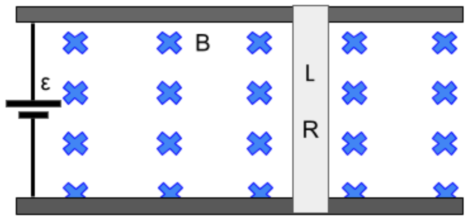
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ciências Exatas e da Terra
Programa de Pos-graduação em Ciências e Engenharia do Petróleo

Seleção de mestrado 2023 - I - Prova escrita - Resposta esperada
Abril 3 de 2023.

1. Uma barra de massa m, resistência R e comprimento L é colocada sobre dois trilhos tal como mostrado na Figura abaixo. O atrito entre a barra e os trilhos é desprezível. O sistema está sob ação de um campo magnético B que está entrando no plano do circuito como mostrado na figura. Uma bateria com FEM ε alimenta o circuito de tal forma que a corrente na barra se movimenta para baixo. A barra é solta em repouso em t=0.



(a) (0.5 pontos) Calcule a magnitude e sentido da força magnética na barra causada pelo campo magnético no instante que barra está em repouso.

Resposta: Usando a fórmula da força magnética temos que a magnitude da força sentida pela barra é $F_1 = I_1 BL$. Podemos calcular a corrente usando a lei de Ohm $I_1 = \varepsilon/R$. Por tanto

$$F_1 = \frac{\varepsilon BL}{R}$$

Seguindo a regra da mão direita a força sentida pela barra é para a direita.

(b) (0.5 pontos) Como a barra vai começar se movimentar por causa da força magnética, calcule a FEM induzida por causa do movimento da vara.

Resposta: Usando a lei de indução de Faraday temos que a FEM induzida pelo movimento da barra está dada por

$$\varepsilon_2 = -\frac{d}{dt}\Phi_B = -\frac{d}{dt}BLx = -BL\frac{d}{dt}x = -BLv$$

como a barra se movimenta para a direita o fluxo magnético aumenta para dentro do plano da Figura. Portanto, usando a lei de Lenz o sentido que circula a FEM é anti-horário.

(c) (0.5 pontos)Calcule a magnitude e sentido da força magnética sobre a corrente induzida pelo movimento da barra.

Resposta: Seguindo o mesmo raciocínio do item a) tempos que a força causada pela corrente induzida está dada por:

$$F_2 = I_2 BL = \frac{\varepsilon_2 BL}{R}$$

Usando o resultado do item b) temos que

$$F_2 = \frac{\varepsilon_2 BL}{R} = \frac{B^2L^2v}{R}$$

Como a FEM induzida foi anti-horária a corrente também e portanto a força magnética sentida pela corrente induzida aponta para esquerda.

(d) (0.5 pontos) Demonstre que este sistema físico possui uma velocidade terminal dada por

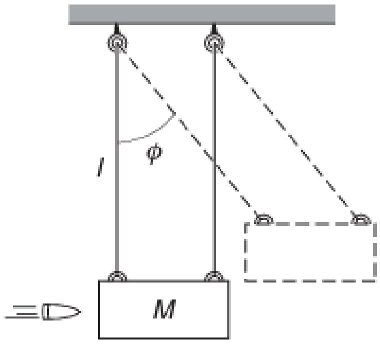
$$v = \frac{\varepsilon}{LB}$$

Resposta: A velocidade terminal é calculada quando a força magnética causada pela bateria e a força magnética induzida são iguais. Portanto

$$F_1 = \frac{\varepsilon BL}{R} = F_2 = \frac{B^2L^2v}{R}$$

Simplificando os termos comuns obtemos a expressão para velocidade solicitada no problema.

2. Uma forma simples para medir a velocidade de uma bala é usando o pêndulo balístico, como mostrado na Figura abaixo, este consiste em um bloco de madeira de massa M para onde a bala é disparada. O bloco é suspenso por cabos de comprimento ℓ e o impacto da bala faz com que o sistema bloco-bala oscile até um máximo ângulo φ como mostrado na Figura. A velocidade inicial da bala é v e sua massa é m.



(a) (0.5 pontos) Qual é a velocidade do sistema bloco-bala após a colisão?
Resposta: Usando a conservação do momento temos que

$$mv = (M + m)V$$

Portanto $V = mv/(M + m)$.

(b) (1 ponto) Calcule a velocidade da bala v em função das variáveis medíveis m, M, ℓ e φ.
Resposta: Usando a conservação da energia e fixando o zero de potencial no nível do bloco antes dele subir temos que

$$\frac{1}{2}(M + m)V^2 = (M + m)g\ell(1 - \cos\varphi)$$

Isolando V obtemos que

$$V = \sqrt{2g\ell(1 - \cos\varphi)}$$

Substituindo o valor da velocidade obtida no item a) temos que

$$v = \frac{(M + m)}{m}\sqrt{2g\ell(1 - \cos\varphi)}$$

3. Lembrando que a transformada de Fourier de uma função $f(t)$ é

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-i\omega t)dt \tag{1}$$

e que a transformada inversa é

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp(i\omega t)d\omega \tag{2}$$

Demonstre que

(a) (0.5 pontos) Se $f(t)$ é real então

$$F(-\omega) = F^*(\omega) \tag{3}$$

Resposta: Usando a definição da transformada de Fourier calculamos $F(-\omega)$, obtendo que

$$\begin{aligned} F(-\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp\left(-i(-\omega)t\right)dt\,, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp\left(i\omega t\right)dt\,, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[\exp\left(-i\omega t\right)\right]^{\star}\,dt\,, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(t)\exp\left(-i\omega t\right)\right]^{\star}\,dt\,, \\ &= F^{\star}(\omega)\,. \end{aligned} \tag{4}$$

no último passo usamos o fato que $f(t)$ é uma função real.

(b) (0.5 pontos) Se a transformada de $f(t)$ é $F(\omega)$ então a transformada de $f(t-t_0)$ (Função deslocada temporalmente)

$$F\{f(t-t_0)\}(\omega) = e^{-i\omega t_0}F(\omega) \tag{5}$$

Resposta: Usando a definição da transformada de Fourier na função deslocada no tempo $f(t-t_0)$, obtemos que

$$F\{f(t-t_0)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)\exp\left(-i\omega t\right) dt\,, \tag{6}$$

fazendo a substituição de variável $\tau = t - t_0$, tal que $d\tau = dt$ obtemos que

$$\begin{aligned} F\{f(t-t_0)\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\exp\left(-i\omega(\tau+t_0)\right) d\tau\,, \\ &= \exp\left(-i\omega t_0\right)\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\exp\left(-i\omega\tau\right) d\tau\,, \\ &= \exp\left(-i\omega t_0\right)\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp\left(-i\omega t\right) dt\,, \\ &= \exp\left(-i\omega t_0\right)F\{f(t)\}(\omega)\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Que é o que queremos demonstrar.

(c) (1 ponto) Se a transformada de $f(t)$ é $F(\omega)$ então a transformada de $\frac{d^{(n)}f(t)}{dt^n}$ é

Resposta: A transformada de Fourier da n-esima derivada da função $f(t)$ está dada por

$$F\left\{\frac{d^n f}{dt^n}(t)\right\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^n f}{dt^n}(t)\exp\left(-i\omega t\right) dt\,, \tag{8}$$

Reduzindo a ordem da derivada com a integração por partes obtemos que

$$\begin{aligned} F\left\{\frac{d^n f}{dt^n}(t)\right\}(\omega) &= \left[\frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}}(t)\exp\left(-i\omega t\right)\right]\Bigg|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}(i\omega)\frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}}(t)\exp\left(-i\omega t\right) dt\,, \\ &= (i\omega)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}}(t)\exp\left(-i\omega t\right) dt \\ &= (i\omega)F\left\{\frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}}(t)\right\}(\omega)\,, \end{aligned} \tag{9}$$

Fazendo n integrações por partes obtemos o resultado desejado, a seguir

$$\begin{aligned} F\left\{\frac{d^n f}{dt^n}(t)\right\}(\omega) &= (i\omega)F\left\{\frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}}(t)\right\}(\omega)\,, \\ &= (i\omega)^2F\left\{\frac{d^{n-2} f}{dt^{n-2}}(t)\right\}(\omega)\,, \\ &\dots \\ &= (i\omega)^n F\left\{f(t)\right\}(\omega)\,. \end{aligned} \tag{10}$$

$$F\left\{\frac{d^{(n)} f(t)}{dt^n}\right\}(\omega) = (i\omega)^n F(\omega) \tag{11}$$

4. (1.5 pontos) Seja uma função $f(t)$ cujo espectro é definido como

$$F(\omega) = \begin{cases} \exp(-i\omega t_0) & |\omega| \leq \Omega \\ 0 & |\omega| > \Omega \end{cases} \tag{12}$$

Demonstre que

$$f(t) = \frac{1}{\Delta t} sinc\left(\frac{t-t_0}{\Delta t}\right) \tag{13}$$

onde $\Delta t = \pi/\Omega$. Lembre que a função *sinc* é definida como

$$sinc(t) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases} \tag{14}$$

Resposta: Aplicando a transformada inversa de Fourier de $F(\omega)$, obtemos que

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp\left(i\omega t\right) d\omega\,, \tag{15}$$

Como $F(\omega)$ é zero fora do intervalo $[\Omega, \Omega]$, então a integral anterior se reduze a

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega}^{\Omega} F(\omega)\exp\left(i\omega t\right) d\omega\,, \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega}^{\Omega} \exp\left(-i\omega t_0\right)\exp\left(i\omega t\right) d\omega\,, \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega}^{\Omega} \exp\left(i\omega(t-t_0)\right) d\omega\,, \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{i(t-t_0)}\exp\left(i\omega(t-t_0)\right)\Big|_{-\Omega}^{\Omega}\,, \\
&= \frac{1}{\pi(t-t_0)}\frac{1}{2i}\exp\left(i\Omega(t-t_0)\right) - \exp\left(-i\Omega(t-t_0)\right)\,, \\
&= \frac{1}{\pi(t-t_0)}\sin\left(\Omega(t-t_0)\right)\,, \\
&= \Omega\frac{\sin\left(\Omega(t-t_0)\right)}{\pi\Omega(t-t_0)}\,, \\
&= \frac{\pi}{\Delta t}\frac{\sin\left(\frac{\pi(t-t_0)}{\Delta t}\right)}{\frac{\pi^2\Omega(t-t_0)}{\Delta t}}\,, \\
&= \frac{1}{\Delta t}\,\text{sinc}\left(\frac{(t-t_0)}{\Delta t}\right)\,, \qquad (16)
\end{aligned}$$

onde usamos a definição $\Delta t = \pi/\Omega$.

5. Você precisa fazer uma propagação de uma onda acústica usando o método de diferenças finitas. Para isto você deve usar um modelo de velocidade 2D variável com os seguintes parâmetros:

   - Distância entre células em x e z $h = 20m$
   - Velocidade mínima $v_{min} = 1500m/s$
   - Velocidade máxima $v_{max} = 4500m/s$

   Com esses parâmetros calcule:

   (a) (0.5 pontos) O intervalo temporal máximo que pode ser usado para propagar a onda com estabilidade numérica.
   Resposta: Usando a condição CFL obtemos que o valor Δt de propagação máximo é

   $$\Delta t_1 = \frac{h}{\sqrt{2}v_{max}} \approx 0.0031s$$

   (b) (1 ponto) A frequência máxima que pode ser propagada nesse modelo de velocidade. Para isto você deve usar como critério que o comprimento de onda mínimo deve ser maior que 5 vezes a distância entre células.
   Resposta: Usando o critério dado temos que

   $$\lambda_{min} = \frac{v_{min}}{f_{max}} \geq 5h$$

   Deixando em evidência o valor da frequência máximo temos que

   $$f_{max} = \frac{v_{min}}{5h} \approx 15Hz$$

(c) (1 ponto) Com o resultado do item anterior, calcule a taxa de amostragem temporal que satisfaz o teorema de Shannon.
Resposta: Usando o teorema de Shannon temos que

$$\Delta t_2 = \frac{1}{2f_{max}} \approx 0.033s$$

(d) (0.5 pontos) Calcule a razão entre a taxa de amostragem do item c) e a obtida no item a).
Resposta: Dividindo as duas taxas de amostragem temos que

$$\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} = \frac{1}{2f_{max}} / \frac{h}{\sqrt{2}v_{max}} = \frac{5h}{2v_{min}} / \frac{h}{\sqrt{2}v_{max}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \frac{v_{max}}{v_{min}} \approx 10.6$$