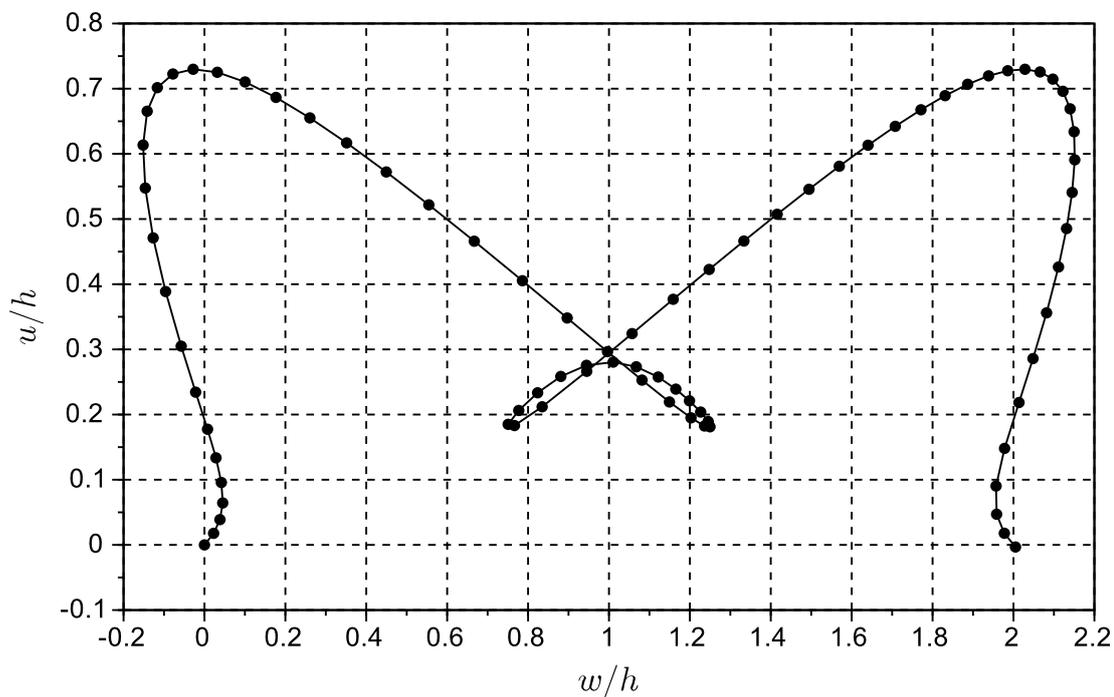


Figura 42 – Caminho do equilíbrio (direção w x direção v).

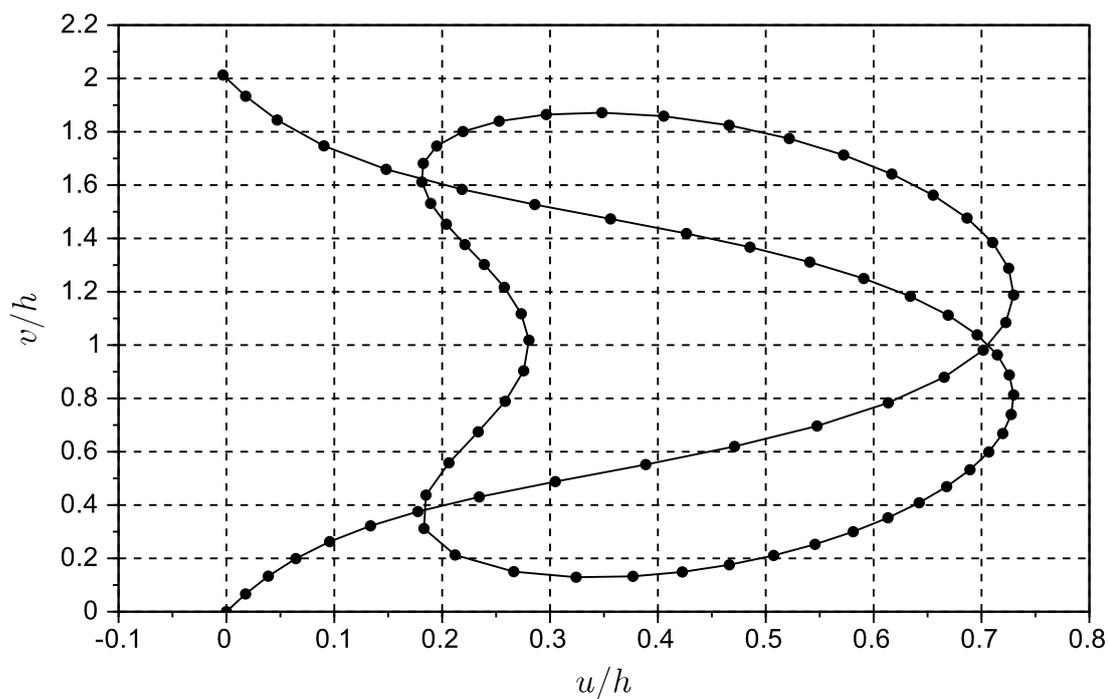


Figura 43 – Caminho do equilíbrio (direção u x direção v).

5.5 CÚPULA DE TRELIÇA COM 168 BARRAS

A cúpula de treliça com 168 barras é ilustrada na Figura 44 com suas dimensões. Uma carga igual a um é aplicada no ápice na treliça que possui altura de 8,816. A rigidez das barras é $EA = 10^4$. Este treliça apareceu em (FORDE; STIEMER, 1987) e (PAPADRAKAKIS, 1981).

O caminho de equilíbrio foi traçado usando o algoritmo de Riks-Wempner descrito no Algoritmo 3 usando tolerância igual a 10^{-4} . Nesta treliça foi utilizada a deformação logarítmica para volumes incompressíveis ($\nu = 0,5$). Os resultados do deslocamento vertical do nó 1 (Figura 45), do deslocamento vertical do nó 2 (Figura 46) e do deslocamento horizontal do nó 2 (Figura 47) foram comparados com (FORDE; STIEMER, 1987) e (PAPADRAKAKIS, 1981) e apresentaram boa concordância.

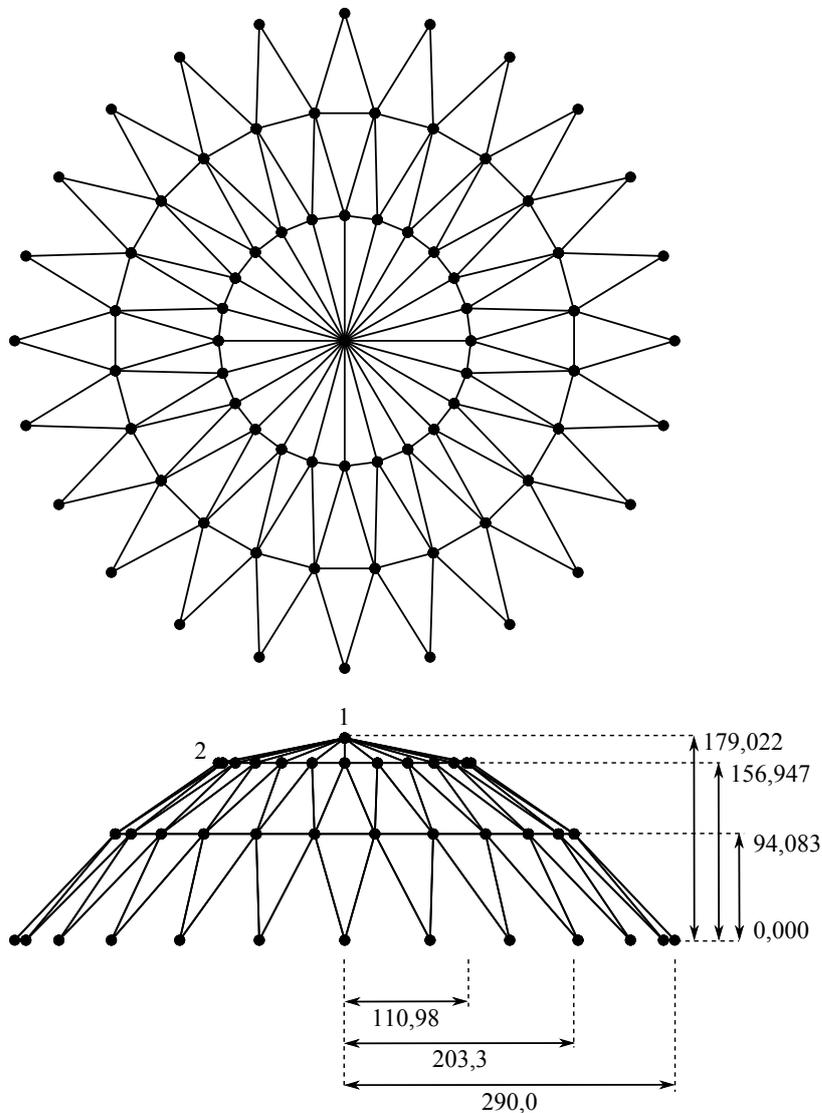


Figura 44 – Cúpula de treliça com 168 barras.

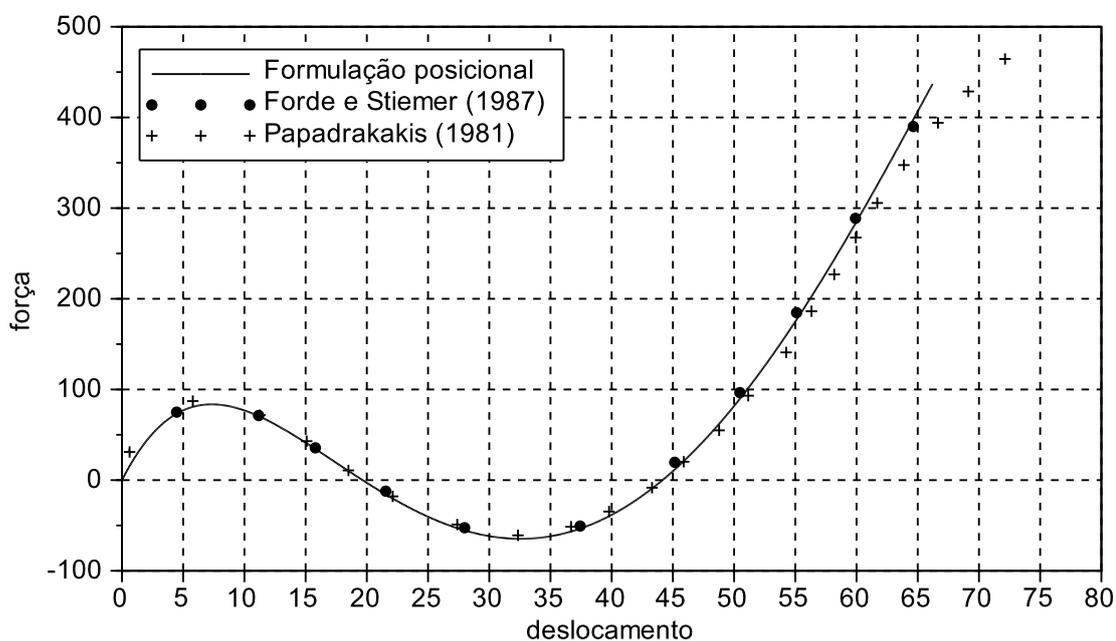


Figura 45 – Caminho do equilíbrio (deslocamento vertical do nó 1).

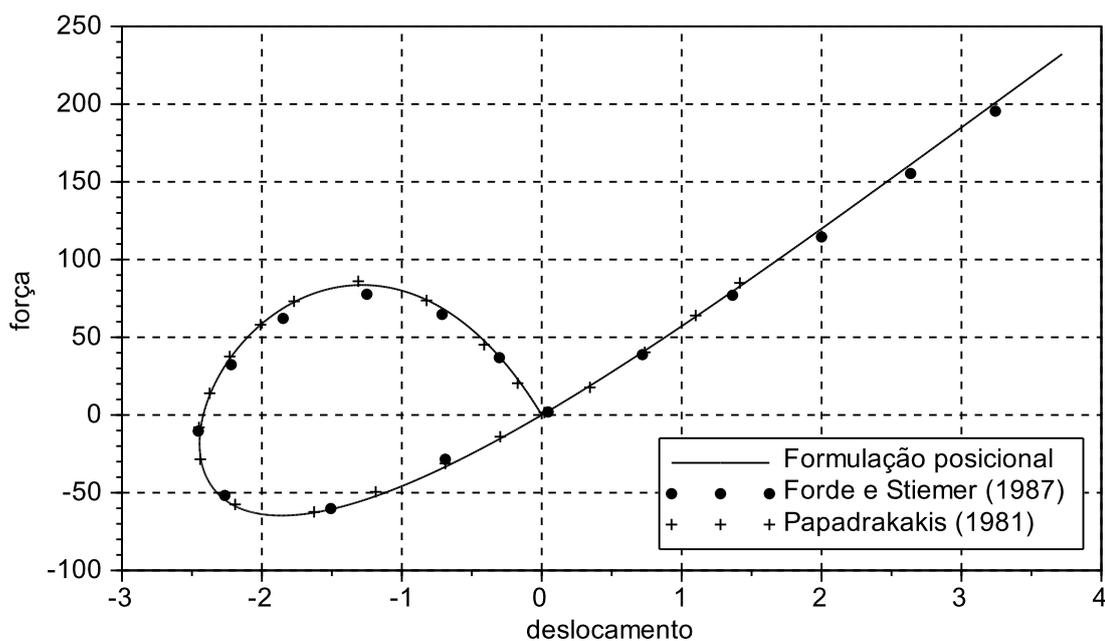


Figura 46 – Caminho do equilíbrio (deslocamento vertical do nó 2).

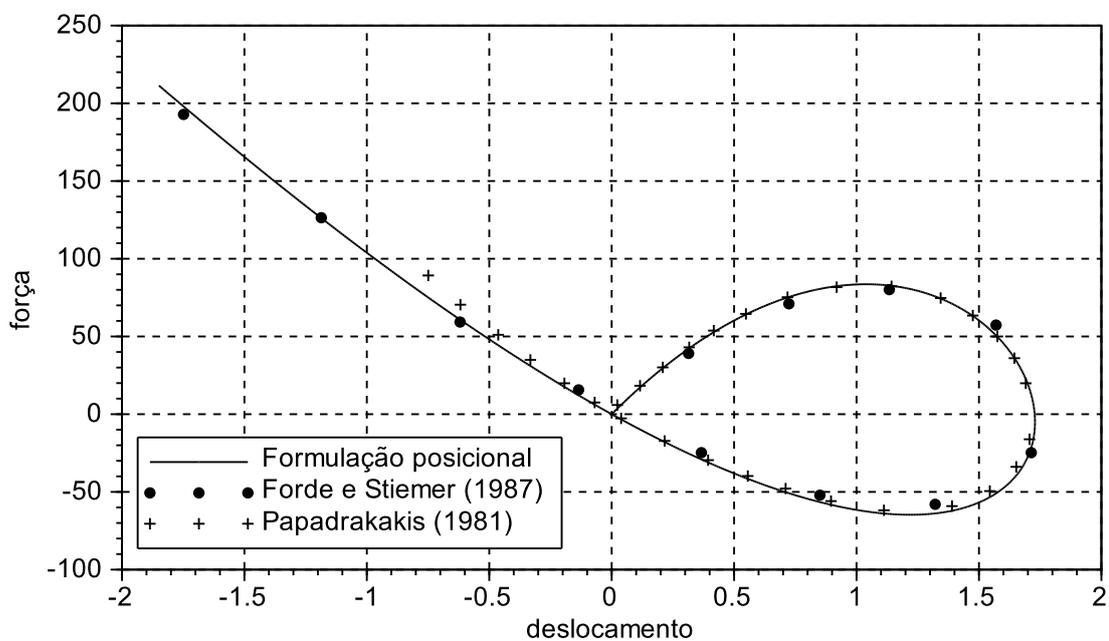


Figura 47 – Caminho do equilíbrio (deslocamento horizontal do nó 2).

5.6 ARCO DE TRELIÇA DE CRISFIELD

O arco de treliça mostrado na Figura 48 foi tomada de (CRISFIELD, 1997) e também pode ser encontrada em (HRINDA, 2007; HRINDA, 2010). A treliça possui 101 barras com 42 nós. A rigidez das barras é $EA = 10^7$ e no ápice do arco é aplicada uma carga vertical de 10^6 lb.

Uma solução parcial do caminho de equilíbrio foi apresentada em (HRINDA, 2010). Os dados desta solução é aproximado porque foram obtidos por digitalização. Os dados são comparados com a formulação posicional na Figura 49. Os resultados concordaram satisfatoriamente. Foi utilizado a medida de deformação de engenharia na formulação posicional.

O caminho de equilíbrio é complexo com múltiplos *snap-throughs* e *snap-backs*. O caminho completo é traçado na Figura 50. Ele foi gerado completo com 5000 ciclos do algoritmo de comprimento de arco de Riks-Wempner descrito no Algoritmo 3 usando tolerância igual a 10^{-4} . Os pontos mostrados na figura representam as configurações desenhadas nas Figuras 51 e 52. Estas configurações estão compatíveis com aquelas encontradas em (HRINDA, 2010).

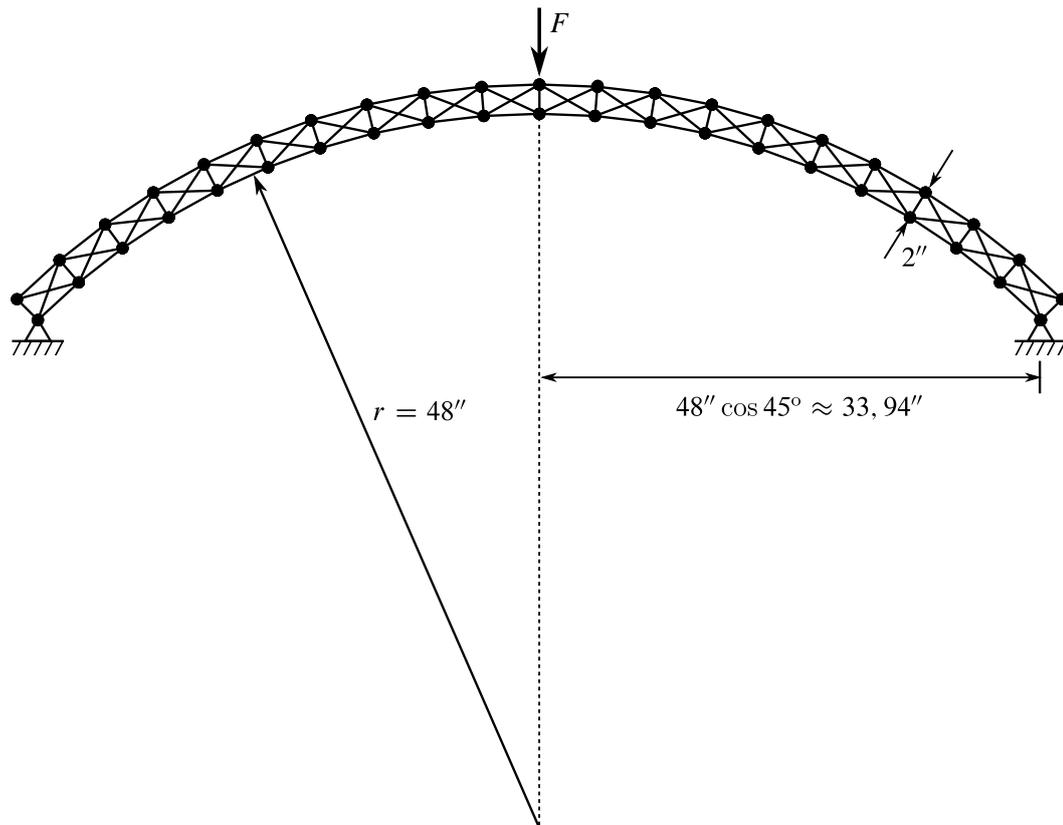


Figura 48 – Arco de treliça de Crisfield.

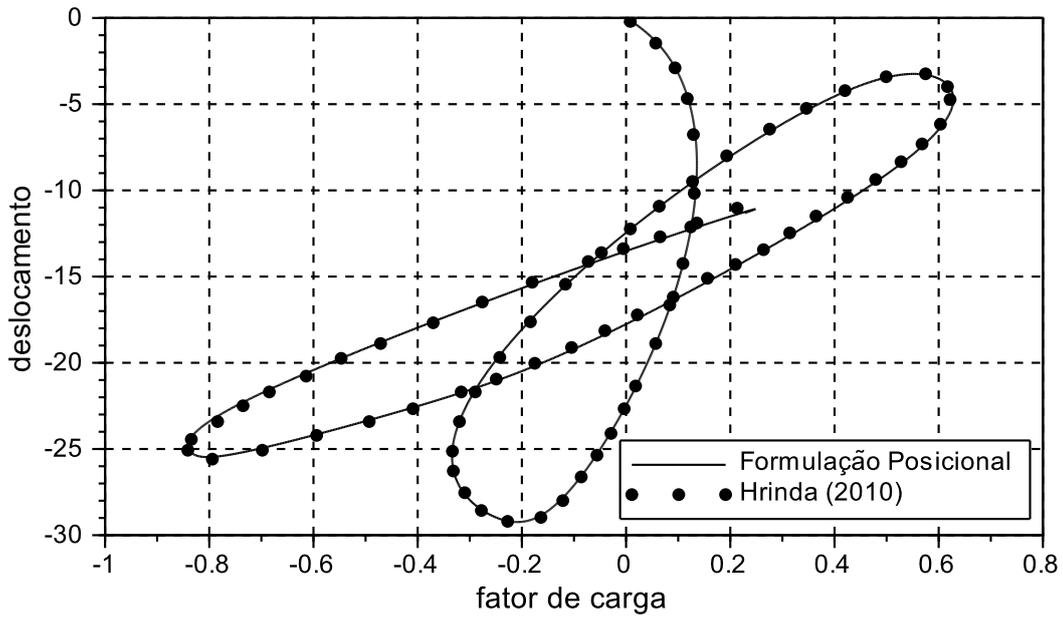


Figura 49 – Caminho de equilíbrio parcial do arco de treliça de Crisfield.

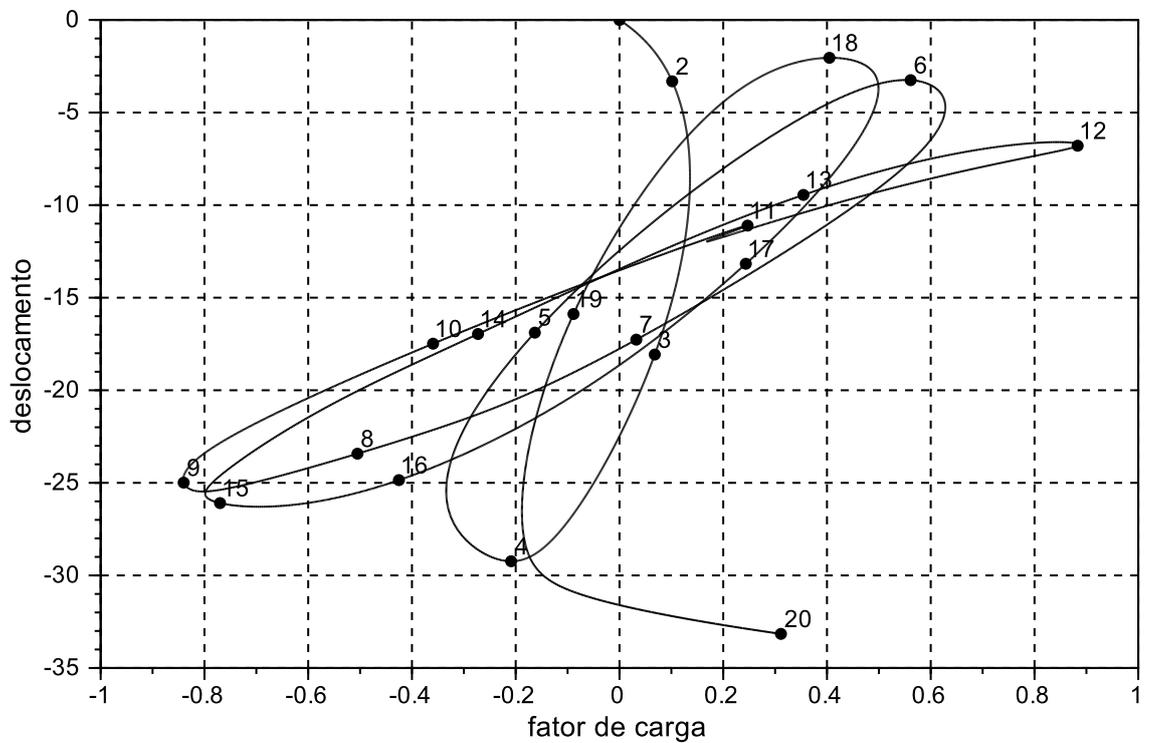


Figura 50 – Caminho de equilíbrio do arco de treliça de Crisfield. Os pontos representam as configurações mostradas nas Figuras 51 e 52.

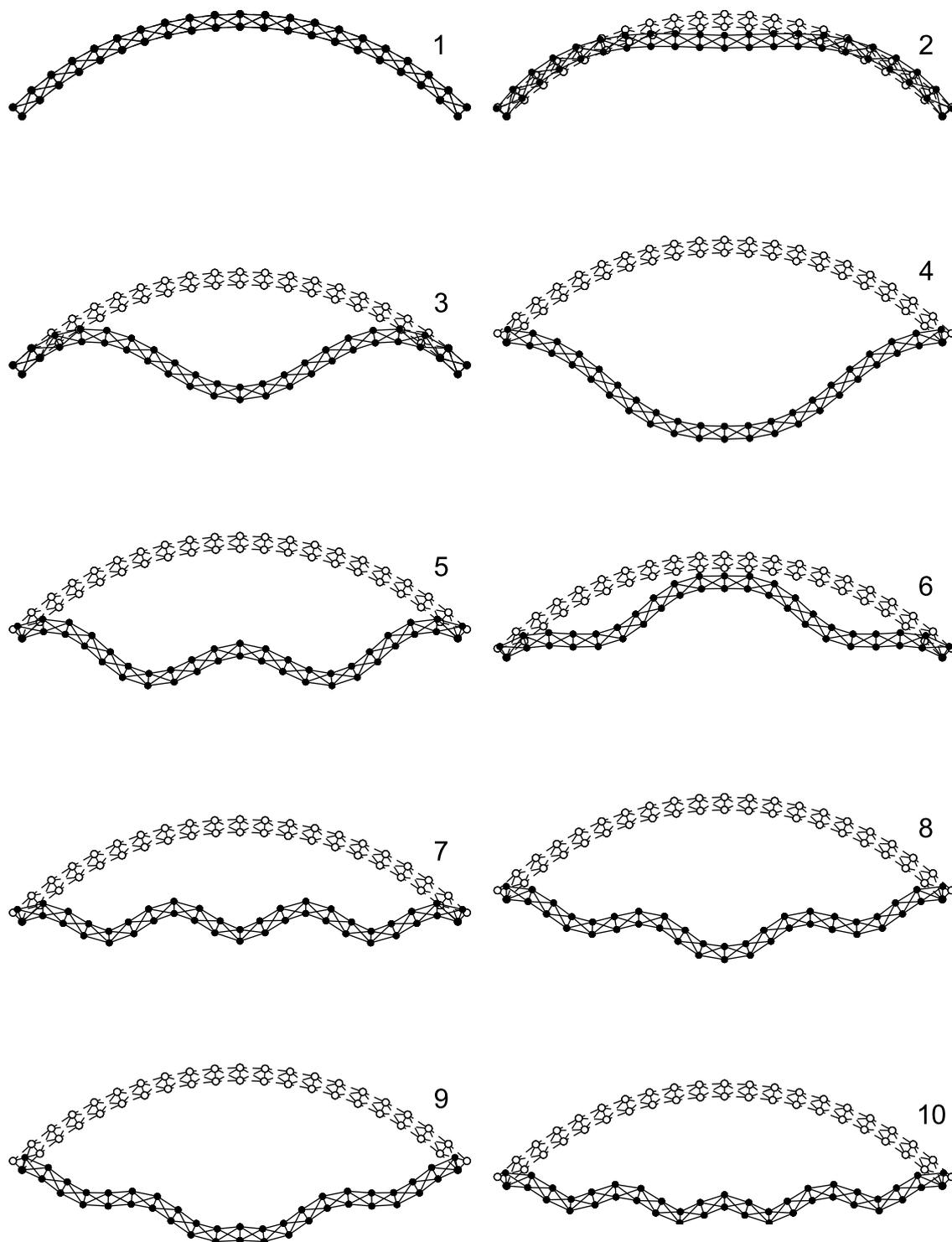


Figura 51 – Mudança de configuração do arco de treliça.

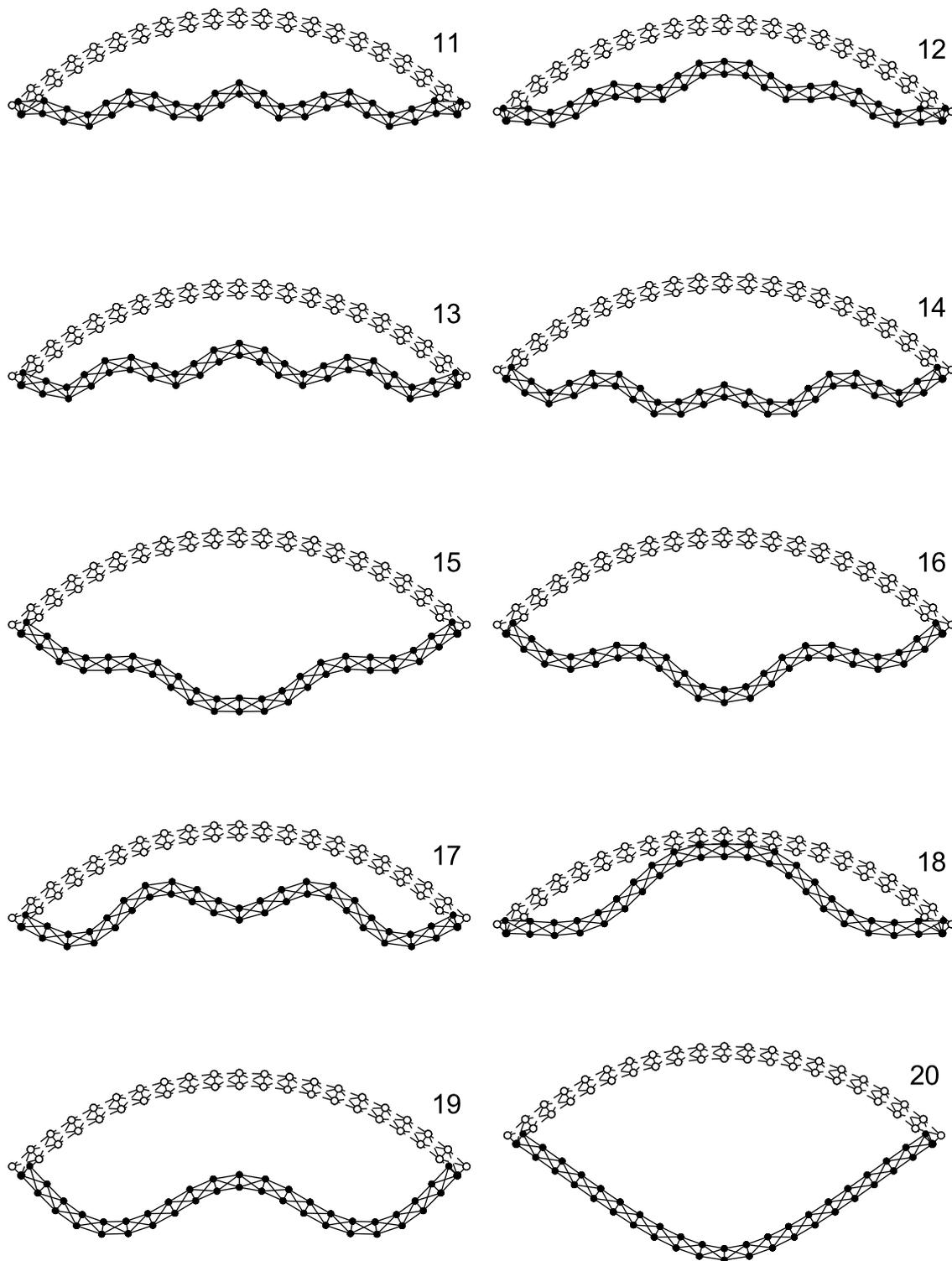


Figura 52 – Mudança de configuração do arco de treliça (continuação).

Conclusão

O texto inicia com uma introdução à análise não linear de estruturas e uma descrição teórica e computacional dos principais métodos numéricos da análise não linear: o método de Newton-Raphson para resolver as equações de equilíbrio, o procedimento incremental-iterativo e o método do comprimento de arco.

Uma contribuição desta dissertação para literatura está na forma abrangente em que foi formulado o elemento de treliça plana e espacial. Foram formulados elementos de treliça usando deformação de Green, deformação de engenharia e deformação logarítmica. Para tornar mais geral a apresentação, foram feitas formulações tanto pelo princípio da energia potencial mínima como pelo princípio dos trabalhos virtuais. Foram desenvolvidas formulações tanto para barras com volume incompressível como permitindo mudança de volume. As fórmulas, obtidas na forma matricial, podem ser diretamente empregadas em uma linguagem de programação científica.

A formulação posicional mostrou-se prática e atrativa em termos de implementação computacional. A explicação para isso, está na cinemática do elemento finito que ocorre diretamente no sistema de coordenadas globais e, portanto, não requer matrizes de transformações entre as coordenadas globais e locais.

A formulação foi inicialmente aplicada para uma estrutura simples de barra-mola para ilustrar o comportamento estrutural *snap-through*. Também foi realizada uma análise não linear de uma viga engastada de treliça de 10 quadros submetida a grandes cargas e os resultados foram comparados com a análise linear padrão do MEF para ressaltar as diferenças.

Mas outra contribuição desta dissertação para literatura da formulação posicional está nos resultados das aplicações numéricas empregando o algoritmo de comprimento de arco. A formulação posicional foi aplicada a diversas treliças já consagradas na literatura incluindo treliça espacial com 12 barras, arco de treliça e duas cúpulas de treliças com 24 e 168 barras. Estas estruturas apresentam caminhos de equilíbrio complexos com múltiplos *snap-throughs* e *snap-backs*. A formulação posicional utilizando o algoritmo de comprimento de arco obteve sucesso em traçar todos os caminhos de equilíbrio. Os resultados obtidos foram compatíveis

e mesmo idênticos a trabalhos importantes apresentados por outros pesquisadores.

Concluimos que a formulação posicional é uma alternativa viável para as formulações tradicionais do MEF, tanto por causa da praticidade na implementação computacional como pelo desempenho mostrado nas aplicações numéricas submetidas neste trabalho que foram todas bem sucedidas.

TRABALHOS FUTUROS

Uma natural continuação deste trabalho consiste em estendê-lo para outras áreas da análise não linear como estruturas com não linearidade material e análise dinâmica não linear. A otimização não linear do *layout* de treliças é também outra área pela qual poderia ser aplicado o material desenvolvido neste trabalho.

APÊNDICE A

Código fonte

Este apêndice apresenta o código fonte em Scilab do algoritmo de comprimento de arco de Riks-Wempner descrito no Algoritmo 3. Um exemplo de como usar o código fonte está no arquivo exemplo.sce aplicado à treliça da Figura 37. Os dados da treliça estão no arquivo krenkdata.sci. O algoritmo de Riks-Wempner e outras funções estão no arquivo positional-truss3d.sci.

DADOS DE ENTRADA

A geometria da treliça, as propriedades do elemento e as condições de contorno são armazenadas nas matrizes descritos a seguir. A matriz `edof` representa a topologia da treliça. `edof` é uma matriz $n_e \times 7$ onde n_e é o número de elementos. Cada linha de `edof` tem a seguinte forma

$$e, x_a^{GL}, y_a^{GL}, z_a^{GL}, x_b^{GL}, y_b^{GL}, z_b^{GL}$$

onde e é número do elemento e x_a^{GL} é o grau de liberdade da coordenada x_a da barra referente ao elemento e .

A matriz `bc` representa as condições de contorno. `bc` é uma matriz $n_c \times 2$ onde n_c é o número de condições de contorno. Cada linha de `bc` tem a seguinte forma:

GL, valor

que significa que há uma condição de contorno aplicada no grau de liberdade GL. Valor é o deslocamento prescrito para GL. Em geral, é zero. O código simplificado apresentado neste apêndice não trata o caso de valor diferente de zero.

A opção `st` representa o tipo de medida de deformação e assume os seguinte valores:

- 1 para deformação de Green;
- 2 para deformação de engenharia;
- 3 para deformação logarítmica;

4 para deformação logarítmica com mudança de volume.

A matriz ep representa as propriedades do elemento. Cada linha de ep refere-se a um elemento de treliça e tem a seguinte forma:

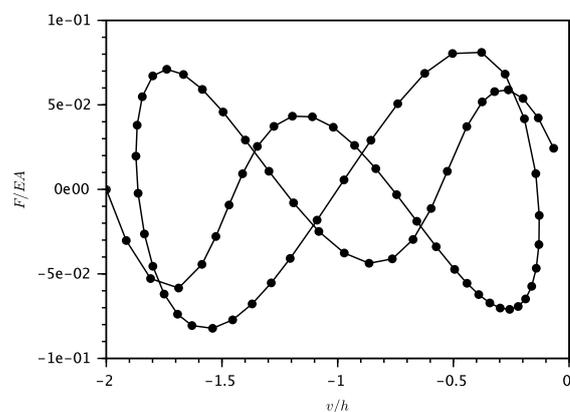
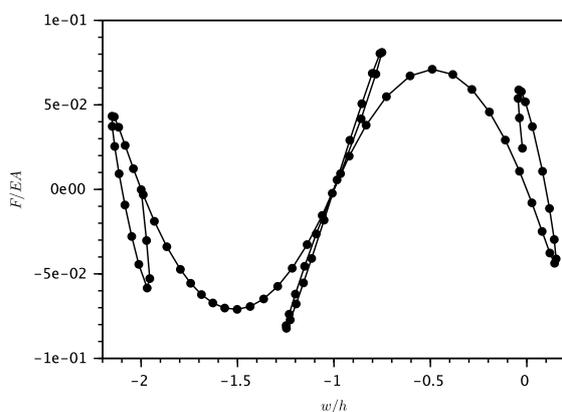
$$E, A, \nu$$

onde E é o módulo de elasticidade, A é a área de seção e ν é o coeficiente de Poisson. O coeficiente de Poisson só é usado quando a opção `st` for igual a 4 (que permite mudança de volume). Mais informações são dadas no código fonte do arquivo `krenkdata.sci`.

```

0001 ////////////////////////////////////////////////////////////////////
0002 //
0003 // ARQUIVO: exemplo.sce
0004 //
0005 // ASSUNTO: exemplo de utilização da implementação
0006 //          do algoritmo comprimento de arco
0007 //
0008 ////////////////////////////////////////////////////////////////////
0009
0010 clear;
0011 cd(get_absolute_file_path("exemplo.sce"));
0012 exec("positionltruss3d.sci");
0013 exec("krenkdata.sci");
0014
0015 // obtém as propriedades da treliça
0016 [coord,edof,bc,f,ep] = krenk83();
0017
0018 a0          = dofs(coord);
0019 [ex0,ey0,ez0] = coordE(edof,a0);
0020 el0         = lengthE(ex0,ey0,ez0);
0021 dl          = 0.1;
0022 maxCycle    = 76;
0023 id          = 2;
0024 st          = 1;
0025 dofPath     = [24 21];
0026
0027 [aPath,lamPath,fail] = riksSolver(a0,edof,f,bc,ep,el0,st,...
0028                                dl,maxCycle,id,dofPath);
0029
0030 if ~fail then
0031     // calcula os deslocamentos
0032     // deslocamento = posição atual - posição inicial
0033     w = aPath(1,:)-a0(dofPath(1));
0034     v = aPath(2,:)-a0(dofPath(2));
0035     clf();
0036     subplot(121)
0037     plot(w,lamPath,"k.-");
0038     xtitle(" ","$w/h$","$F/EA$");
0039     subplot(122)
0040     plot(v,lamPath,"k.-");
0041     xtitle(" ","$v/h$","$F/EA$");
0042 end

```



```
0001 ////////////////////////////////////////////////////////////////////
0002 //
0003 // ARQUIVO: krenkdata.sci
0004 //
0005 // ASSUNTO: Propriedades geométricas e materiais
0006 //         da treliça
0007 //
0008 ////////////////////////////////////////////////////////////////////
0009
0001 function [coord, edof, bc, f, ep]=krenk83()
0002
0003     // Coordenadas dos nós
0004     coord = [0.000 0.000 0.000; // nó 1
0005             1.697 0.000 0.000; // nó 2
0006             3.394 0.000 0.000; // nó 3
0007             0.000 2.000 0.000; // nó 4
0008             1.697 2.000 0.000; // nó 5
0009             3.394 2.000 0.000; // nó 6
0010             0.283 1.000 1.000; // nó 7
0011             1.697 1.000 1.000; // nó 8
0012             3.111 1.000 1.000]; // nó 9
0013
0014     // Elementos (cada elemento contém dois nós)
0015     elem = [1 7; 4 7; 1 8; 4 8; 2 8; 5 8;
0016            3 8; 6 8; 3 9; 6 9; 7 8; 8 9];
0017
0018     // Computa a matriz com a topologia da treliça
0019     ne = size(elem,1)
0020     edof = [];
0021     for k=1:ne
0022         i = 3*elem(k,1);
0023         j = 3*elem(k,2);
0024         a = [i-2 i-1 i];
0025         b = [j-2 j-1 j];
0026         edof = [edof; k a b];
0027     end
0028
0029     // As forças atuam nos graus de liberdade 21, 24 e 27
0030     nc = size(coord,1);
0031     f = zeros(3*nc);
0032     f(21) = -1.5;
0033     f(24) = -1;
0034     f(27) = -1.5,
0035
0036     // Os graus de liberdade da base da treliça são fixos,
0037     // todos os outros são livres.
0038     bc = [];
0039     for i=1:18
0040         bc = [bc; i 0];
0041     end
0042
0043     // Propriedades dos elementos
0044     ep = [];
0045     for i=1:12
0046         ep = [ep; 1 1 0.25];
0047     end
0048 endfunction
```

```

0001 ////////////////////////////////////////////////////////////////////
0002 //
0003 // ARQUIVO...: positionaltruss3d.sci
0004 // ASSUNTO...: Implementação da formulação posicional do MEF
0005 //             para o elemento de treliça e o algoritmo
0006 //             de comprimento de arco de Riks
0007 // VERSÃO....: 1.2
0008 // DATA.....: 25/03/2014
0009 // LINGUAGEM.: Scilab 5.4
0010 // AUTOR.....: Estéfane G. M. de Lacerda
0011 //
0012 ////////////////////////////////////////////////////////////////////
0013
0001 function [aPath, lamPath, fail]=riksSolver(a0, edof, fhat, bc, ep, e10, ..
000-1                                     st, dl, maxCycle, id, dofPath)
0002
0003 // OBJETIVO: Determina o caminho de equilíbrio usando
0004 //             o algoritmo de comprimento de arco de Riks.
0005 //
0006 // ENTRADA
0007 // a0 - vetor de posições iniciais.
0008 // edof - matriz com a topologia dos graus de liberdade.
0009 // fhat - vetor de forcas fixo.
0010 // bc - matriz das condições de contorno:
0011 //      size(bc) é [n,2], onde n é um número de condições
0012 //      de contorno.
0013 // ep - propriedades do elemento.
0014 // e10 - vetor com o comprimento inicial de cada elemento.
0015 // st - Medida de deformação:
0016 //      1 - deformação de Green;
0017 //      2 - deformação de engenharia;
0018 //      3 - deformação logarítmica;
0019 //      4 - deformação logarítmica com mudança de volume.
0020 // dl - comprimento de arco inicial.
0021 // maxCycle - número máximo de ciclos.
0022 // id - número desejado de iterações em cada ciclo.
0023 // dofPath - vetor com os graus de liberdade de interesse
0024 //           - para a análise (e.g., para gerar gráficos).
0025 //
0026 // SAÍDA
0027 // aPath - caminho de equilíbrio dos graus de liberdade
0028 //         especificados no vetor dofPath.
0029 //         size(aPath) é [m,n], onde m é o número
0030 //         de ciclos e n é o tamanho do vetor dofPath.
0031 // lamPath - caminho de equilíbrio do fator de carga.
0032 // fail - retorna %f se o algoritmo falhou em algum
0033 //        ciclo. Retorna %t se foi bem sucedido.
0034
0035 fail = %f;
0036 tol = 1.0e-4;
0037 maxInt = 10;
0038 maxLam = 1.0e20;
0039 aPath = [];
0040 lamPath = [];
0041 lam = 0.0;
0042 a = a0;
0043 da = zeros(a0);
0044 for cycle=1:maxCycle
0045     [fint,k1] = stiff(a,edof,ep,e10,st);
0046     dl = linearSolver(k1,fhat,bc);
0047     dlam = dl/norm(dl);
0048     if (da'*dl < 0) then

```

```

0049         dlam = -dlam;
0050     end
0051     da1 = dlam*d1;
0052     da = da1;
0053     fint = stiff(a+da,edof,ep,e10,st);
0054     res = fint-(lam+dlam)*fhat;
0055     for i=1:maxInt
0056         d2 = linearSolver(k1,-res,bc);
0057         ddlam = (-da1'*d2)/(da1'*d1);
0058         dda = d2+ddlam*d1;
0059         dlam = dlam+ddlam;
0060         da = da+dda;
0061         fint = stiff(a+da,edof,ep,e10,st);
0062         res = fint-(lam+dlam)*fhat;
0063         if dofNorm(res,bc) < tol*dofNorm(fhat,bc) then
0064             break;
0065         end
0066     end
0067     if (i>=maxInt) then
0068         printf("nao convergiu!\n");
0069         fail = %t;
0070         return;
0071     end
0072     lam = lam+dlam;
0073     if (lam > maxLam) then
0074         printf("fator de carga excedeu o limite!\n");
0075         fail = %t;
0076         return;
0077     end
0078     a = a+da;
0079     aPath(:,cycle) = a(dofPath);
0080     lamPath(:,cycle) = lam;
0081     dl = dl*(id/i)^0.5;
0082 end
0083 endfunction
0097
0098 function [fint, k]=stiff(a, edof, ep, e10, st)
0099 //
0100 // Montagem da matriz de rigidez tangente e do vetor de forcas
0101 // internas
0102
0103
0104     ndof = size(a,1);
0105     [ne,ndofe] = size(edof)
0106     [ex,ey,ez] = coordE(edof,a);
0107     if argn(1) == 1 then
0108         // monta apenas o vetor de forcas internas
0109         fint = zeros(ndof,1);
0110         for i=1:ne
0111             fintE = trussE(ep(i,:),ex(i,:),ey(i,:),ez(i,:),e10(i,:),st);
0112             p = edof(i,2:ndofe);
0113             fint(p(:)) = fint(p(:))+fintE;
0114         end
0115     else
0116         // monta o vetor de forcas internas e a matriz de rigidez
0117         // tangente
0118         k = zeros(ndof,ndof);
0119         fint = zeros(ndof,1);
0120         for i=1:ne
0121             [fintE,kE] = trussE(ep(i,:),ex(i,:),ey(i,:),ez(i,:),e10(i,:),st);
0122             p = edof(i,2:ndofe);
0123             fint(p(:)) = fint(p(:))+fintE;
0124             k(p(:),p(:)) = k(p(:),p(:))+kE;

```

```

0025         end
0026     end
0027 endfunction
0028
0029 // Metodo de newton Raphson
0129 function [a, fint, fail]=newtonRaphsonSolver(a0, edof, fext, bc, ep, el0, st)
0130     maxInt = 30;
0001     tol = 1e-4;
0002     a = a0;
0003     [ex,ey,ez] = coordE(edof,a);
0004     ne = size(edof,1);
0005     ndof = size(a,1);
0006     for i=1:maxInt
0007         [fint,k] = stiff(a,edof,ep,el0,st);
0008         res = fext-fint;
0009         da = linearSolver(k,res,bc);
0010         if norm(da) < tol then
0011             break;
0012         end
0013         a = a + da;
0014         [ex,ey,ez] = coordE(edof,a);
0015     end
0016     if (i>=maxInt) then
0017         printf("O programa não convergiu!\n");
0018         fail = %t;
0019     else
0020         fail = %f;
0021     end
0022 endfunction
0023
0024 // Elemento genérico de treliça
0155 function [fintE, kE]=trussE(ep, ex, ey, ez, l0, st)
0156     if argn(1) == 1 then
0157         select st
0158             case 1 then fintE = trussGreen(ep,ex,ey,ez,l0);
0001             case 2 then fintE = trussEng(ep,ex,ey,ez,l0);
0002             case 3 then fintE = trussLog(ep,ex,ey,ez,l0);
0003             case 4 then fintE = trussLogVar(ep,ex,ey,ez,l0);
0004         end
0005     else
0006         select st
0007             case 1 then [fintE,kE] = trussGreen(ep,ex,ey,ez,l0);
0008             case 2 then [fintE,kE] = trussEng(ep,ex,ey,ez,l0);
0009             case 3 then [fintE,kE] = trussLog(ep,ex,ey,ez,l0);
0010             case 4 then [fintE,kE] = trussLogVar(ep,ex,ey,ez,l0);
0011         end
0012     end
0013 endfunction
0014
0015 // Elemento de treliça usando deformação de Green
0016 function [fint, k]=trussGreen(ep, ex, ey, ez, l0)
0017     ea = ep(1)*ep(2);
0176     dx = ex(2)-ex(1);
0177     dy = ey(2)-ey(1);
0178     dz = ez(2)-ez(1);
0001     l = sqrt(dx*dx+dy*dy+dz*dz);
0002     d = [-dx;-dy;-dz;dx;dy;dz];
0003     eps = (l^2-10^2)/(2*10^2);
0004     fint = (ea*eps/l0)*d;
0005     if argn(1) == 2 then
0006         b = d*d';
0007         c = [ 1  0  0 -1  0  0];

```

```

0008         0  1  0  0 -1  0;
0009         0  0  1  0  0 -1;
0010        -1  0  0  1  0  0;
0011         0 -1  0  0  1  0;
0012         0  0 -1  0  0  1];
0013     k = (ea/10^3)*b + (ea*eps/10)*c;
0014     end
0015 endfunction
0016
0017 // Elemento de treliça usando deformação de engenharia
0018 function [fint, k]=trussEng(ep, ex, ey, ez, l0)
0019     ea = ep(1)*ep(2);
0020     dx = ex(2)-ex(1);
0199     dy = ey(2)-ey(1);
0200     dz = ez(2)-ez(1);
0201     l = sqrt(dx*dx+dy*dy+dz*dz);
0001     d = [-dx;-dy;-dz;dx;dy;dz];
0002     eps = (l-l0)/l0;
0003     fint = ea*eps/l*d;
0004     if argn(1) == 2 then
0005         b = d*d';
0006         c = [ 1  0  0 -1  0  0;
0007             0  1  0  0 -1  0;
0008             0  0  1  0  0 -1;
0009            -1  0  0  1  0  0;
0010             0 -1  0  0  1  0;
0011             0  0 -1  0  0  1];
0012         k = ea/(l^3)*b + (ea*eps/l)*c;
0013     end
0014 endfunction
0015
0016 // Elemento de treliça usando deformação logarítmica
0017 function [fint, k]=trussLog(ep, ex, ey, ez, l0)
0018     ea = ep(1)*ep(2);
0019     dx = ex(2)-ex(1);
0020     dy = ey(2)-ey(1);
0222     dz = ez(2)-ez(1);
0223     l = sqrt(dx*dx+dy*dy+dz*dz);
0224     d = [-dx;-dy;-dz;dx;dy;dz];
0001     eps = log(l/l0);
0002     fint = (ea*10*eps/l^2)*d;
0003     if argn(1) == 2 then
0004         b = d*d';
0005         c = [ 1  0  0 -1  0  0;
0006             0  1  0  0 -1  0;
0007             0  0  1  0  0 -1;
0008            -1  0  0  1  0  0;
0009             0 -1  0  0  1  0;
0010             0  0 -1  0  0  1];
0011         k = (ea*10/l^4)*(1-2*eps)*b + (ea*eps*10/l^2)*c;
0012     end
0013 endfunction
0014
0015 // Elemento de treliça usando deformação logarítmica e permitindo
0016 // mudança de volume
0017 function [fint, k]=trussLogVar(ep, ex, ey, ez, l0)
0018     e = ep(1);
0019     a0 = ep(2);
0020     pois = ep(3);
0245     dx = ex(2)-ex(1);
0246     dy = ey(2)-ey(1);
0247     dz = ez(2)-ez(1);

```

```

00248     l     = sqrt(dx*dx+dy*dy+dz*dz);
00001     d     = [-dx;-dy;-dz;dx;dy;dz];
00002     eps   = log(1/10);
00003     an    = a0*(10/1)^(2*pois);
00004     fint  = (e*eps*an/l)*d;
00005     if argn(1) == 2 then
00006         b     = d*d';
00007         c     = [ 1  0  0 -1  0  0;
00008                 0  1  0  0 -1  0;
00009                 0  0  1  0  0 -1;
00010                 -1  0  0  1  0  0;
00011                 0 -1  0  0  1  0;
00012                 0  0 -1  0  0  1];
00013         k     = (e*an/l^3)*(1-(1+2*pois)*eps)*b + (e*eps*an/l)*c;
00014     end
00015 endfunction
00016
00017 function [ex, ey, ez]=coordE(edof, a)
00018     ne = size(edof,1);
00019     ex = zeros(ne,2);
00020     ey = zeros(ne,2);
00021     ez = zeros(ne,2);
00022     for i=1:ne
00023         ex(i,:) = a(edof(i,[2 5]))';
00024         ey(i,:) = a(edof(i,[3 6]))';
00025         ez(i,:) = a(edof(i,[4 7]))';
00026     end
00027 endfunction
00028
00029 // Converte as coordenadas em vetor de graus de liberdade
00030 function a=dofs(coord)
00031     [m,n] = size(coord);
00032     a     = zeros(m*n);
00033     for i=1:m
00034         j     = 3*i;
00035         a(j-2) = coord(i,1);
00036         a(j-1) = coord(i,2);
00037         a(j)   = coord(i,3);
00038     end
00039 endfunction
00040
00041 // Converte os graus de liberdade
00042 // nas coordenadas de cada elemento
00043 function [ex, ey, ez]=coordE(edof, a)
00044     ne = size(edof,1);
00045     ex = zeros(ne,2);
00046     ey = zeros(ne,2);
00047     ez = zeros(ne,2);
00048     for i=1:ne
00049         ex(i,:) = a(edof(i,[2 5]))';
00050         ey(i,:) = a(edof(i,[3 6]))';
00051         ez(i,:) = a(edof(i,[4 7]))';
00052     end
00053 endfunction
00054
00055 // Retorna um vetor com os comprimento de cada elemento
00056 function el=lengthE(ex, ey, ez)
00057     b = [ ex(:,2)-ex(:,1), ey(:,2)-ey(:,1), ez(:,2)-ez(:,1) ];
00058     el = sqrt(diag(b*b'));
00059 endfunction
00060
00061 // Resolve um sistema linear respeitando os

```

```
0009 // as condições de contorno
0010 function da=linearSolver(k, fext, bc)
0011     ndof = size(k,1);
0313     fdof = [1:ndof]';
0314     da = zeros(ndof,1);
0315     pdof = bc(:,1);
0001     fdof(pdof) = [];
0002     s = k(fdof,fdof)\(fext(fdof));
0003     da(pdof) = 0;
0004     da(fdof) = s;
0320 endfunction
0321
0322 // Calcula a norma de um vetor respeitando os
0323 // as condições de contorno
0001 function n=dofNorm(a, bc)
0002     ndof = size(a,1);
0003     fdof = [1:ndof]';
0004     pdof = bc(:,1);
0005     fdof(pdof) = [];
0006     n = norm(a(fdof))
0007 endfunction
```

Referências

- ABRAT, S.; SUN, C. T. Dynamic analysis of geometrically nonlinear truss structures. *Computers & Structures*, v. 17, n. 4, p. 491–497, 1983.
- ANTMAN, S. *Nonlinear Problems of Elasticity*. 2. ed. [S.l.]: Springer, 2005.
- BALTOZ, J.; DHATT, G. Incremental displacement algorithms for nonlinear problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 4, p. 1262–1266, 1979.
- BATHE, K. J. *Finite Element Procedures*. Cambridge, MA: Klaus-Jürgen Bathe, 2006.
- BELYTSCHKO, T. et al. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. 2. ed. Chichester, West Sussex, UK: John Wiley and Sons Ltd, 2014.
- BONET, J.; GIL, A. J.; WOOD, . *Worked Examples in Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2012.
- BONET, J.; WOOD, R. D. *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*. 2. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2008.
- BORST, R. D. et al. *Nonlinear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. 2. ed. Chichester, West Sussex, UK: John Wiley and Sons Ltd, 2012.
- BREBBIA, C.; DOMINGUEZ, J. *Boundary Elements: An Introductory Course*. [S.l.]: WIT Press, 1992.
- BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. *Análise numérica*. São Paulo: Thomson, 2003.
- CARRAZEDO, R. *Estudo e desenvolvimento de código computacional para análise de impacto entre estruturas levando em consideração efeitos térmicos*. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.
- CASSEL, K. W. *Variational Methods with Applications in Science and Engineering*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2013.
- CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. *Métodos Numéricos para Engenharia*. 5. ed. São Paulo: McGraw Hill, 2008.
- CIARLET, P. G. *Mathematical Elasticity: Three-dimensional elasticity, Volume 1*. [S.l.]: Elsevier, 1988.

- CODA, H. B. *Análise não linear geométrica de sólidos e estruturas: uma formulação posicional baseada no MEF*. 2003. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo. Tese (Texto complementar para concurso de professor titular).
- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. An alternative positional fem formulation for geometrically non-linear analysis of shells-curved triangular isoparametric elements. *Computational Mechanics*, v. 40, p. 185–200, 2007.
- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. A positional fem formulation for geometrical non-linear analysis of shells. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 5, p. 205–223, 2008.
- COIMBRA, A. L. *Novas lições de Mecânica do Contínuo*. [S.l.]: Edgard Bücher, 1981.
- COOK, R. D. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. 3. ed. New York: John Wiley & Sons Inc., 2001.
- CRISFIELD, M. A. A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap-through. *Computer and Structures*, 1981.
- CRISFIELD, M. A. *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. Volume 1: Essentials*. 1. ed. Chichester, West Sussex, UK: John Wiley and Sons Ltd, 1991.
- CRISFIELD, M. A. *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. Volume 2: Advanced Topics*. 1. ed. Chichester, West Sussex, UK: John Wiley and Sons Ltd, 1997.
- FELLIPA, C. A. *Nonlinear Finite Element Methods*. 2012. Course Note ASEN 5017.
- FENG, Y. T.; PERIĆ, D.; OWEN, D. R. J. Determination of travel directions in path-following methods. *Mathematical and Computer Modelling*, v. 21, n. 7, p. 43–59, 1995.
- FENG, Y. T.; PERIĆ, D.; OWEN, D. R. J. A new criterion for determination of initial loading parameter in arc-length methods. *Computers & Structures*, v. 58, n. 3, p. 479–485, 1996.
- FLEISCH, D. *A Student's Guide to Vectors and Tensors*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2011.
- FORDE, B. W. R.; STIEMER, S. F. Improved arc length orthogonality methods for nonlinear finite element analysis. *Computers and Structures*, v. 27, n. 5, p. 625–630, 1987.
- FRIED, I. Orthogonal trajectory accession to the non-linear equilibrium curve. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 47, p. 283–97, 1984.
- GARCIA, L. F. T. *Elasticidade não linear teoria geral e aplicações*. Rio de Janeiro/RJ: Letra Capital, 2007.
- GILAT, A.; SUBRAMANIAN, V. *Métodos Numéricos para Engenheiros e Cientistas*. Porto Alegre/RS: Bookman, 2008.
- GRECO, M. *Nonlinear structural contact/impact analysis problems using the finite element method*. Tese (Doutorado) — São Carlos school of engineering, University of São Paulo, São Carlos, 2004.
- GRECO, M.; CODA, H. B. A simple fem formulation for large deflection 2d frame analysis based on position description. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 193, n. 33-35, p. 3541–3557, 2004.

- GRECO, M.; CODA, H. B. Positionalfem formulation for flexible multi-body dynamic analysis. *Journal of Sound and Vibration*, v. 290, p. 1141–1174, 2006.
- GRECO, M.; CODA H. B.; VENTURINI, W. S. An alternative contact/impact identification algorithm for 2d structural problems. *Computational Mechanics*, v. 34, n. 5, p. 410–422, Maio 2004.
- GRECO, M. et al. Nonlinear positional formulation for space truss analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 42, p. 1079–1086, 2006.
- GRECO, M. et al. Comparison between two geometrical nonlinear methods for truss analyses. *Structural Engineering and Mechanics*, v. 41, n. 6, p. 735–750, 2012.
- GURTIN, M. E. *An Introduction to Continuum Mechanics*. [S.l.]: Academic Press, 1981.
- HOLZAPFEL, G. A. *Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering*. Chichester, England: Wiley, 2000.
- HRINDA, G. Geometrically nonlinear static analysis of 3d trusses using the arclength method. *Computational Methods and Experimental Measurements*, p. 243–252, 2007. WIT Press, vol. XIII.
- HRINDA, G. *Snap-through instability patterns in truss structures*. 2010. Nasa Langley Research Center, Hampton, Virginia, 23831.
- HRINDA, G. A.; NGUYEN, D. T. Optimization of stability-constrained geometrically nonlinear shallow trusses using an arc length sparse method with a strain energy density approach. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 44, p. 933–950, 2008.
- KLEIBER, M. *Incremental Finite Element Modelling in Non-Linear Solid Mechanics*. [S.l.]: Prentice Hall, 1989.
- KRENK, S. *Non-linear modeling analysis of solids and structures*. Cambridge, UK: Cambridge, 2009.
- KRENK, S.; HEDEDAL, O. A dual orthogonality procedure for non-linear finite element equations original research article. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 123, p. 95–107, 1995.
- LAI, W. M.; RUBIN, D.; KREMPLE, E. *Introduction to Continuum Mechanics*. 4. ed. Oxford, UK: Elsevier, 2009.
- LAM, W.; MORLEY, C. Arc-length method for passing limit points in structural calculation. *Journal of Structural Engineering*, v. 118, n. 1, p. 169–185, 1992.
- LÁNCZOS, C. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. 4. ed. [S.l.]: Dover, 1986.
- LUENBERGER, D. G. *Linear and Nonlinear Programming*. 2. ed. [S.l.]: Springer, 2009.
- MACIEL, D. N. *Análise de problemas elásticos não-lineares geométricos empregando o método dos elementos finitos posicional*. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.
- MALVERN, L. E. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. [S.l.]: Prentice Hall, 1977.

- MARQUES, G. C. d. S. C. *Estudo e Desenvolvimento de Código Computacional Baseado no Método dos Elementos Finitos para Análise Dinâmica Não Linear Geométrica de Sólidos Bidimensionais*. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006.
- MASE, G. T.; SMELSER, R. E.; MASE, G. E. *Continuum Mechanics for Engineers*. 3. ed. [S.l.]: CRC Press, 2009.
- MINSKI, R. L. *Aprimoramento de formulação de identificação e solução do impacto bidimensional entre estrutura e anteparo rígido*. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.
- NETO, E. A. de S.; FENG, Y. T. On the determination of the path direction for arc-length methods in the presence of bifurcations and snap-backs. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 179, p. 81–89, 1999.
- NOVOZHILOV, V. *Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity*. [S.l.]: Dover, 2011.
- ODEN, J. T. *Finite Elements of Nonlinear Continua*. [S.l.]: Dover, 2006.
- OGDEN, R. W. *Non-Linear Elastic Deformations*. [S.l.]: Dover, 1997.
- PAPADRAKAKIS, M. Post-buckling analysis of spatial structures by vector iteration methods. computers and structures. *Computers and Structures*, v. 14, n. 5-6, p. 393–402, 1981.
- PASCON, J. P.; CODA, H. B. Análise não linear geométrica de sólidos elásticos com gradação funcional via mef-p. *Cadernos de Engenharia de Estruturas - São Carlos*, v. 11, n. 53, p. 161–165, 2009.
- RAMM, E. Strategies for tracing the nonlinear response near limit points. In: WUNDERLICH, W.; STEIN, E.; BATHE, K. (Ed.). *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1981. p. 63–89.
- REIS, M. C. J. *Análise não linear geométrica de pórticos planos considerando ligações semirrígidas elastoplásticas*. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2012.
- RIKS, E. The application of newton's method to the problem of elastic stability. *Journal of Applied Mechanics*, v. 39, p. 1060–1065, 1972.
- RIKS, E. Incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *International journal of solids and structures*, v. 15, p. 529–551, 1979.
- RITTO-CORRÊA, M.; CAMOTIM, D. On the arc-length and other quadratic control methods: Established, less known and new implementation procedures. *Computers and Structures*, v. 86, p. 1353–1368, 2008.
- SCHWEIZERHOF, K.; WRIGGERS, P. Consistent linearization for path following methods in nonlinear fe-analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 59, n. 1, p. 261–279, 1986.
- SILHAVY, M. *The Mechanics and Thermodynamics of Continuous Media*. [S.l.]: Springer, 1997.

- SILVA, W. Q. *Análise não linear geométrica do acoplamento solo-estrutura através da combinação MEC-MEF*. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2010.
- TENG, J. G.; LUO, Y. F. A user-controlled arc-length method for convergence to predefined deformation states. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, v. 14, p. 51–58, 1998.
- TRUESDELL, C.; NOLL, W.; ANTMAN, S. *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*. 3. ed. [S.l.]: Springer, 2004.
- WEMPNER, G. Discrete approximation related to nonlinear theories of solids. *International Journal of Solids and Structures*, v. 7, p. 1581–1599, 1971.
- WONG, M. B.; TIN-LOI, F. Geometrically nonlinear analysis of elastic framed structures. *Computers & Structures*, v. 34, n. 4, p. 633–640, 1990.
- WRIGGERS, P. *Nonlinear Finite Element Methods*. [S.l.]: Springer, 2008.
- XIAO-ZU, S.; BASHIR-AHMED, M. Arc-length technique for nonlinear finite element analysis. *Journal of Zhejiang University SCIENCE*, v. 5, n. 5, p. 618–628, 2004.
- YANG, Y.-B.; LEU, L.-J. Constitutive laws and force recovery procedures in nonlinear analysis of trusses. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 92, p. 121–131, 1991.
- ZHOU, Z.; MURRAY, D. An incremental solution technique for unstable equilibrium paths of shell structures. *Computer and Structures*, v. 55, n. 5, p. 749–759, 1994.
- ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*. 6. ed. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 2005.