



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE  
CENTRO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

**Marcos Daian Figueiredo da Silva Saraiva**

**CONSIDERAÇÃO DE EFEITOS TÉRMICOS EM SÓLIDOS BIDIMENSIONAIS NÃO  
LINEARES**

**Natal**

**2019**

**Marcos Daian Figueiredo da Silva Saraiva**

**CONSIDERAÇÃO DE EFEITOS TÉRMICOS EM SÓLIDOS BIDIMENSIONAIS NÃO LINEARES**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil – ênfase em Estruturas.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Nelson Maciel

Natal

2019

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN  
Sistema de Bibliotecas - SISBI  
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Central Zila Mamede

Saraiva, Marcos Daian Figueiredo da Silva.

Consideração de efeitos térmicos em sólidos bidimensionais não lineares / Marcos Daian Figueiredo da Silva Saraiva. - 2019.  
144 f.: il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Tecnologia, Programa de pós-Graduação em Engenharia Civil, Natal, RN, 2019.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Nelson Maciel.

1. Método dos elementos finitos posicional - Dissertação. 2. Acoplamento termomecânico - Dissertação. 3. Sólidos bidimensionais - Dissertação. 4. Não linearidade geométrica - Dissertação. I. Maciel, Daniel Nelson. II. Título.

RN/UF/BCZM

CDU 624.01./04

MARCOS DAIAN FIGUEIREDO DA SILVA SARAIVA

**CONSIDERAÇÃO DE EFEITOS TÉRMICOS EM SÓLIDOS BIDIMENSIONAIS NÃO LINEARES**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil – ênfase em Estruturas.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Daniel Nelson Maciel – Orientador

---

Prof. Dr. Joel Araújo do Nascimento Neto – Examinador interno

---

Prof. Dr. João Carlos Arantes Costa Júnior – Examinador Externo (UFRN)

---

Prof. Dr. Marcelo Greco – Examinador Externo (UFMG)

**Natal, 29 de março de 2019.**

# CONSIDERAÇÃO DE EFEITOS TÉRMICOS EM SÓLIDOS BIDIMENSIONAIS NÃO LINEARES

**Marcos Daian Figueiredo da Silva Saraiva**

Orientador: Prof. Dr. Daniel Nelson Maciel

## RESUMO

Neste trabalho, aborda-se o estudo do comportamento termomecânico de sólidos bidimensionais, levando em consideração os efeitos das não linearidades física e geométrica. Os efeitos térmicos são considerados mediante formulação fundamentada na primeira e segunda leis da termodinâmica e energia livre de Helmholtz, necessários para análise do comportamento termoelástico e termoplástico na resposta dinâmica estrutural. O Método dos Elementos Finitos Posicional é empregado como formulação não linear geométrica, onde adota-se as posições nodais como incógnitas ao invés dos deslocamentos. Com relação à resposta dinâmica, são feitas comparações utilizando-se de diversos algoritmos de integração temporal. Estuda-se também, a resposta termomecânica em problemas de impacto contra anteparo rígido através da condição de penetração nula. O desenvolvimento das rotinas computacionais para os diversos problemas propostos geram resultados numéricos que são confrontados com aqueles obtidos na literatura especializada, evidenciando a precisão da formulação aqui proposta.

## PALAVRAS-CHAVE:

Método dos Elementos Finitos Posicional, Acoplamento Termomecânico, Sólidos Bidimensionais, Não Linearidade Geométrica.

# CONSIDERATION OF THERMAL EFFECTS IN NONLINEAR BIDIMENSIONAL SOLIDS

**Marcos Daian Figueiredo da Silva Saraiva**

Advisor: Prof. Dr. Daniel Nelson Maciel

## **ABSTRACT**

This paper aims to study the thermomechanical behavior in bidimensional solids, taking into account the physical and geometric nonlinear effects. To consider the thermal effects, a formulation based on the first and second laws of thermodynamic and the Helmholtz free-energy is presented here. It is essential to analyze the thermoelastic and thermoplastic behavior in dynamic structural response. The Finite Element Method based on nodal positions, instead nodal displacements, is employed as geometric nonlinear formulation. For dynamic problems, a temporal discretization by several temporal integration algorithms conduces to the equation of motion solution. In addition, this formulation can be extended to impact problems. Therefore, the development of computational routines for the proposed formulation induces numerical results are compared with examples from the specialized literature.

## **KEYWORDS:**

Positional Finite Element Method, thermomechanical behavior, bidimensional solids.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por me dar saúde e ânimo para enfrentar os empecilhos que surgiram ao longo desta jornada.

Ao meu pai José Gilvan e a minha mãe Alda Maria, pelo incentivo, compreensão, dedicação, conselhos, e sobretudo pela educação que me proporcionaram ao longo da vida.

A minha irmã Kaline Dayane, pelo incentivo e companheirismo.

Ao Professor e Orientador Daniel Nelson Maciel, não apenas pela excelente orientação e dedicação ao longo do trabalho, mas também pela amizade, paciência, incentivo, ensinamentos e disponibilidade, sem os quais a realização deste trabalho não seria possível.

Aos grandes amigos que fiz durante o curso de mestrado, os quais levarei para toda a vida, Anna Christinna, Junyer, Jacilândio e Valberllan, pelo companheirismo, parceria e momentos de descontração extremamente importantes nesta longa marcha. Aos demais colegas do PEC que foram parte essencial nesta caminhada.

Aos meus amigos Alex, Amanda, Carmem, David, Daniel, Elisa, Fernanda, Jéssica, João, Láddyla, Leidian, Luan, Lucas, Mayara, Neilson, Paulo Vítor e Reginaldo pelos momentos de companheirismo e descontração que me deram entusiasmo para encarar essa caminhada.

Aos professores, não apenas do PEC, mas também da graduação e ensino médio, pela contribuição ética e moral, bem como pelos conhecimentos transmitidos.

A todo o quadro de funcionários do PEC pela eficiência na execução do seu trabalho.

Aos componentes da banca examinadora desta dissertação Prof. Dr. Joel Araújo do Nascimento Neto, Prof. Dr. João Carlos Arantes Costa Júnior e Prof. Dr. Marcelo Greco, pela disponibilidade e pelas contribuições concernentes à melhoria deste estudo.

Por último, a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo suporte financeiro.

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 4.1</b> - Parâmetro de aproximação temporal.....	37
<b>Tabela 5.1</b> - Métodos da família de Newmark.....	56
<b>Tabela 6.1</b> - Ângulos de reflexão.....	113

## LISTA DE QUADROS

<b>Quadro 2.1</b> - Algoritmo para análise não linear incremental-iterativa para o modelo elastoplástico de von Mises com encruamento isotrópico.....	13
<b>Quadro 2.2</b> - Algoritmo para análise não linear incremental-iterativa para o Estado Plano de Tensões.....	15

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 4.1</b> - Discretização de um sólido genérico.....	33
<b>Figura 4.2</b> - Elemento finito triangular com 10 nós.....	37
<b>Figura 5.1</b> - Mudança de configuração de um corpo.....	41
<b>Figura 5.2</b> - Mapeamento com base nas coordenadas naturais.....	42
<b>Figura 5.3</b> - Elemento finito triangular com 10 nós.....	43
<b>Figura 5.4</b> - Resolução da equação de equilíbrio pelo método de Newton-Raphson.....	50
<b>Figura 5.5</b> - Condição de penetração nula.....	65
<b>Figura 5.6</b> - Regiões de estabilidade para os parâmetros de Newmark.....	67
<b>Figura 5.7</b> - Fluxograma da discretização temporal associada ao procedimento iterativo.....	68
<b>Figura 6.1</b> - Carregamento térmico cossenoide.....	71
<b>Figura 6.2</b> - Temperatura da barra ao longo do tempo.....	72
<b>Figura 6.3</b> - Problema de condução de calor em diferentes superfícies.....	73
<b>Figura 6.4</b> - Distribuição de temperatura no domínio do problema.....	74
<b>Figura 6.5</b> - Variação de temperatura ao longo da altura $y = 0,5$ .....	74
<b>Figura 6.6</b> - Esquema da viga biapoiada.....	75

<b>Figura 6.7</b> - Deslocamento transversal x Força aplicada no meio do vão da viga.....	75
<b>Figura 6.8</b> - Esquema da barra engastada.....	76
<b>Figura 6.9</b> - Deslocamento transversal x Força aplicada na extremidade da viga.....	77
<b>Figura 6.10</b> - Esquema do sistema massa-mola.....	78
<b>Figura 6.11</b> - Deslocamento do grau de liberdade analisado considerando os efeitos térmicos.....	79
<b>Figura 6.12</b> - Variação de temperatura na seção $x=0,50\text{m}$ .....	80
<b>Figura 6.13</b> - Configuração de temperatura ao longo da estrutura deformada.....	81
<b>Figura 6.14</b> - Configuração de temperatura para diferentes intervalos de tempo para aplicação de carga.....	82
<b>Figura 6.15</b> - Esquema da barra engastada.....	83
<b>Figura 6.16</b> - Caso 1.....	85
<b>Figura 6.17</b> - Caso 2.....	86
<b>Figura 6.18</b> - Variação térmica em seção distante de $0,50\text{m}$ do engaste.....	87
<b>Figura 6.19</b> - Configurações de deslocamento e temperatura para diversos intervalos de tempo.....	88
<b>Figura 6.20</b> - Esquema do conjunto biela-manivela.....	89
<b>Figura 6.21</b> - Configurações de deslocamento para o primeiro ciclo de rotação.....	90
<b>Figura 6.22</b> - Configurações de deslocamento para o segundo ciclo de rotação.....	91
<b>Figura 6.23</b> - Comparação dos resultados para a posição horizontal do ponto de aplicação de carga.....	92
<b>Figura 6.24</b> - Variação de temperatura no ponto de aplicação de carga.....	94
<b>Figura 6.25</b> - Esquema das duas barras.....	94
<b>Figura 6.26</b> - Esquema de impacto entre barra e anteparo rígido.....	95
<b>Figura 6.27</b> - Deslocamento da região impactante da estrutura.....	96
<b>Figura 6.28</b> - Força de contato da superfície impactante.....	96
<b>Figura 6.29</b> - Velocidade da superfície impactante.....	97
<b>Figura 6.30</b> - Posição da superfície impactante considerando-se modelo elastoplástico com encruamento isotrópico.....	98

<b>Figura 6.31</b> - Velocidade da superfície impactante considerando-se modelo elastoplástico com encruamento isotrópico.....	99
<b>Figura 6.32</b> - Esquema de impacto entre barra e anteparo rígido.....	99
<b>Figura 6.33</b> - Comparativo de posição e velocidade para problema mecânico e termomecânico.....	101
<b>Figura 6.34</b> - Mudanças de temperatura da barra no problema de impacto.....	102
<b>Figura 6.35</b> - Influência da temperatura na posição e força de contato da superfície impactante.....	103
<b>Figura 6.36</b> - Influência da temperatura na velocidade da superfície impactante.....	104
<b>Figura 6.37</b> - Variação de temperatura para a superfície localizada em $x = 9,5$ in.....	104
<b>Figura 6.38</b> - Influência da temperatura na posição da superfície impactante, considerando efeitos elastoplásticos.....	105
<b>Figura 6.39</b> - Influência da temperatura na velocidade da superfície impactante, considerando efeitos elastoplásticos.....	105
<b>Figura 6.40</b> - Variação de temperatura, considerando efeitos elastoplásticos.....	106
<b>Figura 6.41</b> - Esquema das duas barras não concêntricas.....	107
<b>Figura 6.42</b> - Comparação dos deslocamentos entre impacto entre barras não concêntricas e concêntricas.....	108
<b>Figura 6.43</b> - comparativo de posição para impacto parcial e total.....	109
<b>Figura 6.44</b> - Mudanças de temperatura da barra no problema de impacto.....	110
<b>Figura 6.45</b> - Esquema de impacto entre barra e anteparo rígido.....	111
<b>Figura 6.46</b> - Ângulo de aproximação e de reflexão da estrutura anelar.....	112
<b>Figura 6.47</b> - Ângulo de reflexão para a hipótese mecânica.....	112
<b>Figura 6.48</b> - Posição do nó 1.....	113
<b>Figura 6.49</b> - Configuração de Temperatura durante e após o impacto.....	114

## LISTA DE SÍMBOLOS

$c_e$	Calor Específico
$c_m$	Constante de amortecimento
$g(X)$	Vetor de forças residuais
$tol$	Tolerância
$tr[\sigma]$	Traço do tensor de tensões
$T_\pi$	Menor período do sistema de elementos finitos
$\dot{u}$	Taxa de mudança de energia interna
$u_e$	Energia de deformações específica elástica
$\ddot{x}$	Aceleração
$\dot{x}$	Velocidade
$C_{ep}$	Operador tangente elastoplástico
$\bar{E}$	Trabalho Frio
$F_i$	Forças de corpo
$H_{elast}$	Geração de calor associada as deformações elásticas
$H_{plast}$	Geração de calor associada as deformações plásticas
$H_{TF}$	Energia retida como trabalho frio
$H'$	Módulo plástico de encruamento isotrópico
$J_0$	Jacobiano
$J_2$	Segundo invariante do tensor deviatórico de tensão
$K_a$	Perda de energia por amortecimento
$K_c$	Energia cinética
$R_m$	Calor devido às deformações mecânicas
$U_e$	Energia de deformação
$V_0$	Volume inicial
$X_i, \dot{X}_i$ e $\ddot{X}_i$	Valores nodais para posição, velocidade e aceleração, respectivamente
$\bar{\alpha}$	Parâmetro de aproximação temporal
$\beta_c$	Parâmetro livre de Chung & Lee (1994)
$\delta_{ij}$	Delta de Kronecker
$\varepsilon_e$	Deformações elásticas

$\varepsilon_p$	Deformações plásticas
$\varepsilon_{kk}$	Traço do tensor de deformações
$\varepsilon_{ij}$	Tensor de deformações
$\dot{\varepsilon}_{ij}$	Taxa de deformação
$\dot{\varepsilon}_{ij}^e$	Taxa de deformação elástica
$\dot{\varepsilon}_{ij}^p$	Taxa de deformação plástica
$\xi^p$	Deformação plástica acumulada
$\theta_0$	Temperatura de referência
$\theta_w$	Fator do método de Wilson- $\theta$
$\sigma_{m\acute{a}x}$	Tensão normal máxima
$\sigma_{m\acute{i}n}$	Tensão normal mínima
$\sigma_y$	Tensão de escoamento
$\dot{\sigma}_{ij}$	Taxa de tensão
$\tau_{m\acute{a}x}$	Tensão de cisalhamento máxima
$\omega_{max}$	Maior frequência natural
$\Delta Q$	Varição de Calor
$\Delta U$	Varição de Energia
$\Delta W$	Varição de Trabalho
$\Delta X$	Incremento de posição
$\nabla g$	Matriz Hessiana
$f$	Função de escoamento
$f$	Função mudança de configuração
$k$	Coefficiente de Condutividade Térmica
$k$	Tensão de escoamento para o caso de cisalhamento puro
$m$	Massa
$n$	Norma
$q$	Fluxo de calor pela superfície
$q$	parâmetro de encruamento
$s$	Tensor deviatórico de tensão
$u$	Energia interna
$u, v$	Vetores unitários

$A$	Área
$A$	Tensor mudança de configuração
$C$	Matriz de capacitância de calor
$C$	Matriz de amortecimento
$C$	Tensor de quarta ordem das constantes elásticas do material
$E$	Módulo de Elasticidade Longitudinal
$F$	Vetor de carregamentos nodais
$G$	Módulo de Elasticidade Transversal
$I$	Tensor identidade de segunda ordem
$K$	Matriz de condução de calor
$M$	Matriz de massa
$N$	Tensor de escoamento
$P$	Forças externas
$R$	Fonte de Calor Interna
$S$	Entropia
$T$	Temperatura Absoluta
$V$	Volume
$W$	Trabalho
$\alpha$	Coeficiente de expansão térmica
$\alpha$	Variável interna de encruamento isotrópico
$\beta$ e $\gamma$	Constantes de Newmark
$\gamma$	Distorção
$\gamma$	Parâmetro de consistência plástico
$\delta$	Mínima distância entre corpo e anteparo rígido
$\theta$	Variação de temperatura
$\lambda$	Alongamento relativo
$\kappa$	Módulo volumétrico
$\lambda, \mu$	Constantes de Lamé
$\nu$	Coeficiente de Poisson
$\rho$	Densidade do material
$\sigma$	Tensor de Tensões

$\varpi$	Variável Interna Relativa ao Endurecimento
$\phi$	Função de forma
$\vartheta$	Trabalho plástico convertido em calor
$\Gamma$	Fronteira
$\Gamma_1$	Fronteira de Dirichlet ou essencial
$\Gamma_2$	Fronteira Neumann ou natural
$\Lambda$	Dissipação interna
$\Theta$	Gradiente de temperatura
$\Pi$	Funcional de energia
$\Omega$	Domínio
$\Phi$	Energia livre de Helmholtz
$\Psi$	Potencial elástico

## SUMÁRIO

<b>1. Introdução</b> .....	1
1.1. JUSTIFICATIVA.....	3
1.2. OBJETIVOS DA PESQUISA .....	4
<b>1.2.1. Objetivo geral</b> .....	4
<b>1.2.2. Objetivos específicos</b> .....	4
1.3. METODOLOGIA .....	5
<b>2. Modelos elastoplásticos</b> .....	6
2.1. CONCEITOS E CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA .....	6
<b>2.1.1. Comportamento elastoplástico bidimensional</b> .....	7
<b>2.1.2. Modelo elastoplástico de von Mises com encruamento positivo</b> .....	8
<b>2.1.3. Algoritmo para implementação do modelo elastoplástico</b> .....	12
<b>3. Modelos termomecânicos</b> .....	17
3.1. CONCEITOS E CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA .....	17
3.2. TERMODINÂMICA .....	18
<b>3.2.1. Lei zero da termodinâmica</b> .....	18
<b>3.2.2. Primeira lei da termodinâmica</b> .....	18
<b>3.2.3. Segunda lei da termodinâmica</b> .....	19
3.3. LEI DE FOURIER .....	20
3.4. TEORIA DA TERMOELASTICIDADE DESACOPLADA.....	20
3.5. TEORIA CLÁSSICA DA TERMOELASTICIDADE ACOPLADA.....	21
<b>3.5.1. Primeira lei da termodinâmica</b> .....	22
<b>3.5.2. Equação diferencial de condução de calor</b> .....	23
<b>3.5.3. Princípio da taxa de trabalho</b> .....	25
<b>3.5.4. Segunda Lei da termodinâmica</b> .....	25
<b>3.5.5. Energia Livre de Helmholtz</b> .....	25
<b>3.5.6. Potencial elástico</b> .....	26
<b>3.5.7. Equação de condução de calor termoelástica</b> .....	27
<b>3.5.8. Equação de equilíbrio termoelástica</b> .....	28
3.6. TEORIA DA TERMOPLASTICIDADE.....	29
<b>3.6.1. Primeira e segunda leis da termodinâmica</b> .....	30
<b>3.6.2. Teoria das variáveis internas</b> .....	30
<b>4. MEF aplicado à termodinâmica</b> .....	34
4.1. DISCRETIZAÇÃO DO PROBLEMA DE CONDUÇÃO DE CALOR .....	35
4.2. MÉTODO DOS RESÍDUOS PONDERADOS .....	36

4.3.	INTEGRAÇÃO TEMPORAL DE EQUAÇÕES PARABÓLICAS .....	37
4.4.	APLICAÇÃO PARA O ELEMENTO BIDIMENSIONAL .....	38
<b>5.</b>	<b>Método dos elementos finitos posicional .....</b>	<b>41</b>
5.1.	ELEMENTO FINITO BIDIMENSIONAL .....	42
5.1.1.	<b>Mapeamento da geometria .....</b>	<b>42</b>
5.1.2.	<b>Medidas de deformação .....</b>	<b>44</b>
5.2.	FORMULAÇÃO ESTÁTICA .....	46
5.2.1.	<b>Energia potencial total .....</b>	<b>46</b>
5.2.2.	<b>Teorema da mínima energia potencial total .....</b>	<b>47</b>
5.3.	FORMULAÇÃO DINÂMICA .....	48
5.3.1.	<b>Energia potencial total .....</b>	<b>48</b>
5.3.2.	<b>Matriz de massa e amortecimento .....</b>	<b>49</b>
5.4.	ENERGIA ESPECÍFICA DE DEFORMAÇÃO .....	50
5.5.	MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON .....	50
5.6.	MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO TEMPORAL .....	53
5.6.1.	<b>Método implícito de Newmark .....</b>	<b>56</b>
5.6.2.	<b>Método Implícito de Houbolt .....</b>	<b>57</b>
5.6.3.	<b>Método Implícito de Wilson-<math>\theta</math> .....</b>	<b>58</b>
5.6.4.	<b>Método explícito das Diferenças Centrais .....</b>	<b>61</b>
5.6.5.	<b>Método explícito da Diferença Finita de Quarta Ordem (Souza &amp; Moura, 1997) .....</b>	<b>62</b>
5.6.6.	<b>Método explícito de Chung &amp; Lee (1994) .....</b>	<b>64</b>
5.7.	IMPACTO DE ESTRUTURAS CONTRA ANTEPAROS RÍGIDOS .....	65
5.7.1.	<b>Parâmetros de Newmark e regularização da solução de impacto ..</b>	<b>67</b>
5.8.	IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA TERMOELASTOPLÁSTICO .....	68
<b>6.</b>	<b>Aplicações numéricas .....</b>	<b>71</b>
6.1.	ANÁLISE NUMÉRICA .....	71
6.2.	BARRA SUBMETIDA À UM CARREGAMENTO TÉRMICO .....	72
6.3.	CONDUÇÃO DE CALOR EM SUPERFÍCIE .....	73
6.4.	VIGA ELASTOPLÁSTICA BIAPOIADA COM CARGA APLICADA NO MEIO DO VÃO .....	75
6.5.	VIGA ELASTOPLÁSTICA EM BALANÇO COM CARGA TRANSVERSAL APLICADA NA EXTREMIDADE LIVRE .....	77
6.6.	SISTEMA MASSA-MOLA COM ACOPLAMENTO TERMOMECÂNICO .....	78

6.7. VIGA ELASTOPLÁSTICA EM BALANÇO COM ACOPLAMENTO TÉRMICO 80	
6.8. VIGA ENGASTADA.....	84
6.9. VIGA ENGASTADA COM ACOPLAMENTO TERMOELÁSTICO.....	87
6.10. CONJUNTO BIELA-MANIVELA .....	90
6.11. CONJUNTO BIELA-MANIVELA COM ACOPLAMENTO TERMO- ELÁSTICO.....	94
6.12. IMPACTO UNIDIRECIONAL ENTRE DUAS BARRAS .....	95
6.13. IMPACTO UNIDIRECIONAL ENTRE BARRA E ANTEPARO RÍGIDO COM ACOPLAMENTO TERMOMECÂNICO.....	100
6.14. IMPACTO UNIDIRECIONAL ENTRE DUAS BARRAS COM ACOPLAMENTO TERMOMECÂNICO .....	103
6.15. IMPACTO PARCIAL ENTRE DUAS BARRAS COM ACOPLAMENTO TERMOMECÂNICO .....	107
6.16. IMPACTO DE ANEL EM ANTEPARO RÍGIDO COM ACOPLAMENTO TERMOMECÂNICO .....	112
<b>7. Conclusões</b> .....	<b>116</b>
<b>Referências</b> .....	<b>119</b>

## CAPÍTULO 1

# Introdução

Hoje em dia, a facilidade e praticidade oferecidas pela programação proporcionaram o uso de formulações numéricas na resolução dos mais variados sistemas estruturais. Dentre os métodos numéricos, pode-se destacar o Método dos Elementos Finitos (MEF) por ser amplamente utilizado devido à sua fácil manipulação e sua rápida convergência de resultados. Porém, os desafios continuam no sentido de se estudar formulações que levem em conta fenômenos tais como grandes deslocamentos e efeitos térmicos com a finalidade de obtenção de respostas mecânicas mais fidedignas ao comportamento real das estruturas.

Neste trabalho, utiliza-se o Método dos Elementos Finitos Posicional, proposto por Coda (2003), o qual se difere do convencional por apresentar formulação baseada nas posições nodais, e não nos seus deslocamentos.

Para estruturas que apresentam pequenas deformações e deslocamentos em face do carregamento externo, a análise linear apresenta resposta bastante satisfatória. Entretanto, o equacionamento em problemas lineares não são adequados quando estruturas estão sob grandes mudanças na sua geometria, conseqüentemente há perda de linearidade nas relações deslocamento e deformação, caracterizando, portanto, a não linearidade geométrica.

A não linearidade geométrica ocorre quando os deslocamentos ou deformações são suficientemente grandes para que as equações de equilíbrio do sistema sejam reformuladas para a condição deformada da estrutura, não sendo válido o princípio da superposição dos efeitos nesta condição. Como alternativa à resolução de problemas cuja não linearidade geométrica é considerada, adota-se, neste trabalho, o modelo numérico de convergência de Newton-Haphson.

A não linearidade geométrica se manifesta com pequenas deformações ou grandes deformações. Neste caso correspondente a grandes deformações, a não

linearidade física, referente ao comportamento elástico não linear ou inelástico do material constituinte da estrutura, também se manifesta.

Como alternativa de consideração dos efeitos da não linearidade física, busca-se considerar modelos elastoplásticos que descrevam, de forma aproximada, o real comportamento do material. De forma generalizada, são adotadas superfícies de plastificação, as quais determinam o domínio elástico do sólido.

Os efeitos termomecânicos num sistema estrutural são relevantes no estudo do comportamento mecânico de um corpo sólido, uma vez que podem provocar a redistribuição significativa dos esforços internos da estrutura. Desta forma, torna-se indispensável analisar a resposta estrutural de corpos submetidos a carregamentos térmicos e mecânicos de forma acoplada.

A partir dos estudos produzidos por Duhamel (1837) e Neumann (1885), verificou-se que modelos constitutivos não representavam com exatidão o comportamento termomecânico dos materiais, havendo, portanto, necessidade de melhoramento de tais modelos.

Nesse cenário, Biot (1956) propôs a combinação da teoria da elasticidade e da condução de calor, o que ficou conhecida por teoria da termoelasticidade acoplada. Mais tarde, Lord & Shulman (1967) Sherief (1980), Dhaliwal & Sherief (1980) minimizaram as inconsistências existentes nesse modelo, generalizando-a. Ademais, com o intuito de considerar a parcela do trabalho plástico convertida em calor, variáveis termodinâmicas adicionais foram acopladas na teoria da termoelasticidade, o que deu origem à termoplasticidade.

Associados a problemas dinâmicos, diversos procedimentos vêm sendo aperfeiçoados com o passar do tempo, dentre eles, modelos de integração temporal, cada qual com características próprias de robustez, precisão e estabilidade. Neste contexto, a implementação de variados métodos de integração temporal tende a mostrar aqueles que mais bem se associam aos problemas empregados.

A consideração de impacto está conectada às mudanças na configuração da estrutura relacionada. No entanto, a identificação do início do contato é um dos maiores empecilhos na formulação numérica para este tipo de problema (GRECO, 2004).

Para tanto, conforme Greco (2004), a consideração do impacto pode ser tomada de maneira simplista, considerando-se a área de influência do elemento alvo. Nos casos mais complexos, a formulação se fundamenta no balanço das forças de superfície na região de contato. Contudo, a consideração do contato neste trabalho fará uso de modelo extremamente simples, baseado na condição de penetração nula.

A partir do exposto, o trabalho consiste no estudo do comportamento termomecânico de sólidos bidimensionais, levando em consideração os efeitos das não linearidades física e geométrica, mediante formulação fundamentada no MEF posicional para chapas, dando continuidade aos trabalhos de Cavalcante (2016), no qual avaliou-se a influência da temperatura em problemas envolvendo treliças, e Silva (2017), em que a análise termomecânica ocorreu em estruturas de pórticos com cinemática de Reissner.

Assim, partindo de código computacional já existente, desenvolvido por Marques (2006), implementam-se formulações para modelos elastoplásticos, termoelasticidade, termoplasticidade, bem como para problemas de impacto, de modo a avaliar estruturas bidimensionais não lineares.

### 1.1. JUSTIFICATIVA

Todo projeto estrutural tem, por objetivo, garantir que a estrutura seja capaz de suportar as ações de solicitação, assim como apresentar boas condições de utilização, num determinado horizonte de tempo.

Dessa forma, com estruturas cada vez mais esbeltas e utilizando-se dos mais diversos materiais, exige-se uma abordagem não linear de maneira a obter resultados condizentes com a realidade. Aliado a isso, o comportamento termomecânico da estrutura pode influenciar tais resultados, posto que as tensões de origem térmica podem modificar a distribuição dos esforços internos (CARRAZEDO, 2009). Portanto, a realização de pesquisas que investiguem tal comportamento torna-se cada vez mais indispensável.

Seguindo os trabalhos de Cavalcante (2016), Cavalcante *et al.* (2017) e Silva (2017), que avaliaram o comportamento termomecânico em estruturas lineares, os estudos em sólidos bidimensionais podem contribuir ainda mais para essa área de estudo.

Neste contexto, a investigação de sólidos bidimensionais associados às não linearidades física e geométrica, considerando o acoplamento termomecânico, poderá contribuir à literatura no âmbito estrutural, pois, desta forma, é possível simular mais precisamente seu comportamento, além de representar condições autênticas relacionadas à temperatura.

## 1.2. OBJETIVOS DA PESQUISA

### 1.2.1. Objetivo geral

Este trabalho visa ao desenvolvimento de um código computacional baseado no Método dos Elementos Finitos Posicional, considerando os efeitos oriundos das não linearidades física e geométrica em problemas termomecânicos. Além disso, são implementados diversos modelos de integração temporal, implícitos e explícitos, com a finalidade de avaliação da performance mediante aplicações numéricas.

### 1.2.2. Objetivos específicos

Tendo posse de código computacional pré-existente para análise estática ou dinâmica de sólidos bidimensionais considerando não linearidade geométrica, em linguagem Fortran, busca-se:

- Implementar rotinas computacionais associadas à não linearidade física, assim como a análise termomecânica, considerando critérios de escoamento que consideram os efeitos de encruamento isotrópico;
- Desenvolver formulação para acoplamento termodinâmico, considerando as Primeira e Segunda leis da Termodinâmica, assim como a Energia livre de Helmholtz;
- Discretizar algoritmos para problemas de impacto;
- Implementar diversos métodos de integração temporal.

Além disso, a comparação de resultados obtidos pelas formulações empregadas com exemplos extraídos da literatura é determinada por meio de:

- Problemas puramente térmicos;
- Problemas elastoplásticos estáticos;
- Problemas de impacto unidirecional;
- Problemas de impacto com acoplamento termomecânico.

Também é realizado estudo comparativo dos resultados obtidos mediante análise puramente mecânica, com sua correspondente análise termomecânica, avaliando, deste modo, os efeitos térmicos em estruturas em que há predominância de esforços de flexão e cisalhamento.

Por último, os algoritmos de integração temporal implementados no código computacional são avaliados por meio de variadas aplicações numéricas.

### 1.3. METODOLOGIA

A formulação posicional desenvolvida difere-se do MEF convencional, dado que adota suas coordenadas como parâmetro nodal. Para tal, no sentido da consideração dos efeitos da não linearidade geométrica, emprega-se o método iterativo de Newton-Raphson através da expansão de Taylor.

A modelagem apresentada neste trabalho considera o elemento finito triangular com aproximação cúbica de dez nós, conforme exposto por Marques (2006), na qual se pretende considerar as não-linearidades físicas e geométricas, bem como a consideração dos efeitos termomecânicos, dando continuidade aos trabalhos de Cavalcante (2016), Cavalcante *et al.* (2017) e Silva (2017).

Para a solução dos problemas dinâmicos serão empregados seis modelos de integração temporal, dentre os quais, Newmark, Houbolt, Wilson- $\theta$ , Diferenças Centrais, Souza & Moura (1997) e Chung & Lee (1994).

Em problemas de impacto com anteparo rígido, será abordada uma técnica que consiste em limitar as posições dos nós que sofrem impacto através da condição de penetração nula, conforme Greco (2004), Marques (2006) e Maciel (2008).

Nesse contexto, a solução do problema ocorre através do desenvolvimento e implementação de rotinas computacionais na linguagem Fortran, em um código para análise de sólidos bidimensionais já existente.

## CAPÍTULO 2

# Modelos elastoplásticos

### 2.1. CONCEITOS E CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA

De acordo com a teoria da elasticidade, a relação tensão deformação de um material é tomada como linear. Entretanto, essa característica não é válida para todos os materiais.

Descrever e equacionar o real comportamento elastoplástico de um material é de extrema dificuldade, o que torna necessária adoção de modelos simplificados que retratam o mais próximo possível o comportamento da estrutura.

Neste contexto, entre os anos de 1864 e 1872, Henri Tresca iniciou o campo de estudos da plasticidade, avaliando o comportamento de metais submetidos a grandes tensões e verificando que, após uma tensão crítica, o comportamento plástico é observado (CHEN & HAN, 1988). Inspirado nesses resultados, Saint Venant formalizou as equações fundamentais da plasticidade, baseadas nas hipóteses de que o material permanece com volume constante durante a deformação plástica, a direção das deformações principais coincide com a direção das tensões principais, e, por último, a máxima tensão de cisalhamento em cada ponto é igual a uma constante específica (RUBERT, 1993).

Em 1879, Bauschinger produziu um extensômetro que admitia medir alongamentos de materiais ensaiados com precisão da ordem de  $10^{-6}$ , o que se considera como um grande avanço para o estudo da resistência dos materiais. Com este instrumento, a tensão de proporcionalidade de um determinado material pôde ser estimada, e ainda, quando superado esse limite, surgiam deformações permanentes e mudanças em tais limites de proporcionalidade (RUBERT, 1993).

Quando materiais submetidos ao regime plástico são carregados axialmente em uma direção, e após descarregados, e então recarregados, porém com carregamento oposto, pode ocorrer uma queda de tensão quando comparada àquela

correspondente ao carregamento inicial, caracterizando o efeito de Bauschinger (YAN, 1998).

As deformações elásticas e plásticas estão associadas aos movimentos atômicos provocados pela aplicação de carregamento, no âmbito microestrutural. Quando em regime elástico, a movimentação dos átomos é dita reversível, implicando na recuperação da forma atômica inicial, após retirada de carregamento. Por outro lado, a deformação plástica ocorre devido ao seu movimento irreversível. Relativo ao comportamento plástico com encruamento, a movimentação dos átomos é restrita, provocada pela existência de defeitos, acarretando num ganho de densidade de átomos.

Sob a perspectiva macroestrutural, o comportamento plástico é observável pela ocorrência de deformações permanentes, provocadas por ciclos de carregamentos e descarregamentos. (SCHIMDT, 2006).

A teoria da plasticidade busca descrever matematicamente as deformações irreversíveis imediatas, partindo, por um lado, de modelos uniaxiais, dentre os quais, os mais comumente empregados são os modelos elastoplástico com e sem encruamento positivo (MUNAIAR NETO, 1998). Por outro lado, em análise multiaxial, o domínio elástico é determinado por critérios de escoamento, os quais dão origem às superfícies de plastificação que delimitam uma região dentro da qual há somente deformações elásticas (OLIVEIRA, 2016).

Neste cenário, com o objetivo de representar matematicamente o comportamento plástico de sólidos isotrópicos sem variação volumétrica e com limite de escoamento independente de pressões hidrostáticas, é apresentado o critério de escoamento de von Mises, considerando-se os efeitos de encruamento isotrópico, baseado nos trabalhos de Chen & Han (1988), Simo & Hughes (1998), Souza Neto *et al.* (2008) e Freitas (2010).

### **2.1.1. Comportamento elastoplástico bidimensional**

O modelo empregado para análise elastoplástica bidimensional com encruamento isotrópico linear considera o escoamento plástico como um processo irreversível e caracterizado pelo tensor de deformação  $\varepsilon$ , pelo tensor de deformação plástica  $\varepsilon_p$  e pela variável interna de encruamento  $\alpha$ .

Pode-se admitir a decomposição do tensor taxa de deformação total em duas parcelas oriundas da elasticidade e da plasticidade do material:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (3.1)$$

Em termos de taxa, a relação constitutiva pode ser expressa como:

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}^e = C_{ijkl} (\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}^p) \quad (2.2)$$

Em que  $\sigma$  corresponde ao tensor de tensões e  $C$  ao tensor constitutivo linear de quarta ordem, que é dado por:

$$C_{ijkl} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} + G(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (2.3)$$

Sendo  $\delta_{ij}$  o delta de Kronecker.

É importante definir alguns parâmetros, tais quais,  $\kappa$  corresponde ao módulo volumétrico,  $\lambda$  e  $\mu$  às constantes de Lamé, as quais podem ser expressas em função do módulo de elasticidade e do coeficiente de poisson do material:

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{E}{3(1-2\nu)} \\ \lambda &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \mu &= \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned} \quad (2.4)$$

### 2.1.2. Modelo elastoplástico de von Mises com encruamento positivo

O critério proposto por von Mises em 1913 estabelece que a plastificação tem início quando a energia de distorção elástica atinge valor crítico por unidade de volume.

Desta forma, a condição de escoamento de von Mises para o modelo elastoplástico com encruamento isotrópico linear é dada por:

$$f(\sigma, q) = \sqrt{3J_2} - (\sigma + q) \leq 0 \quad (2.5)$$

Em que  $J_2$  corresponde ao segundo invariante do tensor deviatórico de tensões  $s$ , podendo ser expresso na forma:

$$J_2 = \frac{1}{2} \|s\|^2 \quad (2.6)$$

O tensor deviatórico de tensões possui um traço nulo e pode ser expresso de acordo com a expressão 2.7:

$$s = \sigma - \frac{tr[\sigma]}{3}I \quad (2.7)$$

Sendo  $I$  o tensor identidade de segunda ordem e  $\frac{tr[\sigma]}{3}I$  a parcela hidrostática do tensor de tensões.

Na equação 2.8,  $q$  corresponde a uma variável que considera o efeito do encruamento na formulação e pode ser expressa como:

$$q = H'\alpha \quad (2.8)$$

Em que  $H'$  é o módulo plástico de encruamento isotrópico e  $\alpha$  é a variável interna de encruamento isotrópico relacionado à evolução da deformação plástica.

A equação de evolução para  $q$ , definida como lei do encruamento, é determinada conforme equação 2.9:

$$\dot{q} = -\gamma h \quad (2.9)$$

Onde  $h = H' \frac{\partial f}{\partial q}$ , considerando-se a associatividade no encruamento. Desta forma, obtém-se:

$$\dot{q} = -\gamma H' \frac{\partial f}{\partial q} = -\gamma H'(-1) = \gamma H' \quad (2.10)$$

De maneira análoga, a lei de evolução para  $\alpha$  é dada por:

$$\dot{\alpha} = -\gamma \frac{\partial f}{\partial q} = \gamma \quad (2.11)$$

A taxa de deformação plástica pode ser descrita na forma:

$$\dot{\varepsilon}^p = \gamma \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \gamma \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\sigma - \frac{1}{3}(tr[\sigma])I}{\sqrt{\|\sigma\|^2 - \frac{1}{3}(tr[\sigma])^2}} = \gamma \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{s}{\|s\|} = \gamma \sqrt{\frac{3}{2}} n = \gamma N \quad (2.12)$$

Em que  $n$  corresponde à norma que dá a direção do escoamento plástico e  $N$  é denominado tensor de escoamento, dado por:

$$N = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{s}{\|s\|} = \sqrt{\frac{3}{2}} n \quad (2.13)$$

Considerando o fato de que para o modelo de von Mises  $N$  é um tensor deviatórico, tem-se (Souza Neto *et al.*, 2008):

$$C : N = 2\mu N \quad (2.14)$$

Atribuindo a equação 2.13, tem-se que:

$$N : C : N = 3\mu \quad (2.15)$$

O modelo de von Mises com encruamento isotrópico é obtido considerando-se que a variável interna de encruamento isotrópico ( $\alpha$ ) corresponde à deformação plástica acumulada ( $\check{\epsilon}^p$ ):

$$\alpha \equiv \check{\epsilon}^p \quad (2.16)$$

Em termos de taxa, a deformação plástica acumulada pode ser descrita conforme equação 2.17:

$$\dot{\check{\epsilon}}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\dot{\epsilon}^p\| = \gamma \quad (2.17)$$

O parâmetro  $\gamma$  é uma função não-negativa, denominada parâmetro de consistência, que obedece às condições de complementaridade de Kuhn-Tucker (condições de carga-descarga):

$$\gamma \geq 0; f(\sigma, q) \leq 0; \gamma f(\sigma, q) = 0 \quad (2.18)$$

Além disso, o critério de escoamento deve satisfazer a condição de consistência:

$$\gamma \dot{f}(\sigma, q) = 0 \quad (2.19)$$

Sendo  $\dot{f}$  a taxa da função de escoamento.

Quando a função  $f(\sigma, q)$  assume valores negativos, a estrutura apresenta o comportamento elástico linear, e, de modo a garantir a validade das condições de complementaridade, o parâmetro  $\gamma$  assume valor igual a zero. Na situação em que a estrutura atinge a plasticidade, a função  $f(\sigma, q)$  assume valor nulo ao passo que  $\gamma$  admite valor positivo.

Com base nisso, é possível determinar a expressão que determina o valor de  $\gamma$  quando maior que zero, aplicando-se a regra da cadeia na função que caracteriza a condição de escoamento  $f(\sigma, q)$ , conforme equação 2.20:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \dot{q} \quad (2.20)$$

Substituindo as expressões 2.2, 2.10 e 2.12 em 2.20, obtém-se:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} : C : \dot{\varepsilon} - \gamma \left[ \frac{\partial f}{\partial \sigma} : C : N + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot H' \cdot \frac{\partial f}{\partial q} \right] \leq 0 \quad (2.21)$$

Para que a condição de consistência seja admitida,  $\dot{f} = 0$ . Deste modo, o parâmetro de consistência pode ser dado como:

$$\gamma = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma} : C : \dot{\varepsilon}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma} : C : N + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot H' \cdot \frac{\partial f}{\partial q}} \quad (2.22)$$

Simplificando a equação 2.22, considerando-se a normalidade e associatividade, tem-se:

$$\gamma = \frac{N : C : \dot{\varepsilon}}{N : C : N + H'} \quad (2.23)$$

Substituindo as equações 2.14 e 2.15 em 2.23, o parâmetro de consistência assume a forma de:

$$\gamma = \frac{\frac{2}{3} N : \dot{\varepsilon}}{1 + \frac{H'}{3\mu}} \quad (2.24)$$

A taxa de deformação plástica pode ser descrita em termos de deformação total substituindo a equação 2.24 em 2.12, obtendo a equação 2.25:

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{\frac{2}{3} N : \dot{\varepsilon}}{1 + \frac{H'}{3\mu}} N = \frac{(n \otimes n) : \dot{\varepsilon}}{1 + \frac{H'}{3\mu}} \quad (2.25)$$

Aplicando-se a equação 2.25 em 2.2, pode-se determinar a nova face da equação constitutiva para o modelo elastoplástico com encruamento positivo, conforme expressão 2.26:

$$\dot{\sigma}_{ij} = C : \left[ \varepsilon - \frac{(n \otimes n) : \dot{\varepsilon}}{1 + \frac{H'}{3\mu}} \right] = C : \left[ II - \frac{(n \otimes n)}{1 + \frac{H'}{3\mu}} \right] \dot{\varepsilon} \quad (2.26)$$

Dessa forma, o operador tangente elastoplástico, para  $\gamma > 0$ , é determinado pela expressão:

$$C_{ep} = C: \left[ II - \frac{(n \otimes n)}{1 + \frac{H'}{3\mu}} \right] \quad (2.27)$$

Assim, a expressão generalizada para o operador tangente elastoplástico é tomada como:

$$C_{ep} = \begin{cases} C, & \text{se } \gamma = 0 \\ C: \left[ II - \frac{(n \otimes n)}{1 + \frac{H'}{3\mu}} \right], & \text{se } \gamma > 0 \end{cases} \quad (2.28)$$

O operador tangente elastoplástico apresenta simetria, uma vez que se considera a aplicação da regra de associatividade no encruamento.

### 2.1.3. Algoritmo para implementação do modelo elastoplástico

O algoritmo para análise não linear incremental-iterativa proposto por Souza Neto *et al.* (2008) é considerado neste trabalho, no qual emprega-se o procedimento em passo finito para verificação do modelo constitutivo na sua fórmula incremental implícita que conduz ao algoritmo de retorno englobando a análise não linear física.

O algoritmo caracteriza-se por duas etapas. A primeira tem caráter de verificação, a partir da consideração de que a deformação total  $\Delta\varepsilon_n$  é conhecida.

A deformação plástica assume valor do passo anterior, assim como a variável interna de encruamento isotrópico:

$$\varepsilon_{n+1}^{p \text{ teste}} = \varepsilon_n^p \quad (2.29)$$

$$\alpha_{n+1}^{\text{teste}} = \alpha_n \quad (2.30)$$

Deste ponto, determina-se as componentes de tensão deviatórica e tensão volumétrica teste para o passo  $(n + 1)$ , representadas respectivamente pelas expressões 2.31 e 2.32:

$$s_{(n+1)}^{\text{teste}} = 2\mu\varepsilon_{d_{n+1}}^{e \text{ teste}} \quad (2.31)$$

$$p_{(n+1)}^{\text{teste}} = \kappa\varepsilon_{v_{n+1}}^{e \text{ teste}} \quad (2.32)$$

Sendo  $\mu$  e  $\kappa$ , respectivamente, os módulos de cisalhamento e volumétrico. Os subscritos  $v$  e  $d$  na deformação elástica teste denotam as componentes volumétrica e deviatórica, dadas respectivamente por:

$$\varepsilon_{v_{n+1}}^{e_{teste}} = tr(\varepsilon_{n+1}^{e_{teste}}) \quad (2.33)$$

$$\varepsilon_{d_{n+1}}^{e_{teste}} = \varepsilon_{n+1}^{e_{teste}} - \frac{1}{3} \varepsilon_{v_{n+1}}^{e_{teste}} I \quad (2.34)$$

Desta forma, verifica-se o critério de plastificação. Para o caso em que a função assume valor menor que zero, o regime plástico não é atingido, e, portanto, o passo está no regime elástico. Entretanto, não havendo essa verificação, a segunda etapa, correspondente à correção do algoritmo é implantada através do modelo implícito iterativo de Newton-Haphson, buscando a convergência do critério de plastificação conforme demonstrado no quadro 2.1, que em resumo, apresenta o esquema de verificação em passos finitos para o modelo elastoplástico com encruamento pelo critério de von Mises.

Vale salientar que o modelo com encruamento pode simular o modelo elastoplástico perfeito ao se considerar  $H' = 0$ .

A regra aqui observada é válida para o estado plano de deformações, desde que a deformação que ocorre fora do plano seja considerada nula.

O quadro 2.1 simplifica o procedimento iterativo correspondente à análise não linear física empregada nesse trabalho.

Quadro 2.1 - Algoritmo para análise não linear incremental-iterativa para o modelo elastoplástico de von Mises com encruamento isotrópico.

A. Inicializações:  $\{\Delta\varepsilon_n; \varepsilon_n^p; \alpha_n\}$

B. Calcula do estado teste (preditor elástico):

$$\varepsilon_{n+1}^{e\ teste} = \varepsilon_n^e + \Delta\varepsilon_n$$

$$\varepsilon_{n+1}^p\ teste = \varepsilon_n^p$$

$$\alpha_{n+1}^{teste} = \alpha_n$$

$$\varepsilon_{v_{n+1}}^{e\ teste} = tr(\varepsilon_{n+1}^{e\ teste})$$

$$\varepsilon_{d_{n+1}}^{e\ teste} = \varepsilon_{n+1}^{e\ teste} - \frac{1}{3}\varepsilon_{v_{n+1}}^{e\ teste} I$$

$$s_{(n+1)}^{teste} = 2\mu\varepsilon_{d_{n+1}}^{e\ teste}$$

$$p_{(n+1)}^{teste} = \kappa\varepsilon_{v_{n+1}}^{e\ teste}$$

$$\sigma_{(n+1)}^{teste} = s_{(n+1)}^{teste} + p_{(n+1)}^{teste} I$$

C. Teste do critério de plastificação:

$$\text{Se } f_{n+1}^{teste} = \sqrt{3J_2 s_{(n+1)}^{teste}} - (\sigma_y + H'\alpha_{n+1}^{teste}) < 0,$$

Então, comportamento elástico da estrutura:

O conjunto  $(\cdot)_{(n+1)} = (\cdot)_{(n+1)}^{teste}$

$$C_{ep} = C$$

Senão, comportamento plástico da estrutura (ir para D).

D. Mapeamento de retorno (estado de correção):

Enquanto  $f_{n+1} > 0$ , faça:

$$\Delta\gamma_{n+1} = \Delta\gamma_n + \frac{f_{n+1}^{teste}}{3\mu + H'}$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \frac{f_{n+1}^{teste}}{3\mu + H'}$$

$$f_{n+1} = f_{n+1}^{teste} - \Delta\gamma_{n+1}(3\mu + H')$$

E. Correção das variáveis:

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta\gamma_{n+1} \sqrt{\frac{3}{2} \frac{s_{(n+1)}^{teste}}{\|s_{(n+1)}^{teste}\|}}$$

$$\sigma_{(n+1)} = \left( 1 - \frac{3\mu\Delta\gamma_{n+1}}{\sqrt{3J_2 s_{(n+1)}^{teste}}} \right) s_{(n+1)}^{teste} + p_{(n+1)}^{teste} I$$

$$\varepsilon_{n+1}^e = \frac{1}{2\mu} \left( 1 - \frac{3\mu\Delta\gamma_{n+1}}{\sqrt{3J_2 s_{(n+1)}^{teste}}} \right) s_{(n+1)}^{teste} + \frac{1}{3} \varepsilon_{v_{n+1}}^{e teste} I$$

F. Cálculo do operador tangente elastoplástico:

$$C_{ep} = 2\mu \left( 1 - \frac{3\mu\Delta\gamma_{n+1}}{\sqrt{3J_2 s_{(n+1)}^{teste}}} \right) \left( II - \frac{1}{3} I \otimes I \right) + 6\mu^2 \left( \frac{\Delta\gamma_{n+1}}{\sqrt{3J_2 s_{(n+1)}^{teste}}} - \frac{1}{3\mu + H'} \right) (n_{n+1} \otimes n_{n+1}) \\ + \kappa(I \otimes I)$$

Em que  $n_{n+1} = \frac{s_{(n+1)}^{teste}}{\|s_{(n+1)}^{teste}\|}$ .

Fonte: Souza Neto *et al.* (2008)

Com relação ao estado plano de tensões, busca-se a convergência associada à tensão que ocorre fora do plano no sentido de torná-la nula, através de processo iterativo, conforme quadro 2.2.

A relação constitutiva, para o estado plano de tensões, assume a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^{ep} & C_{12}^{ep} & C_{13}^{ep} & C_{14}^{ep} \\ C_{21}^{ep} & C_{22}^{ep} & C_{23}^{ep} & C_{24}^{ep} \\ C_{31}^{ep} & C_{32}^{ep} & C_{33}^{ep} & C_{34}^{ep} \\ C_{41}^{ep} & C_{42}^{ep} & C_{43}^{ep} & C_{44}^{ep} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^{e teste} \\ \varepsilon_{22}^{e teste} \\ \frac{2\varepsilon_{12}^{e teste}}{\sqrt{3}} \\ \varepsilon_{33}^{e teste} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Ou de forma simplificada:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{n+1} \\ \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{n+1}^{e teste} \\ \varepsilon_{33}^{e teste} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Para a obtenção do operador tangente elastoplástico correspondente ao estado plano de tensões, deve-se, inicialmente, determinar  $\sigma_{33} = 0$ . Dessa forma, de acordo com a expressão 2.36, obtém-se:

$$\sigma_{33} = D_{21}\varepsilon_{n+1}^{e teste} + D_{22}\varepsilon_{33}^{e teste} = 0 \quad (2.37)$$

Dessa forma,

$$\varepsilon_{33}^{e teste} = \frac{-1}{D_{22}} D_{21}\varepsilon_{n+1}^{e teste} \quad (2.38)$$

Portanto,

$$\frac{\sigma_{n+1}}{\varepsilon_{n+1}^e} = C_{ep}^{EPT} = D_{11} - \frac{1}{D_{22}} D_{12} D_{21} \quad (2.39)$$

Relativo ao estado plano de tensões, quadro 2.2 simplifica o procedimento iterativo correspondente à análise não linear física empregada nesse trabalho.

Quadro 2.2 - Algoritmo para análise não linear incremental-iterativa para o Estado Plano de Tensões

A. Inicializações:  $\{\Delta\varepsilon_n; \varepsilon_n^p; \alpha_n\}$

B. Calcula do estado teste (preditor elástico):

$$\varepsilon_{33}^{e \text{ teste}} = \varepsilon_{33}^e$$

C. Aplica-se o algoritmo observado no quadro 2.1

D. Análise de convergência:

Se  $\sigma_{33} \neq 0$ , então (não caracteriza o estado plano de tensão)

$$\varepsilon_{33}^{e \text{ teste}} = \varepsilon_{33}^{e \text{ teste}} - \frac{\sigma_{33}}{D_{22}}$$

Em que  $D_{22}$  é a componente (4,4) do operador tangente elastoplástico de dimensões 4x4.

E. Determinação do operador tangente elastoplástico:

$$C_{ep}^{EPT} = D_{11} - \frac{1}{D_{22}} D_{12} D_{21}$$

Fonte: Souza Neto *et al.* (2008)

## CAPÍTULO 3

# Modelos termomecânicos

### 3.1. CONCEITOS E CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA

A termomecânica estuda a influência do estado térmico de um sólido em seu comportamento mecânico, de mesmo modo que a influência da deformação nas mudanças de temperatura da estrutura.

Sherief *et al.* (2004) relata que os primeiros estudos relacionados a termomecânica foram propostos por Duhamel (1837) e Neumann (1885), introduzindo a Teoria da Termoelasticidade desacoplada, em que a variação de temperatura gera uma resposta mecânica direta no próprio corpo. No entanto, dois defeitos foram apontados nesta teoria. O primeiro relata o fato de o estado mecânico de um corpo elástico não sofrer nenhum efeito da temperatura estar em desacordo com resultados experimentais. Já o segundo se refere à equação de calor apresentada na teoria, cuja forma parabólica indica que a velocidade de propagação da temperatura é infinita no corpo, contradizendo, novamente, as observações físicas (SHERIEF *et al.*, 2004).

Por um lado, tendo em vista a falha concernente à reciprocidade dos efeitos apresentada na teoria da proposta por Duhamel, aliada a estudos experimentais, Biot (1956) propôs um equacionamento baseado na combinação da teoria da elasticidade e da condução de calor, dando origem à teoria da termoelasticidade acoplada, considerando a deformação associada ao fluxo de entropia de um determinado corpo. Por outro lado, a inconsistência referente à velocidade de propagação infinita de temperatura também faz parte dessa teoria.

Como forma de resolver o problema da velocidade infinita, diversas teorias buscaram substituir a Lei de condução de calor de Fourier pela teoria generalizada da termoelasticidade com relaxamento do tempo para corpos isotrópicos, relatada primeiramente por Lord e Shulman (1967) e mais tarde aprimorada por Sherief (1980) e Dhaliwal e Sherief (1980), incluindo os casos anisotrópicos. Para essa nova teoria, a equação de condução de calor apresenta uma forma hiperbólica, eliminando o

paradoxo da velocidade infinita de propagação da temperatura (SHERIEF *et al.*, 2004).

Uma segunda teoria foi desenvolvida por Green & Lindsay (1972) em que dois parâmetros de relaxamento de tempo são inseridos nas equações constitutivas. Posteriormente, Green & Naghdi (1995) propuseram três novas teorias associadas termoelasticidade generalizada, baseadas no balanço geral de entropia. Na primeira, a equação de condução de calor, se linearizada, obtém-se a equação de condução de calor de Fourier. A segunda teoria não permite a dissipação de energia, enquanto que a terceira permite tal condição.

Contudo, mesmo havendo a consideração da dissipação de energia, as diversas teorias da termoelasticidade não conseguem descrever fielmente o comportamento termomecânico para corpos elastoplásticos. Neste contexto, os primeiros trabalhos relativos à termoplasticidade dentro da estrutura da termodinâmica podem ser encontrados em Dillon (1963) e Perzyna & Sawczuk (1973) (HAKANSSON *et al.*, 2005).

Na sequência, serão abordados conceitos e formulações da termodinâmica, para então apresentar as teorias da termoelasticidade e termoplasticidade com mais detalhes. A formulação observada a seguir pode ser encontrada em Parkus (1976), Lewis *et al.* (2004), Carrazedo (2009), Cavalcante (2016) e Silva (2017).

## 3.2. TERMODINÂMICA

A termodinâmica estuda a interação entre o calor e outras formas de energia num determinado sistema, isto é, a interação entre os fenômenos calóricos e mecânicos.

### 3.2.1. Lei zero da termodinâmica

A lei zero da termodinâmica diz que quando dois corpos estão em equilíbrio térmico com um terceiro, os dois primeiros estão em equilíbrio entre si, ou seja, se dois corpos estão em equilíbrio térmico, eles tendem a permanecer em equilíbrio.

### 3.2.2. Primeira lei da termodinâmica

Também conhecida como lei da conservação de energia, ela afirma que a energia de um sistema não pode ser criada ou consumida, apenas transferida ou armazenada no meio em que está situada.

O calor recebido por um sistema é dado pela soma entre a variação da energia interna do sistema e o trabalho efetuado por ele.

$$\Delta Q = \Delta U + W \quad (3.1)$$

Em que  $\Delta U$  se refere à variação de energia,  $\Delta Q$  é a variação de calor e  $W$  corresponde à variação de trabalho mecânico.

Ou seja, se houver algum acréscimo de energia, uma alteração ocorrerá no sistema até que ele retome o equilíbrio.

Porém, de acordo com essa lei, pelo princípio de conservação de energia, o calor pode fluir de um corpo mais frio para um mais quente sem que o sistema seja alterado, o que não é possível. Dessa forma, para a determinação da direção do fluxo de energia de um sistema, foi elaborada a segunda lei da termodinâmica.

### 3.2.3. Segunda lei da termodinâmica

A segunda lei da termodinâmica diz que não pode haver fluxo de calor de um corpo com temperatura mais baixa para outro com temperatura mais elevada de forma espontânea. Para que isso ocorra, é necessário haver trabalho realizado sobre o sistema por algum agente externo. Trata-se do enunciado de Clausius.

A desigualdade apresentada em 3.2 diz que para gerar trabalho, é preciso haver uma diferença de temperatura entre dois corpos ou que um agente externo forneça energia em forma de calor que irá fluir do corpo com mais calor para o com menos calor.

$$\int_m \dot{S} dm \geq \int_m \frac{R}{T} dm - \int_a \frac{q_i n_i}{T} dA \quad (3.2)$$

Em que  $\dot{S}$  é a taxa de mudança da entropia;  $q_i$  é a taxa de transferência de calor;  $n_i$  é a normal à superfície considerada;  $R$  é a geração de calor interna; e  $T$  é a temperatura absoluta.

Na inequação apresentada em 3.2, observa-se que para um sistema fechado, a entropia se manterá constante desde que não haja dissipação de energia calórica, caso contrário, ela sofrerá aumento.

### 3.3. LEI DE FOURIER

A condução térmica é uma das formas de transferência de calor num determinado sistema, em que a transmissão de energia se dá por meio da interação entre suas partículas.

A lei de Fourier, definida na equação 3.3, afirma que o fluxo de calor devido à condução térmica é proporcional à magnitude do gradiente de temperatura e o sinal negativo diz respeito a transferência de energia positiva ocorrer em direção da diminuição da temperatura.

$$q = -kA \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (3.3)$$

Sendo  $k$  o coeficiente de condutividade térmica do material;  $A$  a área da seção transversal do elemento linear; e  $\theta$  a variação de temperatura.

Normalmente, o coeficiente de condutividade térmica  $k$  é considerado constante e independente da temperatura, entretanto, essa aproximação só é válida para os casos em que o cálculo é realizado para pequenas taxas de variação de temperatura, ainda dependendo do tipo de material (CARRAZEDO, 2009).

### 3.4. TEORIA DA TERMOELASTICIDADE DESACOPLADA

Nesta teoria, introduzida por Duhamel (1837), os diferenciais de temperatura geram esforços internos (SILVA, 2017).

Nesse contexto, ao aplicar-se uma variação de temperatura  $\theta$  num corpo com temperatura inicial  $\theta_0$ , seu volume sofrerá variação de forma proporcional ao seu coeficiente de expansão térmica. A partir do momento em que este corpo é sujeito a uma tensão em uma direção qualquer, uma deformação ocorrerá na mesma direção da aplicação tensão enquanto que contrações ocorrerão nas direções perpendiculares.

Dessa forma, de acordo com a Lei de Hooke e levando em consideração a deformação volumétrica isotrópica devido à variação de temperatura, a relação tensão-deformação é dada pela expressão:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left( \sigma_{ij} - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) + \alpha \theta \delta_{ij} \quad (3.4)$$

Na qual  $G$  corresponde ao módulo de elasticidade transversal;  $\nu$  é o coeficiente de Poisson; e  $\delta_{ij}$  se refere ao delta de Kronecker, definido como 1 quando  $i = j$  e 0 quando  $i \neq j$ .

A relação inversa da equação 3.4 é dada por:

$$\sigma_{ij} = 2G \left( \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \theta \delta_{ij} \right) \quad (3.5)$$

Em que  $\varepsilon_{kk}$  é referente ao traço do tensor de deformações.

Tomando-se  $\sigma_{ij}$  como o tensor de tensões,  $F_i$  as forças de corpo e  $\ddot{x}_i$  como a aceleração, a equação de equilíbrio dinâmico local dada por:

$$\sigma_{ij,j} + F_i - \rho = 0 \quad (3.6)$$

Substituindo a equação 3.5 em 3.6, tem-se a equação de equilíbrio escrita na forma:

$$\left[ 2G \left( \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \theta \delta_{ij} \right) \right]_{,j} + F_i - \rho \ddot{x}_i = 0 \quad (3.7)$$

### 3.5. TEORIA CLÁSSICA DA TERMOELASTICIDADE ACOPLADA

As equações da teoria clássica da termoelasticidade descrevem o comportamento elástico e térmico de meios elásticos e condutores de calor e, em particular, as ações recíprocas entre tensões elásticas e diferenças de temperatura (KHALIFA *et al.*, 2004).

Com o intuito de minimizar as inconsistências observadas na teoria da termoelasticidade desacoplada, Biot (1956) considera a influência da mudança de forma de um corpo na temperatura.

Devido ao fato de haver grandes dificuldades na resolução analítica para problemas termoelásticos acoplados, modelos numéricos são comumente empregados na resolução dos mais diversos problemas.

Em casos mais recentes, uma formulação baseada em MEF para amortecimento termoelástico foi apresentada por Serra & Bonaldi (2008). Carrazedo (2009) analisou o impacto entre estruturas levando em consideração efeitos térmicos. Xia *et al.* (2014) desenvolveu seu trabalho objetivando a obtenção da resposta dinâmica termoelástica bidimensional para um corpo submetido a uma fonte de calor, sendo um corpo isotrópico e homogêneo. Cavalcante (2016) avaliou o comportamento termomecânico de treliças não lineares. Da mesma forma, Silva (2017) estudou o comportamento termomecânico em pórticos através de uma formulação baseada no método dos elementos finitos posicional.

Nos itens a seguir serão descritas a formulação e conceitos da teoria da termoelasticidade acoplada com base nas leis da termodinâmica.

### 3.5.1. Primeira lei da termodinâmica

A primeira lei da termodinâmica estabelece que num ciclo qualquer, a integral cíclica do calor ( $Q$ ) tem proporcionalidade com a integral cíclica do trabalho ( $W$ ). Dessa forma, tem-se:

$$\oint dQ = \oint dW \quad (3.8)$$

Reescrevendo a equação para se obter uma forma mais adequada para a lei da conservação de energia em termos do fluxo de calor, obtém-se:

$$\dot{Q} = \frac{du}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d(mv^2)}{dt} + \frac{d(mgz)}{dt} + \dot{W} \quad (3.9)$$

Na qual  $\dot{Q}$  é o fluxo de calor;  $m$  é a massa do sistema;  $v$  é a velocidade;  $g$  é a aceleração da gravidade; e  $z$  é a altura em relação ao referencial do sistema.

A energia interna do sistema é representada pela primeira parcela da equação 3.9. Já a segunda parcela se refere à energia cinética, e, por último, a terceira parcela diz respeito a energia potencial gravitacional.

O fluxo total de calor em um sistema é definido como a soma do fluxo de calor que entra ou sai pela superfície com o calor gerado internamente, como mostrado em 3.10.

$$\oint_A \dot{Q} dA = - \oint_A q_i n_i dA + \int_m R dm \quad (3.10)$$

Em que  $R$  é o calor gerado;  $q_i$  é o fluxo de calor pela superfície do corpo; e  $n_i$  é um vetor unitário normal a superfície.

Manipulando-se adequadamente as equações 3.9 e 3.10, obtém-se a consideração da energia potencial como parte das forças externas apresentada em 3.11.

$$\frac{d}{dt} \int_m u dm + \frac{d}{dt} \int_m \frac{1}{2} \dot{x}_i \dot{x}_i dm = \int_m R dm - \oint_A q_i n_i dA + \int_A W dA \quad (3.11)$$

Em virtude da consideração do peso próprio nas equações das forças de corpo a taxa de trabalho é definida por:

$$\int_A W dA = \int_m F_i \dot{x}_i dm + \oint_A f_i \dot{x}_i dA \quad (3.12)$$

Dessa forma, empregando 3.12 em 3.11, obtém-se a expressão 3.13, que determina a lei de conservação de energia em sistemas termoelásticos.

$$\frac{d}{dt} \int_m u dm + \frac{d}{dt} \int_m \frac{1}{2} \dot{x}_i \dot{x}_i dm = \int_m R dm - \oint_A q_i n_i dA + \int_m F_i \dot{x}_i dm + \oint_A f_i \dot{x}_i dA \quad (3.13)$$

Em que os primeiros termos do lado da igualdade representam a energia interna do sistema e a energia cinética, respectivamente. Do outro lado, as parcelas se referem, na sequência, às fontes de calor internas, fluxo de calor pela superfície do corpo, e a taxa de trabalho das forças externas.

### 3.5.2. Equação diferencial de condução de calor

Levando-se em consideração apenas a variação calórica do sistema, a lei da conservação de energia obtida em 3.1, pode ser reescrita na forma:

$$\Delta U = \Delta Q \quad (3.14)$$

Para o volume arbitrário  $V$  de um sistema no qual não há troca de massa, a variação de energia é dada por:

$$\Delta U = \int_V \rho \frac{du}{dt} dV \quad (3.15)$$

Em que  $\rho$  corresponde à densidade do material;  $u$ , à energia interna; e  $t$ , ao tempo.

O calor específico pode ser entendido como a quantidade de calor necessária para elevar a temperatura de um corpo em um grau. É determinado pela variação da energia interna em relação à temperatura:

$$c_e = \frac{du}{dT} \quad (3.16)$$

Substituindo 3.16 em 3.15, obtém-se a expressão:

$$\Delta U = \int_V \rho \frac{du}{dT} \frac{dT}{dt} dV = \int_V \rho c_e \frac{dT}{dt} dV \quad (3.17)$$

A variação de calor  $\Delta Q$  é obtida por:

$$\Delta Q = - \oint_A q_i n_i dA + \int_V \rho R dV \quad (3.18)$$

Na qual  $\rho R$  é a taxa de calor no domínio;  $q$  é o fluxo de calor pela superfície do corpo; e  $n$  é um vetor unitário normal à superfície.

A primeira parcela da equação de variação de calor se refere ao fluxo de calor que entra ou sai da superfície do corpo, e a segunda, ao calor gerado internamente ao corpo.

A partir da lei de Fourier e do teorema de Gauss, o fluxo de calor na superfície do corpo pode ser reescrito do seguinte modo:

$$- \oint_A q_i n_i dA = \int_V k \nabla^2 T dV \quad (3.19)$$

Relacionando as expressões 3.14, 3.15, 3.18 e 3.19 e aplicando o teorema da conservação de massa, obtém-se a equação de condução de calor transiente, expressa em 3.20.

$$\int_V \left( \rho c_e \frac{dT}{dt} - k \nabla^2 T - \rho R \right) dV = 0 \quad (3.20)$$

Para um volume arbitrário considerado, a mesma equação pode ser dada por:

$$\rho c_e \frac{dT}{dt} - k \nabla^2 T - \rho R = 0 \quad (3.21)$$

### 3.5.3. Princípio da taxa de trabalho

O princípio da taxa de trabalho afirma que a taxa de mudança de energia cinética equivale à taxa de trabalho de todas as forças externas e internas, conforme 3.22:

$$\frac{d}{dt} \int_m \frac{1}{2} \dot{x}_i \dot{x}_i dm = \int_m F_i \dot{x}_i dm + \oint_A f_i \dot{x}_i dA - \int_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV \quad (3.22)$$

Em que  $\varepsilon_{ij}$  é o tensor de taxa de deformação; e  $\sigma_{ij}$  é o tensor de tensões.

Aplicando a equação 3.22 em 3.13, bem como o teorema de Gauss e o teorema da conservação de massa, obtém-se:

$$\int_V (\dot{u} - R) \rho dV = \int_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV - \int_V q_{i,i} dV \quad (3.23)$$

### 3.5.4. Segunda Lei da termodinâmica

Aplicando-se o teorema de conservação de massa assim como teorema de Gauss, a expressão resulta em:

$$\int_V \dot{S} \rho dV \geq \int_V \frac{R}{T} \rho dV - \int_V \left( \frac{q_i}{T} \right)_{,i} dV \quad (3.24)$$

Sendo denominada de inequação de Clausius.

Derivando-se a última parcela de 3.24 em relação a posição, para um volume arbitrário, a expressão resulta em:

$$\rho T \dot{S} \geq \rho R - q_{i,i} + \frac{q_i}{T} T_{,i} \quad (3.25)$$

Por meio da correlação das equações 3.25 e 3.23, a expressão conhecida como inequação de Clausius-Duhem (HOLZAPFEL, 2004; SANTAOJA, 2004) é dada por:

$$\rho(\dot{u} - T \dot{S}) \leq \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{q_i}{T} T_{,i} \quad (3.26)$$

### 3.5.5. Energia Livre de Helmholtz

A energia livre de Helmholtz é denominada como uma grandeza capaz de medir a quantidade de energia útil do sistema que pode se transformar em trabalho, conforme segue:

$$\Phi(\varepsilon_{ij}, T) = U - TS \quad (3.27)$$

$$\dot{\Phi}(\varepsilon_{ij}, T) = U - T\dot{S} - \dot{T}S = \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_{ij}}\dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial\Phi}{\partial T}\dot{T} \quad (3.28)$$

A expressão 3.27 é denominada energia livre de Helmholtz, enquanto que a equação 3.28 se refere à sua taxa.

Substituindo a Equação 3.28 em 3.23 e 3.26, obtém-se respectivamente:

$$\left(\rho \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_{ij}} - \sigma_{ij}\right)\dot{\varepsilon}_{ij} + \rho \left(\frac{\partial\Phi}{\partial T} + S\right)\dot{T} + \rho(T\dot{S} - R) + q_{i,i} = 0 \quad (3.29)$$

$$\left(\rho \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_{ij}} - \sigma_{ij}\right)\dot{\varepsilon}_{ij} + \rho \left(\frac{\partial\Phi}{\partial T} + S\right)\dot{T} - \frac{q_i}{T}T_{,i} \leq 0 \quad (3.30)$$

Uma vez que os valores correspondentes a  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  e  $\dot{T}$  são arbitrários, as expressões entre parênteses devem respeitar a igualdade. Portanto:

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_{ij}} \quad (3.31)$$

$$S = -\frac{\partial\Phi}{\partial T} \quad (3.32)$$

$$q_{i,i} = -\rho(T\dot{S} - R) \quad (3.33)$$

$$q_i T_{,i} \leq 0 \quad (3.34)$$

A equações 3.31 e 3.32 são constitutivas do material, representando a relação tensão-deformação e entropia do sistema, respectivamente. Já a 3.33 se refere à condução de calor.

Aplicando as Equações 3.32 e 3.33 em 3.28, tem-se outra representação da equação de condução de calor, agora em função da energia livre de Helmholtz, conforme a expressão:

$$q_{i,i} = \rho T \left( \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_{ij}\partial T} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial T^2} \dot{T} \right) + \rho R \quad (3.35)$$

### 3.5.6. Potencial elástico

O conceito de potencial elástico ( $\Psi$ ) é uma forma de definir as propriedades elásticas de um corpo qualquer por meio da relação entre tensões e deformações, de acordo com a equação:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (3.36)$$

Outra forma de conceituar o potencial elástico é correlacionando-o com a energia livre de Helmholtz utilizando-se da expressão:

$$\Psi = \rho \Phi \quad (3.37)$$

Integrando-se a equação 3.36 em relação à  $\varepsilon_{ij}$  e aplicando-se o resultado na equação 3.5 advinda da lei de Hooke, observa-se uma forma para potencial elástico, como indicado na expressão 3.38.

$$\Psi = G \left( \varepsilon_{ij}^2 + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk}^2 - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \alpha \theta e \right) + f(\theta) \quad (3.38)$$

A função  $f(\theta)$  é resultado da integração e depende apenas da temperatura, podendo assumir ordem qualquer, o que pode representar possíveis características térmicas não lineares do material (CARRAZEDO, 2009).

### 3.5.7. Equação de condução de calor termoelástica

Pode-se definir o calor específico como:

$$c_e = T \frac{\partial S}{\partial T} \quad (3.39)$$

A equação de condução de calor na sua forma mais conhecida pode ser obtida através de 3.32, 3.35 e 3.39 resultando na expressão 3.40.

$$kT_{,ii} = \rho \left( c_e \dot{T} - R - T \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T} \dot{\varepsilon}_{ij} \right) \quad (3.40)$$

Em que  $k$  é o coeficiente de condutividade térmica;  $\rho$  é a densidade do material; e  $\Phi$  é a energia livre de Helmholtz.

Sabendo-se que a temperatura absoluta ( $T$ ) é igual à soma da variação de temperatura ( $\theta$ ) com a temperatura de referência ( $\theta_0$ ) e que esta é constante, não variando com a posição nem com o tempo, a equação 3.40 pode ser reescrita em função de  $\theta$ .

Como forma de aproximação, toma-se o fator  $T$  como a temperatura de referência, desde que o acréscimo de temperatura seja pequeno. Portanto, obtém-se a expressão:

$$k\theta_{,ii} = \rho \left( c_e \dot{\theta} - R - \theta_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \theta} \dot{\varepsilon}_{ij} \right) \quad (3.41)$$

Dessa forma, substituindo a equação 3.38 em 3.41, chega-se à:

$$k\theta_{,ii} = 2G \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} \alpha \theta_0 \varepsilon_{kk} \dot{\varepsilon}_{kk} + \rho c_e \dot{\theta} - \rho R \quad (3.42)$$

Observa-se que na expressão 3.42, a função  $f(\theta)$  apresentada como um termo da equação 3.38 é considerada constante em relação à temperatura, e, portanto, anulada quando derivada.

Quando o corpo é sujeito a taxas de deformação negativas, sua temperatura tende a aumentar. Caso contrário, a temperatura do corpo tende a diminuir, caracterizando o efeito Gough-joule. Tal efeito pode ser comprovado no trabalho de Boulanger *et al.* (2004).

### 3.5.8. Equação de equilíbrio termoelástica

Para obter a equação de equilíbrio termoelástica, pela qual é definido o comportamento elástico dinâmico do material, o princípio da taxa de trabalho descrito na equação 3.22 deve ser considerado, em que, o termo referente ao trabalho das forças internas é integrado por partes e então aplicado o teorema da divergência, obtendo:

$$\int_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV = \int_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{i,j} dV = \int_V (\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_i)_{,j} dV - \int_V \sigma_{ij,j} \dot{\varepsilon}_i dV \quad (3.43)$$

$$\int_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{i,j} dV = \oint_A \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_i n_j dA - \int_V \sigma_{ij,j} \dot{\varepsilon}_i dV \quad (3.44)$$

Aplicando a equação 3.44 em 3.22 e reorganizando os termos, obtém-se:

$$\int_V (\sigma_{ij,j} + F_i - \ddot{x}_i \rho) \dot{\varepsilon}_i dV + \oint_A (f_i - \sigma_{ij} n_j) \dot{\varepsilon}_i dA = 0 \quad (3.45)$$

Em que as forças de corpo  $F_i$  são aplicadas em função do volume.

Para que essa igualdade seja atendida, considerando  $\dot{\varepsilon}_i$  qualquer, tem-se que:

$$\sigma_{ij,j} + F_i - \ddot{x}_i \rho = 0 \quad (3.46)$$

$$f_i = \sigma_{ij} n_j \quad (3.47)$$

A equação 3.46 descreve a equação de movimento, e a equação 3.47 define o vetor de tensões.

Substituindo a equação 3.5 em 3.46, chega-se à equação 3.48, podendo ser reescrita em função das constantes de Lamé ( $\lambda$  e  $\mu$ ) de acordo com a equação 3.49 definida como equação de equilíbrio dinâmico local.

$$2G \left( \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \theta \delta_{ij} \right)_{,j} + F_i - \ddot{x}_i \rho = 0 \quad (3.48)$$

$$\left[ 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} - (3\lambda + 2\mu) \alpha \theta \delta_{ij} \right]_{,j} + F_i - \ddot{x}_i \rho = 0 \quad (3.49)$$

Portanto, as principais equações da teoria da termoelasticidade acoplada são descritas pelas equações de condução de calor transiente 3.42 e de equilíbrio dinâmico local 3.49, descrevendo o comportamento termomecânico de um corpo elástico e condutor de calor.

### 3.6. TEORIA DA TERMOPLASTICIDADE

Materiais com comportamento inelástico puderam ser mais bem entendidos com a incorporação de variáveis termodinâmicas internas à teoria da elasticidade clássica (CARRAZEDO, 2009). Tais variáveis tem o viés de representar o comportamento do material frente aos efeitos dissipativos, como a deformação plástica (HOLZAPFEL, 2004).

Com o objetivo de se considerar a fração do trabalho plástico convertida em calor, apresenta-se uma formulação generalizada para termoplasticidade, baseando-se em estudos realizados por Rosakis *et al.* (2000), Kamlah & Haupt (1997) e Holzapfel (2004).

Observou-se a necessidade de consideração do comportamento termomecânico de materiais elastoplásticos depois de resultados experimentais obtidos por Farren & Taylor (1925) e Taylor & Quinney (1934), os quais apontaram produção de calor por parte do trabalho plástico. Dessa maneira, Dillon (1963) e Perzyna & Sawczuk (1973) apresentaram as primeiras considerações acerca do desenvolvimento de modelos que consideram o efeito termoplástico. Lemonds & Needleman (1986), Simo & Miehe (1992) e Canadija & Brnic (2004) discutiram formulações para problemas com grandes deformações.

Cerca de 90% do trabalho plástico é convertido em calor. Já o restante é absorvido pelo sistema devido às imperfeições cristalinas, num processo conhecido por trabalho frio (Rosakis *et al.*, 2000).

Simo & Miehe (1992) utilizaram de uma abordagem numérica, baseada em elementos finitos, apresentando formulação termodinâmica de problemas acoplados.

Isto posto, uma análise termoplástica deve considerar o comportamento da temperatura e a geração de calor num sistema inelástico (CAVALCANTE, 2016), baseando-se em princípios básicos, como variáveis internas, leis da termodinâmica e relações de equilíbrio (ROSAKIS *et al.*, 2000).

### 3.6.1. Primeira e segunda leis da termodinâmica

Como na termoelasticidade, a equação de calor da termoplasticidade é baseada nas primeira e segunda lei da termodinâmica, na forma da inequação de Clausius-Duhem:

$$\rho\dot{u} - \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + q_{i,i} - \rho R = 0 \quad (3.50)$$

$$\rho\theta\dot{S} - \rho R + q_{i,i} - \frac{q_i}{\theta}\theta_{,i} \geq 0 \quad (3.51)$$

Em que  $\dot{u}$  se refere à variação de energia interna;  $\sigma$  é o tensor de tensões;  $\dot{\varepsilon}$  corresponde à taxa de deformações;  $q$  é o fluxo de calor;  $R$  corresponde a uma fonte de calor interna;  $\theta$  é a variação de temperatura; e  $S$  se refere à entropia.

Combinando-se as equações 3.50 e 3.51, e aplicando-se o conceito de energia livre de Helmholtz, dada pela expressão 3.27, obtém-se:

$$-\rho\dot{\Phi} - \rho S\dot{\theta} + \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{q_i}{\theta}\theta_{,i} \geq 0 \quad (3.52)$$

$$\Lambda = -\rho\dot{\Phi} - \rho S\dot{\theta} + \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} \quad (3.53)$$

Sendo  $\Lambda$  a dissipação interna; e  $\frac{q_i}{\theta}\theta_{,i}$  a dissipação térmica.

Com base em 3.53, a equação 3.54 representa a conservação de energia em termos da dissipação interna.

$$\rho S\dot{\theta} = \Lambda - q_{i,i} + \rho R \quad (3.54)$$

### 3.6.2. Teoria das variáveis internas

A forma mais comum de desenvolver a plasticidade se trata da adição das relações constitutivas variáveis internas concernentes à deformação plástica e/ou superfície de escoamento, de acordo com Carrazedo (2009). Dessa forma, são

aplicadas duas variáveis,  $\varepsilon_{ij}^p$  e  $\varpi_i$ , representando, respectivamente, a deformação plástica e a variável de endurecimento.

O tensor de deformações pode ser escrito em termos da soma das deformações elástica e plástica.

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p \quad (3.55)$$

Deste modo, dentro do processo termomecânico, as variáveis envolvidas correspondem à deformação elástica  $\varepsilon_{ij}^e$ , à variação de temperatura  $\theta$ , ao gradiente de temperatura  $\theta_{,i}$  e ao vetor de parâmetros que define o endurecimento plástico  $\varpi_i$ .

A energia livre de Helmholtz pode ser expressa a partir da relação 3.55, em que o gradiente de temperatura é simplificado por  $\theta$ :

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \dot{\varepsilon}_{ij}^p + \frac{\partial \Phi}{\partial \varpi_i} \dot{\varpi}_i + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \dot{\theta} \quad (3.56)$$

Substituindo-se a equação 3.56 em 3.53, resulta-se em:

$$\left( \sigma_{ij} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \right) \dot{\varepsilon}_{ij} - \rho \left( S + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) \dot{\theta} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \dot{\theta} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \dot{\varepsilon}_{ij}^p - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \varpi_i} \dot{\varpi}_i - \frac{q_i}{\theta} \theta \geq 0 \quad (3.57)$$

Nesse processo termomecânico, independente dos valores de  $\dot{\varepsilon}_{ij}$ ,  $\dot{\theta}$  e  $\dot{\theta}$ , os termos que os acompanham devem manter a igualdade. Dessa forma:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0 \rightarrow \Phi(\varepsilon_{ij}^e, \varpi_i, \theta) \quad (3.58)$$

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \quad (3.59)$$

$$S = - \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \quad (3.60)$$

Tomando as considerações dispostas em 3.58, 3.59 e 3.60 e aplicando-as na equação 3.57, obtém-se:

$$-\rho \theta \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial \theta} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \varpi_i} \dot{\varpi}_i - q_{i,i} + \rho R \quad (3.61)$$

Desenvolvendo-se a primeira parcela da equação 3.61, tem-se que:

$$\frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \quad (3.62)$$

Considerando-se os termos de deformação elástica, endurecimento plástico e temperatura, a equação 3.62 assume a forma:

$$\frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^e}{\partial \theta} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varpi_i} \frac{\partial \varpi_i}{\partial \theta} + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \right) \quad (3.63)$$

Organizando-se a expressão 3.63 em termos de taxa, obtém-se:

$$\frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial \theta} = \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta \partial \varepsilon_{ij}^e} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta \partial \varpi_i} \dot{\varpi}_i + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \dot{\theta} \right) \quad (3.64)$$

Dessa forma, a equação 3.61 pode ser reescrita da forma como se observa em 3.65:

$$-\rho \theta \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta \partial \varepsilon_{ij}^e} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta \partial \varpi_i} \dot{\varpi}_i + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \dot{\theta} \right) = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \varpi_i} \dot{\varpi}_i - q_{i,i} + \rho R \quad (3.65)$$

Durante o processo de plastificação, boa parte da energia mecânica de caráter plástico é dissipada em forma de calor, porém, uma pequena parte do trabalho plástico é dissipado por conta de interação entre as interfaces das microestruturas que constituem o material, conforme Cavalcante (2016).

Dessa forma, é necessário definir o trabalho frio como sendo a quantidade de energia armazenada devido à criação e rearranjo das imperfeições cristalinas (ROSAKIS *et al.*, 2000), dado por:

$$\bar{E} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varpi_i} - \theta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta \partial \varpi_i} \quad (3.66)$$

Baseando-se na lei de Fourier e nas definições de calor específico e trabalho frio, pode-se reescrever a equação 3.65 da seguinte forma:

$$\rho c_e \dot{\theta} = k \theta_{,ii} + \rho R + \theta \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \theta} \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p - \rho \frac{\partial \bar{E}(\varpi)}{\partial \varpi_i} \dot{\varpi}_i \quad (3.67)$$

Donde:

$$H_{elast} = \theta \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \theta} \dot{\varepsilon}_{ij}^e \quad (3.68)$$

$$H_{plast} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (3.69)$$

$$H_{TF} = \rho \frac{\partial \bar{E}(\varpi)}{\partial \varpi_i} \dot{\varpi}_i \quad (3.70)$$

Define-se, então,  $H_{elast}$  como o termo relativo à produção de calor causado pelas deformações elásticas; e  $H_{plast}$  como o termo relacionado à dissipação de

trabalho mecânico plástico em forma de calor; já  $H_{TF}$  é o termo relativo à energia retida como trabalho frio.

O conceito de trabalho frio é motivo de várias pesquisas, conforme mostrado em Cavalcante (2016), destacando-se os trabalhos de Bever *et al.* (1973), Oliferuk *et al.* (1993), Rittel (1999), Rosakis *et al.* (2000), Mroz & Oliferuk (2002), Rittel *et al.* (2012), entre outros. Como o trabalho frio é altamente dependente das deformações plásticas acumuladas, há uma grande dificuldade em caracterizar esse efeito, e portanto, de relacioná-lo de forma precisa com suas variáveis. Nesse contexto, Candija & Brnic (2004) afirmam que é conveniente utilizar um fator constante para representar a dissipação de energia. Assim:

$$\sigma_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}^p - \rho \frac{\partial \bar{E}(\varpi)}{\partial \varpi_i} \dot{\varpi}_i = \vartheta \sigma_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (3.71)$$

Em que  $\vartheta$  é o fator constante que define o trabalho mecânico plástico convertido em calor.

Normalmente adota-se valores em torno de 0,8 a 1,0 para  $\vartheta$ , o que quer dizer que há geração em torno de 80% a 100% de calor devido às deformações plásticas (SIMO & MIEHE, 1992; ZHOU *et al.*, 1996).

Substituindo-se a equação 3.71 em 3.67, obtém-se a expressão final que define a transferência de calor para problemas termoplásticos:

$$\rho c_e \dot{\theta} = k \theta_{,ii} + \rho R + \theta \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \theta} \dot{\epsilon}_{ij}^e + \vartheta \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (3.72)$$

## CAPÍTULO 4

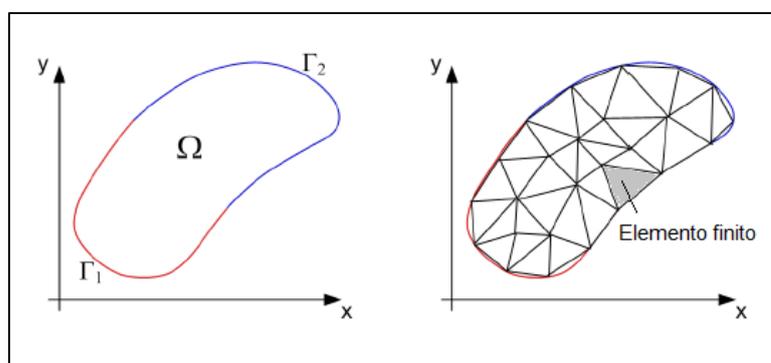
### MEF aplicado à termodinâmica

Problemas analíticos de complexa resolução cujos resultados teóricos são obtidos, normalmente, mediante grandes simplificações matemáticas puderam ser solucionados de maneira satisfatória com o emprego de métodos numéricos, dentre eles o Método dos Elementos Finitos, sobretudo pela sua versatilidade e simplicidade em manipulação.

O Método dos Elementos Finitos permite discretizar o domínio de um meio contínuo em uma quantidade finita de subdomínios denominados elementos, os quais apresentam comportamento análogo ao meio contínuo inteiro, e que são conectados entre si por nós. Conforme tal número de elementos aumenta, a convergência na obtenção dos resultados pode ser observada.

A figura 4.1 representa um sólido discretizado em elementos, em que  $\Omega$  corresponde ao domínio do sólido com contorno  $\Gamma$ , sendo  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  (condições de contorno essencial e natural) partes distintas do contorno, em que  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$  e  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ .

Figura 4.1- Discretização de um sólido genérico.



Fonte: Adaptado de Carrazedo (2009).

O problema de condução de calor pode ser aproximado por um sistema de equações algébricas aplicado ao método dos elementos finitos. Para tanto é preciso descrever procedimentos para se obter a formulação desejada. Trabalhos como os de

Bathe (1982), Cook *et al.* (1989) e Lewis *et al.* (1996) proporcionam as orientações necessárias à uma abordagem mais detalhada sobre o método dos elementos finitos, embora inúmeros outros trabalhos concernentes ao tema estejam disponíveis na literatura, uma vez que este é um método amplamente difundido.

#### 4.1. DISCRETIZAÇÃO DO PROBLEMA DE CONDUÇÃO DE CALOR

Com base nas equações 3.42 e 3.72, a equação diferencial de condução de calor, que mostra o comportamento termodinâmico de um corpo condutor de calor, pode ser escrita como segue em 4.1:

$$k\theta_{,ii} - \rho c_e \dot{\theta} + \rho R + R_m = 0 \quad (4.1)$$

Em que  $R_m$  representa a parcela de calor gerado devido às deformações mecânicas, dado por:

$$R_m = -2G \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} \alpha \theta_0 \dot{\epsilon}_{kk} + \vartheta \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (4.2)$$

Como o problema térmico é solucionado antes do problema mecânico, emprega-se a fonte de calor mecânica ao passo de tempo ( $t$ ). Para o passo de tempo atual ( $t + \Delta t$ ), a equação 4.1 pode ser reescrita como:

$$k\theta_{,ii}^{t+\Delta t} - \rho c_e \dot{\theta}^{t+\Delta t} + \rho R + R_m^t = 0 \quad (4.3)$$

A equação diferencial da condução de calor deve satisfazer as condições iniciais e as condições de contorno essencial e natural, dadas, respectivamente, por:

$$\theta = \theta_0(x_i) \quad \forall \quad x_i \in \Omega, t = 0 \quad (4.4)$$

$$\theta = \theta(x_i, t) \quad \forall \quad x_i \in \Gamma_1, t > 0 \quad (4.5)$$

$$q(x_i, t) = -k\theta_{,n} \quad \forall \quad x_i \in \Gamma_2, t > 0 \quad (4.6)$$

Sendo  $\theta(x_i, t)$  a temperatura no contorno  $\Gamma_1$ ;  $q(x_i, t)$  o fluxo de calor em  $\Gamma_2$ ;  $n$  a normal à superfície  $\Gamma_2$ ; e  $\theta_0(x_i)$  a temperatura no domínio  $\Omega$ .

De acordo com a figura 4.1, um corpo pode ser discretizado em elementos de dimensões conhecidas e finitas, cuja variável principal, a temperatura pode ser aproximada por uma série de funções:

$$\theta = \theta_i \phi_i \quad (4.7)$$

Em que  $\theta_i$  corresponde à temperatura no nó  $i$  e  $\phi_i$  representa sua respectiva função de forma.

## 4.2. MÉTODO DOS RESÍDUOS PONDERADOS

Utilizando-se do método dos Resíduos ponderados, através do método de Galerkin, é possível obter equações algébricas que aproximam a solução da equação diferencial de condução de calor 4.1. Tal equação é ponderada em seu domínio, obtendo-se assim:

$$\int_V W k \theta_{,ii} dV - \int_V W \rho c_e \dot{\theta}_i dV + \int_V W \rho R dV + \int_V W R_m^t dV = 0 \quad (4.8)$$

Em que  $W$  corresponde a funções arbitradas para ponderar a equação, dadas por:

$$W = w_j \phi_j \quad (4.9)$$

Onde  $\phi_j$  são as funções de ponderação e  $w_j$  representa as constantes arbitradas em relação aos nós  $j$  dos elementos.

Utilizando-se das equações 4.7, 4.8 e 4.9, para qualquer valor de  $w_j$  e admitindo-se  $\theta_i$  constante, obtém-se:

$$\int_V k (\theta_i \phi_i)_{,kk} \phi_j dV - \int_V \rho c_e \dot{\theta}_i \phi_i \phi_j dV + \int_V \rho R \phi_j dV + \int_V R_m^t \phi_j dV = 0 \quad (4.10)$$

Manipulando-se a equação 4.10, obtém-se uma expressão equivalente, definida por:

$$\int_V k \theta_i \phi_{i,k} \phi_{j,k} dV - \int_V k \theta_i (\phi_{i,k} \phi_j)_{,k} dV + \int_V \rho c_e \dot{\theta}_i \phi_i \phi_j dV - \int_V \rho R \phi_j dV - \int_V R_m^t \phi_j dV = 0 \quad (4.11)$$

Por meio do teorema da divergência aplicado na segunda parcela da equação 4.11, obtém-se as forças termodinâmicas aplicadas no contorno:

$$\int_V k \theta_i (\phi_{i,k} \phi_j)_{,k} dV = \int_A k \theta_i \phi_{i,n} \phi_j dA \quad (4.12)$$

Sendo  $n$  a direção normal à superfície  $A$ .

A aplicação do teorema da divergência reduz as exigências de continuidade no campo da temperatura, resultando no que se chama de representação fraca do problema de valor de contorno (CARRAZEDO, 2009).

Aplicando-se a equação 4.5 em 4.12, a equação referente às forças termodinâmicas aplicadas no contorno é reescrita da seguinte forma:

$$\int_V k \theta_i (\phi_{i,k} \phi_j)_{,k} dV = \int_A q \phi_j dA \quad (4.13)$$

Substituindo-se a equação 4.13 em 4.11, obtém-se:

$$\int_V k \theta_i \phi_{i,k} \phi_{j,k} dV + \int_V \rho c_e \dot{\theta}_i \phi_i \phi_j dV - \int_V \rho R \phi_j dV - \int_V R_m^t \phi_j dV + \int_A q \phi_j dA = 0 \quad (4.14)$$

Como forma de simplificação, aplica-se a forma matricial à equação 4.14, resultando em:

$$C_{ij} \dot{\theta}_i + K_{ij} \theta_i = F_j \quad (4.15)$$

Sendo que:

$$K_{ij} = \int_V k \phi_{i,k} \phi_{j,k} dV \quad (4.16)$$

$$C_{ij} = \int_V \rho c_e \phi_i \phi_j dV \quad (4.17)$$

$$F_j = \int_V \rho R \phi_j dV + \int_V R_m^t \phi_j dV - \int_A q \phi_j dA \quad (4.18)$$

Onde  $K_{ij}$  representa a matriz de condução de calor,  $C_{ij}$  corresponde à matriz de capacitância de calor e  $F_j$  equivale ao vetor do carregamento e que  $R_m^t$  é constante para o domínio no passo de tempo  $t$ .

### 4.3. INTEGRAÇÃO TEMPORAL DE EQUAÇÕES PARABÓLICAS

O método alfa de aproximação temporal é utilizado em resolução de sistemas parabólicos, como da equação de condução de calor transiente (BATHE,1982). A aplicação do método pode ser observada em Vila Real (1988), Lewis *et al.* (2004), Carrazedo (2009), Cavalcante (2016), Cavalcante *et al.* (2017), Silva (2017), dentre outros.

Para aproximar a temperatura, são empregadas as seguintes equações:

$$\dot{\theta}_i^{t+\Delta t-\bar{\alpha}} = \frac{(\theta_i^{t+\Delta t} - \theta_i^t)}{\Delta t} \quad (4.19)$$

$$\theta_i^{t+\Delta t-\bar{\alpha}} = (1 - \bar{\alpha}) \theta_i^t + \bar{\alpha} \theta_i^{t+\Delta t} \quad (4.20)$$

Em que  $\bar{\alpha}$  corresponde ao parâmetro da aproximação temporal, cujos valores dependem do método utilizado, conforme tabela 4.1:

Tabela 4.1 - Parâmetro de aproximação temporal

Nome do método	$\bar{\alpha}$
Crank-Nicolson	1/2
Galerkin	2/3
Euler Backward	1

Fonte: VILA REAL, 1988

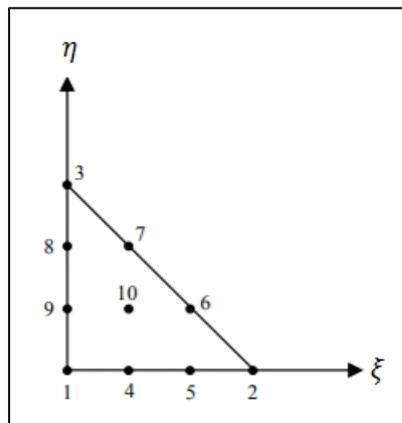
Dessa maneira, aplicando-se as equações 4.19 e 4.20 em 4.15, determina-se o sistema de equação que define a variação de temperatura nodal:

$$[C_{ij} + \Delta t \bar{\alpha} K_{ij}] \theta_i^{t+\Delta t} = [C_{ij} - \Delta t (1 - \bar{\alpha}) K_{ij}] \theta_i^t + \Delta t [\bar{\alpha} F_j^{t+\Delta t} + (1 - \bar{\alpha}) F_j^t] \quad (4.21)$$

#### 4.4. APLICAÇÃO PARA O ELEMENTO BIDIMENSIONAL

A obtenção dos valores nodais de temperatura tem início a partir da elaboração do sistema de equações considerando as definições de elemento bidimensional, conforme ilustra a Figura 4.2, na qual se observa um elemento triangular de 10 nós. Tal elemento é descrito no próximo capítulo.

Figura 4.2- Elemento finito triangular com 10 nós



Fonte: Adaptado de MARQUES, 2006

A função de aproximação  $x_i$  pode ser determinada por meio da posição nodal  $X_i^k$  através de funções de forma, considerando-se as coordenadas adimensionais,  $\phi^k(\xi, \eta)$ , referentes aos eixos horizontal e vertical respectivamente.

$$x_i = \phi^k(\xi, \eta) X_i^k \quad (4.22)$$

Em que  $i$  corresponde à direção  $x$  ou  $y$ , e  $k$  se refere ao nó do elemento.

De modo a solucionar as integrais correspondentes às equações 4.16, 4.17 e 4.18, é importante a aplicação de método numérico. Para tanto, utiliza-se a técnica de integração numérica de Hammer (BREBBIA & DOMINGUEZ, 1992), tendo como princípio básico a substituição da soma integral por uma soma discreta. Assim, considera-se que:

$$\int dV = \sum \Delta V = \sum_{i=1}^{NPH} bJ_0W_i \quad (4.23)$$

Sendo  $dV$  a variação volumétrica,  $b$  a espessura do elemento,  $W$  o peso utilizado na técnica de integração. A variável  $NPH$  corresponde ao número de pontos de Hammer, quantidade suficiente para obter resultado satisfatório.

Dessa forma, as integrais expressas em 4.16, 4.17 e 4.18 são descritas em função dos parâmetros adimensionais, conforme indicado nas equações 4.22, 4.23 e 4.24.

$$K_{ij} = b \sum_{l=1}^{NPH} k\phi_{i,k}\phi_{j,k}J_0W_l \quad (4.24)$$

$$C_{ij} = b \sum_{l=1}^{NPH} \rho c_e \phi_i \phi_j J_0 W_l \quad (4.25)$$

$$F_j = b \sum_{l=1}^{NPH} (\rho R + R_m^t) \phi_j J_0 W_l - \sum_{l=1}^{NPH} q \phi_j J_0 W_l \quad (4.26)$$

$J_0$  é definido como a determinante da matriz do Jacobiano de transformação de coordenadas globais para adimensionais, representado por:

$$J_0 = \det J = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

A derivada da função de forma em relação à posição é dada como:

$$\phi_{i,k} = \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_k} + \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_k} \quad (4.28)$$

$$\phi_{j,k} = \frac{\partial \phi_j}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_k} + \frac{\partial \phi_j}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_k}$$

Em que  $x_k$  corresponde à variável que define a posição. No caso bidimensional, assume os valores de  $x$  e  $y$ .

Com isso, pode-se determinar que:

$$K_{ij} = b \sum_{l=1}^{NPH} k[\phi_{i,x}\phi_{j,x} + \phi_{i,y}\phi_{j,y}]J_0W_l \quad (4.29)$$

Sendo que:

$$\begin{aligned} \phi_{i,x} &= \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \phi_{j,k} &= \frac{\partial \phi_j}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \phi_j}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \phi_{i,y} &= \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \phi_{j,y} &= \frac{\partial \phi_j}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \phi_j}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{aligned} \quad (4.30)$$

Os argumentos presentes na equação 4.30, os quais representam a derivada parcial das coordenadas naturais  $\xi$  e  $\eta$  em relação à  $x$  e  $y$ , são obtidos, conforme Assan (1999), através da inversa da matriz do jacobiano. Portanto:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = invJ = \frac{1}{J_0} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial x}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

## CAPÍTULO 5

### **Método dos elementos finitos posicional**

O Método dos Elementos Finitos Posicional, o MEF Posicional, difere do Método dos Elementos Finitos convencional pelo fato de apresentar formulação baseada nas posições nodais e não nos deslocamentos, como proposto por Coda (2003) através da análise de pórticos planos, por meio da cinemática de Euler-Bernoulli. A partir de então, diversos trabalhos foram realizados utilizando-se da formulação posicional.

Greco (2004) analisou problemas de impacto bidirecional em estruturas reticuladas planas, considerando o efeito não linear. Marques (2006) dá continuidade a esse trabalho estudando o comportamento não linear de sólidos bidimensionais associados a problemas de impacto.

Maciel (2008) utilizou o MEFP para implementar problemas de pórtico plano com cinemática de Reissner e problemas tridimensionais, abordando a não linearidade geométrica em problemas estáticos e dinâmicos.

Problemas termomecânicos via MEFP são abordados em Carrazedo (2009) no qual se analisa o impacto entre estruturas com comportamento termoelástico e termoplástico, assim como em Carrazedo & Coda (2010).

Cavalcante (2016) observou o comportamento de treliças submetidas às ações térmicas e mecânicas, levando em consideração os efeitos das não linearidades física e geométrica. Silva (2017) avaliou a influência dos efeitos térmicos no comportamento dinâmico de pórticos planos não lineares com cinemática de Reissner.

Inúmeros outros trabalhos também empregaram o método dos elementos finitos posicional, dentre eles, Coda & Greco (2004), Coda & Paccola (2008), Minski (2008), Morini (2009), Ferreira (2009), Rigobello *et al.* (2011), Sanches (2011), Reis (2012), Oliveira (2012), Lacerda (2014) e Sampaio (2014) como exemplos.

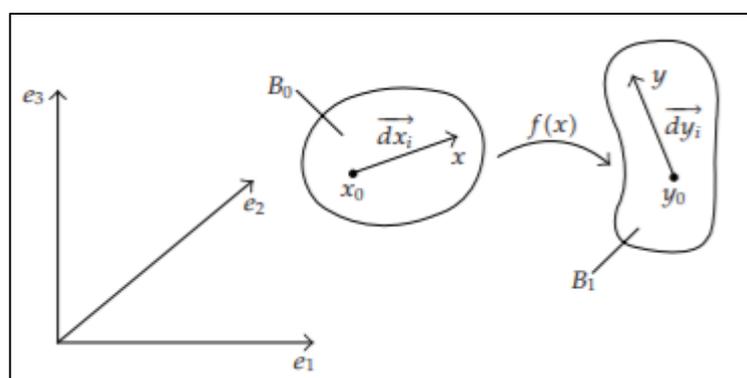
## 5.1. ELEMENTO FINITO BIDIMENSIONAL

### 5.1.1. Mapeamento da geometria

Para ser possível equacionar o equilíbrio de forças na posição atual, é preciso descrever o movimento ocorrido entre as configurações inicial e atual. Para tanto é necessário mapear a geometria do corpo e a partir disto, determinar as medidas de deformação empregadas na formulação (MACIEL, 2008).

A função mudança de configuração pode ser definida considerando-se um corpo partindo de sua configuração inicial, que, a partir de alterações na sua posição, atinge a configuração final, representadas por  $B_0$  e  $B_1$ , respectivamente, na figura 5.1.

Figura 5.1 - Mudança de configuração de um corpo



Fonte: CODA et al, 2008

Marques (2006) define a função mudança de configuração como uma função matemática cujo gradiente irá indicar a mudança de direção e comprimento do vetor infinitesimal  $dx$  no ponto  $x_0$  para  $dy$  em uma nova posição, no ponto  $y_0$ , na configuração genérica, de modo que:

$$dy = A dx \quad (5.1)$$

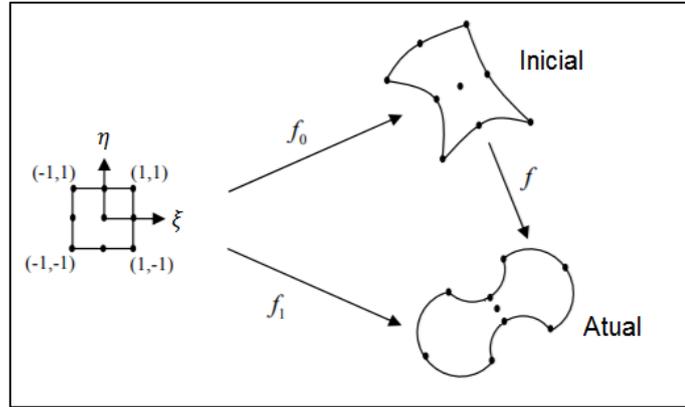
Tal que  $A$  é um tensor que representa a função mudança de configuração do sistema inicial para o final, dado pela equação 5.2.

$$A = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad (5.2)$$

Admitindo que o espaço adimensional é responsável pelo mapeamento numérico entre a configuração inicial e a configuração atual (figura 5.2), a função

mudança de configuração pode ser parametrizada por valores nodais e funções de forma. Dessa forma, pode-se fazer dois mapeamentos referentes às configurações inicial,  $f_0(\xi, \eta)$  e final  $f_1(\xi, \eta)$ .

Figura 5.2 - Mapeamento com base nas coordenadas naturais



Fonte: Adaptado de MARQUES, 2006

Dessa forma, o tensor função mudança de configuração é reescrito como:

$$A_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{01}}{\partial \xi} & \frac{\partial f_{02}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f_{01}}{\partial \eta} & \frac{\partial f_{02}}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{11}}{\partial \xi} & \frac{\partial f_{12}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f_{11}}{\partial \eta} & \frac{\partial f_{12}}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Sendo que em  $f_{ij}$ ,  $i$  representa o mapeamento 0 ou 1 (inicial ou final, respectivamente) e  $j$  corresponde a direção  $x$  ou  $y$ .

A função mudança de configuração é dada por:

$$f_{ij} = \phi^k(\xi, \eta) X_{ij}^k \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial f_{ij}}{\partial \xi} = \frac{\partial \phi^k}{\partial \xi} X_{ij}^k \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial f_{ij}}{\partial \eta} = \frac{\partial \phi^k}{\partial \eta} X_{ij}^k \quad (5.7)$$

Em que  $\phi$  representa as funções de forma do elemento finito a ser adotado correspondentes ao nó  $k$ .

Dessa forma, o gradiente da mudança de configuração total é descrito como:

$$A = A_1(\xi, \eta)A_0^{-1}(\xi, \eta) \quad (5.8)$$

Na implementação, utiliza-se elemento finito triangular com aproximação cúbica (MARQUES, 2006), denominado QST (Quadratic Strain Triangle) (ASSAN, 1999), conforme indicado na Figura 4.2.

Através da determinação das derivadas das funções de forma, é possível determinar os gradientes da mudança de configuração inicial e final, e posteriormente, o gradiente da mudança de configuração total.

### 5.1.2. Medidas de deformação

Dentre as mais diversas forma de se medir deformação, medida de deformação de engenharia pode ser utilizada nesta pesquisa, uma vez que possui aparente significado físico, conforme Pascon (2008). Dessa forma, com base nos gradientes de mudança de configuração, é possível calcular o alongamento relativo entre uma fibra qualquer na configuração inicial, que, após mudança de configuração, resultou numa direção e sentido na configuração atual, podendo ser definido a partir da equação 5.1:

$$dy = Adx \quad (5.9)$$

$$|dy|v = A|dx|u \quad (5.10)$$

$$|dy|v^t|dy|v = |dx|u^t A^t Au|dx| \quad (5.11)$$

$$|dy|^2 = u^t A^t Au|dx|^2 \quad (5.12)$$

$$\frac{|dy|}{|dx|} = \{u^t A^t Au\}^{\frac{1}{2}} = \lambda(u) \quad (5.13)$$

Com base na equação 5.13, pode-se definir o alongamento relativo como a razão entre o comprimento final de uma fibra e seu comprimento inicial.

Os parâmetros  $u$  e  $v$  são vetores unitários no sentido das fibras na configuração inicial e final, respectivamente.

A deformação de engenharia, com relação à configuração inicial, é definida como:

$$\varepsilon(u, \xi) = \frac{|dy| - |dx|}{|dx|} = \lambda(u, \xi) - 1 \quad (5.14)$$

A deformação  $\varepsilon_x$  é obtida quando  $u = \{1 \ 0\}$ , enquanto que para a deformação  $\varepsilon_y$ , tem-se  $u = \{0 \ 1\}$ .

A distorção  $\gamma_{xy}$  é determinada a partir do ângulo formado por dois vetores unitários de direções quaisquer e não coincidentes,  $u$  e  $u'$ , e suas respectivas fibras infinitesimais, posicionados na configuração inicial.

$$dx = u|dx| \quad (5.15)$$

$$dx' = u'|dx'| \quad (5.16)$$

$$\cos\theta = u \cdot u' \quad (5.17)$$

De forma análoga, admitindo-se que na configuração final as direções  $v$  e  $v'$  são associadas às fibras correspondentes à configuração inicial  $u$  e  $u'$ , o ângulo é dado por:

$$\cos\theta = v \cdot v' \quad (5.18)$$

Com base na equação 5.10, pode-se relacionar  $u$  e  $v$ , como segue:

$$v = Au \frac{|dx|}{|dy|} = \frac{Au}{\lambda(u)} \quad (5.19)$$

E, por consequência:

$$v' = \frac{Au'}{\lambda(u')} \quad (5.20)$$

Aplicando-se as equações 5.19 e 5.20 e, 5.18, obtém-se:

$$\cos\theta = \frac{u \cdot (A^t Au')}{\lambda(u)\lambda(u')} \quad (5.21)$$

O ângulo de distorção é dado pela diferença  $\theta - \theta$ , na configuração de referência. Admitindo-se que  $u$  e  $u'$  são ortogonais, a distorção de engenharia é calculada como:

$$\gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} - \arccos \left[ \frac{u \cdot (A^t Au')}{\lambda(u)\lambda(u')} \right] \quad (5.22)$$

Sendo:

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} \quad (5.23)$$

## 5.2. FORMULAÇÃO ESTÁTICA

A formulação do MEF posicional para a solução de problemas com não linearidade geométrica é classificada como lagrangiana total, uma vez que as mudanças de configuração da estrutura são medidas a partir de um referencial fixo no espaço (MARQUES, 2006). Formulações definidas desta forma pode ser observadas em Mondkar & Powell (1977), Surana (1983) e Schulz & Filippou (2001).

### 5.2.1. Energia potencial total

O funcional de energia para o sistema estático ( $\Pi$ ) é dado por duas parcelas, uma referente à energia de deformação do sistema ( $U_e$ ), e outra correspondente à energia potencial das forças externas ( $P$ ):

$$\Pi = U_e - P \quad (5.24)$$

A energia de deformação elástica corresponde à integral, no volume inicial ( $V_0$ ), da energia de deformação específica elástica ( $u_e$ ), sendo expressa por:

$$U_e = \int_{V_0} u_e dV_0 \quad (5.25)$$

Tem-se que, para um sistema de forças conservativas, o potencial das forças externas é dado por:

$$P = F_i X_i \quad (5.26)$$

Onde  $F_i$  e  $X_i$  correspondem às forças externas aplicadas e à posição das respectivas forças, respectivamente. Nesse estudo, serão consideradas cargas concentradas, apenas.

Dessa forma, aplicando-se 5.25 e 5.26 e, 5.24, obtém-se:

$$\Pi = \int_{V_0} u_e dV_0 - F_i X_i \quad (5.27)$$

A energia de deformação específica lagrangiana é calculada considerando-se qualquer par conjugado de tensão e deformação. Dessa forma, a energia de deformação é determinada aplicando-se uma lei constitutiva elástica-linear, sobre a medida de deformação, como observado na equação 5.28, em que  $\sigma_{ij}$  e  $\varepsilon_{ij}$  representam os pseudo-tensores de tensão e deformação elástica, respectivamente:

$$u_e = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (5.28)$$

### 5.2.2. Teorema da mínima energia potencial total

A condição de equilíbrio do corpo pode ser observada por meio da minimização do funcional de energia potencial total. Com base no Método dos Elementos Finitos Posicional, a minimização do funcional de energia deve ocorrer mediante parâmetros de posições dos pontos, pelos quais pode-se aproximar as condições do contínuo, conforme equação 5.29:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial X_i} = \int_{V_0} \frac{\partial u_e}{\partial X_i} dV_0 - F_i = 0 \quad (5.29)$$

Pode-se reescrever a expressão 5.28 em função do vetor de forças internas ( $\partial U_e / \partial X_i$ ) e do vetor de forças externas ( $F_i^{ext}$ ), obtendo-se, então a equação de equilíbrio para o problema estático:

$$\frac{\partial U_e}{\partial X_i} - F_i^{ext} = 0 \quad (5.30)$$

### 5.3. FORMULAÇÃO DINÂMICA

#### 5.3.1. Energia potencial total

O funcional de energia potencial do sistema é determinado por quatro tipos de energia:

$$\Pi = U_e + K_c + K_a - P \quad (5.31)$$

Em que  $U_e$  é o potencial de energia de deformação elástica,  $P$  é o potencial de energia das forças externas aplicadas,  $K_c$  é a energia cinética do corpo e  $K_a$  é a perda de energia devido ao amortecimento.

A energia cinética é obtida por:

$$K_c = \frac{1}{2} \int_{V_0} \rho_0 \dot{x}_i \dot{x}_i dV_0 \quad (5.32)$$

Sendo  $\rho_0$  a densidade do corpo no referencial lagrangiano e  $\dot{x}_i$  a velocidade vetorial do ponto material dada pelo diferencial do vetor de posição do ponto ( $x$ ) em relação ao tempo, de acordo com a equação 5.33.

$$\dot{x}_i = \frac{d(x)}{dt} \quad (5.33)$$

A parcela de energia concernente à perda por amortecimento é descrita, de forma diferenciada, em relação às posições nodais como:

$$\frac{\partial K_a}{\partial x_i} = \int_{V_0} \frac{\partial q}{\partial x_i} dV_0 = \int_{V_0} c_m \rho_0 \dot{x}_i dV_0 \quad (5.34)$$

Na qual  $q$  representa o funcional de energia específica dissipativa e  $c_m$  é a constante de amortecimento proporcional.

Substituindo-se as equações 5.25, 5.26 e 5.32 em 5.31, obtém-se:

$$\Pi = \int_{V_0} u_e dV_0 + \int_{V_0} \rho_0 \frac{\dot{x}_i \dot{x}_i}{2} dV_0 - F_j x_j + K_a \quad (5.35)$$

Dessa maneira, para cada instante de tempo (t), a posição de equilíbrio dinâmico pode ser definida pela minimização da energia mecânica total, por meio da aplicação do teorema da mínima energia potencial total:

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial X_i} \right|_t = \int_{V_0} \frac{\partial u_e}{\partial X_i} dV_0 + \int_{V_0} \frac{\partial}{\partial X_i} \left( \rho_0 \frac{\dot{x}_k \dot{x}_k}{2} \right) dV_0 - F_i \int_{V_0} c_m \rho_0 \dot{x}_i dV_0 = 0 \quad (5.36)$$

Um corpo discretizado por elementos finitos pode ter suas variáveis aproximadas por parâmetros nodais e funções de forma, ou seja:

$$\begin{aligned} x_i &= \phi_j X_i^j \\ \dot{x}_i &= \phi_j \dot{X}_i^j \\ \ddot{x}_i &= \phi_j \ddot{X}_i^j \end{aligned} \quad (5.37)$$

Sendo  $X_i$ ,  $\dot{X}_i$  e  $\ddot{X}_i$  os valores nodais para posição, velocidade e aceleração respectivamente e  $\phi_j$  as funções de forma.

Dessa forma, para o passo atual ( $t+\Delta t$ ), a equação de equilíbrio dinâmica pode ser reescrita como:

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial X} \right|_{t+\Delta t} = \left. \frac{\partial U_e}{\partial x_i} \right|_{t+\Delta t} - F_{t+\Delta t} + M \ddot{X}_{t+\Delta t} + C \dot{X}_{t+\Delta t} = 0 \quad (5.38)$$

Em que  $M$  corresponde a matriz de massa e  $C$ , a matriz de amortecimento.

Na Eq. (5.38), a parcela  $M \ddot{X}_{t+\Delta t}$  define as forças inerciais, e as forças de amortecimento são representadas pela parcela  $C \dot{X}_{t+\Delta t}$ .

### 5.3.2. Matriz de massa e amortecimento

As forças inerciais empregam caráter dinâmico na estrutura, cuja definição, como vista anteriormente, se remete ao produto da matriz de massa com a aceleração. A matriz de massa é um mecanismo utilizado para transferir a massa de cada elemento para seus respectivos nós (CAVALCANTE, 2016).

Conforme Marques (2006), a matriz de massa é definida como:

$$M_{ij} = \int_{V_0} \rho_0 \phi_i \phi_j dV_0 \quad (5.39)$$

O amortecimento é uma forma de dissipação de energia que conduz uma estrutura do estado vibratório ao estado de repouso. Dessa forma, a consideração do amortecimento na formulação dinâmica visa buscar a diminuição dos picos dos deslocamentos da estrutura. Nesse contexto, o processo de amortecimento transforma a energia cinética de vibração numa outra forma de energia, caracterizando a perda de energia do sistema.

No entanto, há grande complexidade na determinação da energia dissipada em sistemas amortecidos, visto que não se referem a um único fenômeno físico. Como forma de contornar o problema, admite-se que a matriz de amortecimento é proporcional à massa, conforme pode ser verificado na expressão 5.40:

$$C = 2c_m M \quad (5.40)$$

#### 5.4. ENERGIA ESPECÍFICA DE DEFORMAÇÃO

A energia específica de deformação empregada para o elemento finito bidimensional é determinada como:

$$u_e = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^e \quad (5.51)$$

Em que, conforme abordado no capítulo 2, a relação constitutiva pode ser expressa como:

$$\varepsilon_{ij}^e = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p - \varepsilon_{ij}^\theta \quad (5.52)$$

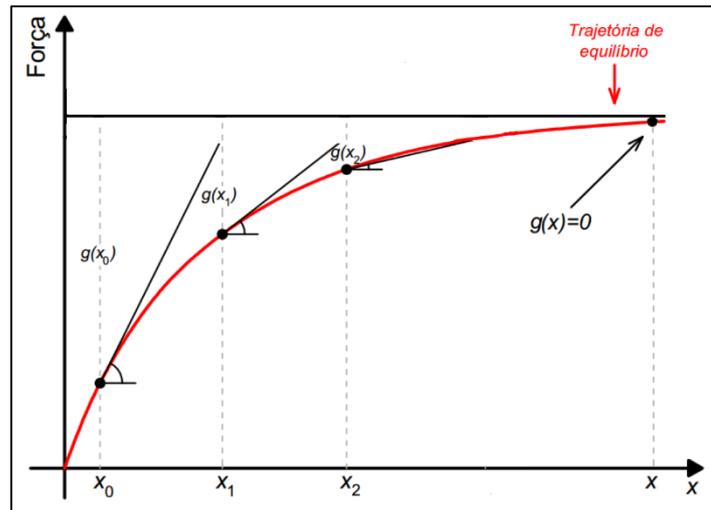
Observa-se, na equação 5.52, o termo  $\varepsilon_{ij}^\theta$  que corresponde ao acoplamento térmico na determinação da componente mecânica de deformação elástica.

Além disso, tensor de tensões está associado ao operador tangente elastoplástico  $C_{ep}$ , amplamente discutido no capítulo 2.

#### 5.5. MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Por apresentar dificuldade na obtenção das soluções precisas para sistemas não lineares geométricos, uma estratégia numérica é imprescindível à resolução do problema. Para tal, utiliza-se do método iterativo de Newton-Raphson, cujo procedimento apresenta aproximação da trajetória de equilíbrio da estrutura por tangentes até que se atinja o critério de convergência, conforme figura 5.4 (CAVALCANTE, 2016).

Figura 5.4 - Resolução da equação de equilíbrio pelo método de Newton-Raphson.



Fonte: Adaptado de CALVALCANTE, 2016

Como a equação que rege o equilíbrio da estrutura é de caráter não linear e é satisfeita na sua configuração de equilíbrio (MARQUES, 2006), as equações 5.30 e 5.38 são expandidas em série de Taylor truncada em termos lineares, conforme equação 5.41 (MORINI, 2009):

$$g(X) = 0 \cong g(X_0) + \nabla g(X_0)\Delta X \quad (5.41)$$

Sendo  $X$  o vetor posição que se deseja determinar e  $X_0$  o vetor posição de tentativa, normalmente definido no passo anterior.

O parâmetro  $g(X_0)$  corresponde ao vetor de forças residuais do sistema, ao passo que  $\nabla g(X_0)$  se refere à matriz Hessiana.

O processo iterativo é realizado até que as forças residuais sejam suficientemente pequenas. Para isso, é analisada variação de posição  $\Delta X$ , obtida a partir da equação 5.42, sendo determinada da relação inversa da equação 5.41.

$$\Delta X = -[\nabla g(X_0)]^{-1}g(X_0) \quad (5.42)$$

O vetor de forças internas  $\frac{\partial U_e}{\partial X_i}$ , o qual compõe o vetor de forças residuais, é determinado por meio da integral volumétrica da derivada da energia de deformação específica, conforme equação 5.43:

$$\frac{\partial U_e}{\partial X_i} = \int_{V_0} \frac{\partial u_e}{\partial X_i} dV_0 \quad (5.43)$$

A energia de deformação específica pode ser representada em função das deformações, e então, através da regra da cadeia, ela pode ser descrita como:

$$\frac{\partial u_e}{\partial X_i} = \frac{\partial u_e}{\partial \varepsilon_x} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial X_i} + \frac{\partial u_e}{\partial \varepsilon_y} \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial X_i} + \frac{\partial u_e}{\partial \gamma_{xy}} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial X_i} \quad (5.44)$$

Sabendo que a derivada parcial da energia de deformação em relação à deformação é o próprio tensor de tensões.

Aplicando-se a derivada na equação 5.43 em relação às posições nodais, pode-se obter um termo em função da integral volumétrica da derivada segunda da energia de deformação específica, conforme 5.45:

$$\frac{\partial^2 U_e}{\partial X_i \partial X_j} = \int_{V_0} \frac{\partial^2 u_e}{\partial X_i \partial X_j} dV_0 \quad (5.45)$$

Tal termo corresponde a uma parcela que determina a matriz Hessiana do sistema.

Analogamente à primeira derivada, obtém-se a segunda derivada da energia de deformação como sendo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_e}{\partial X_i \partial X_j} = & \left( \frac{\partial^2 u_e}{\partial^2 \varepsilon_x} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial X_j} + \frac{\partial^2 u_e}{\partial \varepsilon_x \partial \varepsilon_y} \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial X_j} + \frac{\partial^2 u_e}{\partial \varepsilon_x \partial \gamma_{xy}} \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial X_j} \right) \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial X_i} + \frac{\partial u_e}{\partial \varepsilon_x} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial X_i \partial X_j} \\ & + \left( \frac{\partial^2 u_e}{\partial \varepsilon_y \partial \varepsilon_x} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial X_j} + \frac{\partial^2 u_e}{\partial^2 \varepsilon_y} \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial X_j} + \frac{\partial^2 u_e}{\partial \varepsilon_y \partial \gamma_{xy}} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial X_j} \right) \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial X_i} + \frac{\partial u_e}{\partial \varepsilon_y} \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial X_i \partial X_j} \\ & + \left( \frac{\partial^2 u_e}{\partial \gamma_{xy} \partial \varepsilon_x} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial X_j} + \frac{\partial^2 u_e}{\partial \gamma_{xy} \partial \varepsilon_y} \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial X_j} + \frac{\partial^2 u_e}{\partial^2 \gamma_{xy}} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial X_j} \right) \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial X_i} \\ & + \frac{\partial u_e}{\partial \gamma_{xy}} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial X_i \partial X_j} \end{aligned} \quad (5.46)$$

Do mesmo modo, a segunda derivada parcial da energia de deformação em relação à deformação resulta no tensor tangente elastoplástico, determinado no capítulo 02.

Como forma de solucionar as integrais correspondentes às equações 5.43 e 5.45, utiliza-se da técnica de integração numérica de Hammer, conforme abordado no capítulo anterior. Neste contexto, tem-se que:

$$\frac{\partial U_e}{\partial X_i} = b \sum_{l=1}^{NPH} \frac{\partial u_e}{\partial X_i} J_0 W_l \quad (5.47)$$

$$\frac{\partial^2 U_e}{\partial X_i \partial X_j} = b \sum_{l=1}^{NPH} \frac{\partial^2 u_e}{\partial X_i \partial X_j} J_0 W_l \quad (5.48)$$

Em que  $b$  é a espessura do elemento,  $W$  o peso utilizado na técnica de integração. A variável  $NPH$  corresponde ao número de pontos de Hammer, quantidade suficiente para obter resultado satisfatório.  $J_0$  é definido como a determinante da matriz do Jacobiano de transformação de coordenadas globais para adimensionais.

Durante processo iterativo, deve-se realizar as devidas modificações nas posições:

$$X = X_0 + \Delta X \quad (5.49)$$

O critério de convergência é satisfeito quando o valor de  $\Delta X$  é suficientemente pequeno, de modo a garantir:

$$\frac{\Delta X}{X_0} \leq tol \quad (5.50)$$

## 5.6. MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO TEMPORAL

A solução do problema dinâmico faz uso de integração temporal, uma vez que as equações de equilíbrio dinâmico são representadas por derivadas parciais no tempo e espaço. Nesse contexto, busca-se aplicar metodologias consagradas no que se refere à integração temporal, nas quais expressões finitas e aproximadas são implementadas a partir do conhecimento dos deslocamentos e suas derivadas em um determinado instante  $t$  da história da estrutura, e dessa forma, estimar valores subsequentes, no sentido de atender ao equilíbrio em instantes futuros, distanciados de um passo de tempo  $\Delta t$  (BOTTURA, 1997).

O procedimentos de integração temporal, quando relativo às variáveis subordinadas ao processo, podem ser classificados em dois grupos, os algoritmos explícitos e implícitos.

Soluções que são alcançadas através da utilização de variáveis obtidas em passos de tempo unicamente anteriores ao atual fazem parte do grupo de algoritmos denominados explícitos, isto é:

$$X_{t+\Delta t} = f(X_t, \dot{X}_t, \ddot{X}_t, X_{t-\Delta t}, \dot{X}_{t-\Delta t}, \ddot{X}_{t-\Delta t}, \dots) \quad (5.53)$$

Os algoritmos implícitos utilizam-se de variáveis não somente associadas ao passado, mas também relativas ao passo atual  $t + \Delta t$ , assim sendo expressos:

$$X_{t+\Delta t} = f(\dot{X}_{t+\Delta t}, \ddot{X}_{t+\Delta t}, X_t, \dot{X}_t, \ddot{X}_t, \dots) \quad (5.54)$$

Os algoritmos de integração temporal podem ser classificados também quanto à estabilidade. De forma geral, podem ser classificados como estáveis, os quais não apresentam convergência nos resultados, e instáveis, quando se verifica a crescente propagação de erros ao longo do tempo.

Os métodos estáveis podem ser classificados como condicional ou incondicional. Conforme Silveira (2001), todo algoritmo explícito é condicionalmente estável. A condição da estabilidade do algoritmo apresenta uma restrição ao valor do incremento de tempo máximo adotado em cada análise (VIEIRA, 2004). Nesse sentido, para que a estabilidade do algoritmo seja atendida, há a necessidade de rigorosas restrições quanto à dimensão do incremento de tempo, o que pode alavancar elevado custo computacional na determinação da resposta dos problemas relativamente simples, quando comparado ao desempenho obtido por algoritmos implícitos.

Conforme Silva (2017), isto ocorre porque o valor crítico para  $\Delta t$  é inversamente proporcional à máxima frequência natural do sistema, independentemente do tipo de solicitação a qual o sólido está submetido. Por conseguinte, Vieira (2004) destaca que em problemas de dinâmica estrutural, cujas frequências de excitação são da ordem de grandeza das frequências naturais mais baixas da estrutura, os métodos explícitos tornam-se pouco eficientes uma vez que o valor do incremento de tempo crítico é bem menor que o necessário para uma integração razoavelmente precisa dos modos solicitados.

Outro ponto importante a se considerar quando se tratando de algoritmos explícitos se refere à forma pela qual o arranjo estrutural foi discretizado, podendo haver discrepância quanto ao tamanho dos elementos, ou até mesmo consideração de diferentes materiais num mesmo corpo, elevando, assim, o custo computacional de forma considerável, visto que o intervalo de tempo é considerado igual para toda a malha (SILVEIRA, 2001). Tal observação também pode ser vista no estudo de Dokainish & Subbaraj (1989).

Em se tratando de métodos implícitos, normalmente são considerados incondicionalmente estáveis, implicando na falta de restrição quanto ao tamanho do incremento de tempo, em que o intervalo de tempo é determinado apenas com relação à precisão da resposta que se deseja obter, mas não pela estabilidade do algoritmo (CAVALCANTE, 2016). Porém, tradicionalmente, o uso de algoritmos implícitos demanda mais memória para armazenamento de dados durante a análise, visto que é necessário a montagem das matrizes globais do sistema estrutural. Desta forma, a implementação de algoritmos implícitos é, de certa forma, menos simples quando comparado aos explícitos (SILVA, 2017).

De maneira geral, procedimentos explícitos são mais adequados para resolução de problemas de propagação de onda, enquanto que os esquemas implícitos são mais eficazes para problemas inerciais (estáticos e de dinâmica estrutural), de acordo com Cook *et al.* (1989).

Isso posto, a escolha do algoritmo de integração no tempo ideal para o problema estudado, tem sua dificuldade relacionada à conciliação da robustez, precisão e estabilidade, conforme Tamma *et al.* (2000) e Cavalcante (2016). A robustez do algoritmo está associada à sua capacidade de gerar soluções que minimizam o erro numérico inerente ao processo de integração das equações.

Nesta seção, seis algoritmos de integração temporal, os quais, Newmark, Houbolt, Wilson- $\theta$ , Souza & Moura (1997), Diferenças Centrais e Chung & Lee (1994), serão descritos de forma a adaptar-se à formulação posicional, sendo cada algoritmo caracterizado pela forma específica de atualização das equações de posição, velocidade e aceleração, o que implica em mudanças na equação de equilíbrio dinâmico.

As formulações apresentadas a seguir também podem ser vistas em Cavalcante (2016) assim como em Silva (2017). Dentre outros trabalhos com uma abordagem mais profunda sobre algoritmos de integração temporal pode-se citar Bathe (1996), Tamma *et al.* (2000), Cook (2001), Silveira (2001), Martins (2004), Vieira (2004) e Loureiro (2007).

### 5.6.1. Método implícito de Newmark

O método de Newmark é um dos mais difundidos da literatura, e tem ampla aplicação em se tratando de problemas estruturais. O método foi divulgado em 1959 por Newmark, no qual apresentou o método de passo simples como indicado nas expressões 5.55 e 5.56, representando, respectivamente, a posição e velocidade aproximadas.

$$X_{t+\Delta t} = X_t + \Delta t \dot{X}_t + \Delta t^2 \left[ \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{X}_t + \beta \ddot{X}_{t+\Delta t} \right] \quad (5.55)$$

$$\dot{X}_{t+\Delta t} = \dot{X}_{t+\Delta t} + \Delta t(1 - \gamma) \ddot{X}_{t+\Delta t} + \gamma \Delta t \ddot{X}_{t+\Delta t} \quad (5.56)$$

Os parâmetros  $\beta$  e  $\gamma$  são os coeficientes de Newmark e determinam as propriedades de estabilidade, precisão e amortecimento dos métodos (COOK *et al.*, 1989). Tais parâmetros, segundo Bottura (1997), ponderam o quão implícito o método se apresenta, posto que considerados nulos o algoritmo assume processo explícito.

Segundo Hughes (2000), o método de Newmark é incondicionalmente estável para  $1/2 \leq \gamma \leq 2\beta$  e condicionalmente estável para  $\gamma \leq 1/2$  e  $\beta \leq \gamma/2$ . Na família de Newmark, algumas particularizações podem ser feitas considerando-se diferentes valores para  $\beta$  e  $\gamma$ , conforme apresentadas na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 - Métodos da família de Newmark

Método	Tipo	$\beta$	$\gamma$	Condição de estabilidade	Ordem de precisão
Aceleração Média (Regra Trapezoidal)	Implícito	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	Incondicional	2
Aceleração Linear	Implícito	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	Condicional	2
Fox-Goodwin	Implícito	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$	Condicional	2
Diferença Central	Explícito	0	$\frac{1}{2}$	Condicional	2

Fonte: Vieira (2004)

Manipulando-se a equação 5.55, obtém-se a aceleração no passo de tempo atual:

$$\ddot{X}_{t+\Delta t} = \frac{X_{t+\Delta t} - X_t}{\beta \Delta t^2} - \frac{\dot{X}_t}{\beta \Delta t} - \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \ddot{X}_t \quad (5.57)$$

Aplicando-se as expressões 5.56 e 5.57 em 5.38:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial X} \Big|_{t+\Delta t} &= \frac{\partial U_e}{\partial X} \Big|_{t+\Delta t} - F_{t+\Delta t} + \frac{M}{\beta \Delta t^2} X_{t+\Delta t} - M Q_t + C R_t + \frac{\gamma C}{\beta \Delta t} X_{t+\Delta t} \\ &\quad - \gamma \Delta t C Q_t = 0 \end{aligned} \quad (5.58)$$

A contribuição dinâmica das variáveis no passo anterior ( $t$ ), é representada por  $Q_t$  e  $R_t$ , que são expressas, respectivamente em 5.59 e 5.60.

$$Q_t = \frac{X_t}{\beta \Delta t^2} + \frac{\dot{X}_t}{\beta \Delta t} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \ddot{X}_t \quad (5.59)$$

$$R_t = \dot{X}_t + \Delta t(1 - \gamma) \ddot{X}_t \quad (5.60)$$

A Matriz Hessiana ( $\nabla g(X_0)$ ) é determinada a partir da derivada de segunda ordem do funcional de energia potencial total em relação às posições nodais (SILVA, 2017).

$$\nabla g(X_0) = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial X^2} \quad (5.61)$$

Derivando-se a equação 5.58 em relação às posições nodais para o passo atual ( $t + \Delta t$ ), é obtida a matriz hessiana para o problema dinâmico, expressa por:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial X^2} \Big|_{t+\Delta t} = \nabla g(X_0) = \frac{\partial^2 U_e}{\partial X^2} \Big|_{t+\Delta t} + \frac{M}{\beta \Delta t^2} + \frac{\gamma C}{\beta \Delta t} \quad (5.62)$$

### 5.6.2. Método Implícito de Houbolt

Houbolt (1950) apresentou um método de integração temporal cujas variáveis de velocidade e aceleração são aproximadas por expressões em diferenças finitas descendentes, constituindo, desta forma, um método multipasso (BOTTURA, 1997). Trata-se de um método incondicionalmente estável obtido a partir da derivação de

segunda ordem de polinômios cúbicos de lagrange em relação ao tempo (BATHE, 1996).

Desta forma, a aceleração e a velocidade podem ser aproximadas de acordo com as expressões (5.63) e (5.64), respectivamente.

$$\ddot{X}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\Delta t^2} (2X_{t+\Delta t} - 5X_t + 4X_{t-\Delta t} - X_{t-2\Delta t}) \quad (5.63)$$

$$\dot{X}_{t+\Delta t} = \frac{1}{6\Delta t} (11X_{t+\Delta t} - 18X_t + 9X_{t-\Delta t} - 2X_{t-2\Delta t}) \quad (5.64)$$

Aplicando-se as equações 5.63 e 5.64 na expressão que define o equilíbrio dinâmico do sistema 5.38 para o passo atual ( $t + \Delta t$ ), obtém-se:

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial X} \right|_{t+\Delta t} = \left. \frac{\partial U_e}{\partial X} \right|_{t+\Delta t} - F_{t+\Delta t} + \frac{2M}{\Delta t^2} X_{t+\Delta t} + MQ_t + \frac{11C}{6\Delta t} X_{t+\Delta t} + CR_t = 0 \quad (5.65)$$

Sendo que:

$$Q_t = \frac{1}{\Delta t^2} (-5X_t + 4X_{t-\Delta t} - X_{t-2\Delta t}) \quad (5.66)$$

$$R_t = \frac{1}{6\Delta t} (-18X_t + 9X_{t-\Delta t} - 2X_{t-2\Delta t}) \quad (5.67)$$

A matriz Hessiana para o problema dinâmico é obtida tomando-se a derivada da equação 5.65 em relação às posições nodais para o passo atual, conforme segue:

$$\left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial X^2} \right|_{t+\Delta t} = \nabla g(X_0) = \left. \frac{\partial^2 U_e}{\partial X^2} \right|_{t+\Delta t} + \frac{2M}{\Delta t^2} + \frac{11C}{6\Delta t} \quad (5.68)$$

### 5.6.3. Método Implícito de Wilson- $\theta$

Wilson & Bathe (1973) apresentaram uma modificação para o método da aceleração linear de maneira a torna-lo incondicionalmente estável através da introdução de um fator  $\theta_w$ , uma vez que a solução instável tende a oscilar em torno da verdadeira solução (WILSON, 2002).

De forma geral, o método Wilson- $\theta$  considera que a aceleração varia linearmente no intervalo de tempo compreendido entre  $t$  e  $\theta_w \Delta t$ . Assim sendo, a solução do problema é calculada para um passo  $t + \theta_w \Delta t$ .

O fator  $\theta_w$  deve assumir valor superior ou igual a 1, sendo que, se igual a unidade, o método de Newmark não sofre modificação. Para valores acima de 1,37, o método torna-se incondicionalmente convergente. De acordo com Craig Jr. (1981), o valor ótimo para  $\theta_w$  é 1,420815, havendo, entretanto, o emprego do valor de 1,4 por parte de diversos autores.

Admitindo-se um incremento no tempo  $\tau$  tal que  $0 \leq \tau \leq \theta_w \Delta t$ , para o intervalo de tempo entre  $t$  e  $t + \theta_w \Delta t$ , a aceleração é descrita como:

$$\ddot{X}_{t+\tau} = \ddot{X}_t + \frac{\tau}{\theta_w \Delta t} (\ddot{X}_{t+\theta_w \Delta t} - \ddot{X}_t) \quad (5.69)$$

A velocidade e posição podem ser determinadas via integração da equação 5.69, além da aplicação das devidas condições iniciais:

$$\dot{X}_{t+\tau} = \dot{X}_t + \ddot{X}_t \tau + \frac{\tau^2}{2\theta_w \Delta t} (\ddot{X}_{t+\theta_w \Delta t} - \ddot{X}_t) \quad (5.70)$$

$$X_{t+\tau} = X_t + \dot{X}_t \tau + \frac{\ddot{X}_t \tau^2}{2} + \frac{\tau^3}{6\theta_w \Delta t} (\ddot{X}_{t+\theta_w \Delta t} - \ddot{X}_t) \quad (5.71)$$

Considerando-se que  $\tau = \theta_w \Delta t$ , as equações 5.70 e 5.71 assumem a forma:

$$\dot{X}_{t+\theta_w \Delta t} = \dot{X}_t + \frac{\theta_w \Delta t}{2} (\ddot{X}_{t+\theta_w \Delta t} + \ddot{X}_t) \quad (5.72)$$

$$X_{t+\theta_w \Delta t} = X_t + \theta_w \Delta t \dot{X}_t + \frac{\theta_w^2 \Delta t^2}{6} (\ddot{X}_{t+\theta_w \Delta t} + 2\ddot{X}_t) \quad (5.73)$$

Em seguida, determina-se as equações correspondentes a  $\dot{X}_{t+\theta_w \Delta t}$  e  $\ddot{X}_{t+\theta_w \Delta t}$  em termos de  $X_{t+\theta_w \Delta t}$ , oriundas das equações 5.72 e 5.73, obtendo-se, portanto:

$$\ddot{X}_{t+\theta_w \Delta t} = \frac{6}{\theta_w^2 \Delta t^2} (X_{t+\theta_w \Delta t} - X_t) - \frac{6}{\theta_w \Delta t} \dot{X}_t - 2\ddot{X}_t \quad (5.74)$$

$$\dot{X}_{t+\theta_w\Delta t} = \frac{3}{\theta_w\Delta t} (X_{t+\theta_w\Delta t} - X_t) - 2\dot{X}_t - \frac{\theta_w\Delta t}{2} \ddot{X}_t \quad (5.75)$$

As posições, velocidades e acelerações relacionadas ao instante de tempo  $t + \Delta t$  são determinadas através do equilíbrio no instante  $t + \theta_w\Delta t$ . Da mesma forma, o vetor de forças externas deve ser estimado para  $t + \theta_w\Delta t$  como segue:

$$F_{t+\theta_w\Delta t} = F_t + \theta_w(F_{t+\Delta t} - F_t) \quad (5.76)$$

Com base nas equações 5.74 e 5.75, a expressão 5.38 pode ser determinada, para o passo  $t + \theta_w\Delta t$ , como:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Pi}{\partial X} \right|_{t+\theta_w\Delta t} &= \left. \frac{\partial U_e}{\partial X} \right|_{t+\theta_w\Delta t} - F_{t+\theta_w\Delta t} + \frac{6M}{\theta_w^2 \Delta t^2} X_{t+\theta_w\Delta t} + MQ_t + \frac{3C}{\theta_w\Delta t} X_{t+\theta_w\Delta t} \\ &+ CR_t = 0 \end{aligned} \quad (5.77)$$

Sendo que:

$$Q_t = - \left( \frac{6}{\theta_w^2 \Delta t^2} X_t + \frac{6}{\theta_w\Delta t} \dot{X}_t + 2\ddot{X}_t \right) \quad (5.78)$$

$$R_t = - \left( \frac{3}{\theta_w\Delta t} X_t + 2\dot{X}_t + \frac{\theta_w\Delta t}{2} \ddot{X}_t \right) \quad (5.79)$$

A matriz Hessiana é obtida através da derivada da equação 5.77, representada por:

$$\left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial X^2} \right|_{t+\theta_w\Delta t} = \nabla g(X_0) = \left. \frac{\partial^2 U_e}{\partial X^2} \right|_{t+\theta_w\Delta t} + \frac{6M}{\theta_w^2 \Delta t^2} + \frac{3C}{\theta_w\Delta t} \quad (5.80)$$

De modo a atualizar as variáveis envolvidas ao passo de tempo  $t + \Delta t$ , considera-se, portanto  $\tau = \Delta t$  e aplica-se esta consideração nas equações 5.69, 5.70 e 5.71. Logo:

$$\ddot{X}_{t+\Delta t} = \ddot{X}_t + \frac{1}{\theta_w} (\ddot{X}_{t+\theta_w\Delta t} - \ddot{X}_t) \quad (5.81)$$

$$\dot{X}_{t+\Delta t} = \dot{X}_t + \Delta t \ddot{X}_t + \frac{\Delta t}{2\theta_w} (\ddot{X}_{t+\theta_w \Delta t} - \ddot{X}_t) \quad (5.82)$$

$$X_{t+\Delta t} = X_t + \Delta t \dot{X}_t + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{X}_t + \frac{\Delta t^2}{6\theta_w} (\ddot{X}_{t+\theta_w \Delta t} + 2\ddot{X}_t) \quad (5.83)$$

#### 5.6.4. Método explícito das Diferenças Centrais

Segundo Silva (2017), o Método das Diferenças Centrais é uma particularização do Método de Newmark para  $\beta = 0$ , apresentando precisão de segunda ordem. A determinação de parâmetros, tais como aceleração e velocidade, é baseada em aproximações por diferenças centrais (COOK *et al.*, 1989).

Dentre os métodos explícitos, este é um dos mais empregados na resolução de problemas dinâmicos. No entanto, por ser condicionalmente estável, a necessidade de incrementos de tempo relativamente pequenos torna-se indispensável, como visto anteriormente.

Nesse contexto, os valores da posição anterior e posterior referentes ao passo  $t$ , dados respectivamente por  $X_{t-\Delta t}$  e  $X_{t+\Delta t}$ , são representados por séries de Taylor centradas em  $X_t$ , como segue:

$$X_{t+\Delta t} = X_t + \Delta t \dot{X}_t + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{X}_t + \dots \quad (5.84)$$

$$X_{t-\Delta t} = X_t - \Delta t \dot{X}_t + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{X}_t - \dots \quad (5.85)$$

Cuja soma truncada nos termos de segunda ordem produz:

$$\ddot{X}_t = \frac{1}{\Delta t^2} (X_{t+\Delta t} - 2X_t + X_{t-\Delta t}) \quad (5.86)$$

Analogamente, da diferença entre as equações 5.84 e 5.85, determina-se que:

$$\dot{X}_t = \frac{1}{2\Delta t} (X_{t+\Delta t} - X_{t-\Delta t}) \quad (5.87)$$

Aplicando-se as equações 5.86 e 5.87 em 5.38, obtém-se:

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial X} \right|_{t+\Delta t} = \left. \frac{\partial U_e}{\partial X} \right|_{t+\Delta t} - F_{t+\Delta t} + \frac{M}{\Delta t^2} X_{t+\Delta t} + MQ_t + \frac{C}{2\Delta t} X_{t+\Delta t} + CR_t = 0 \quad (5.88)$$

Em que:

$$Q_t = -2X_t + X_{t-\Delta t} \quad (5.89)$$

$$R_t = -X_{t-\Delta t} \quad (5.90)$$

Derivando-se 5.88, encontra-se a matriz Hessiana do sistema:

$$\left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial X^2} \right|_{t+\Delta t} = \nabla g(X_0) = \left. \frac{\partial^2 U_e}{\partial X^2} \right|_{t+\Delta t} + \frac{M}{\Delta t^2} + \frac{C}{2\Delta t} \quad (5.91)$$

Para que não haja propagação de erros ao longo dos passos de tempo, o incremento de tempo deve ser suficientemente pequeno, de tal forma que (BATHE, 1996):

$$\Delta t_{crit} \leq \frac{T_\pi}{\pi} \quad (5.92)$$

Em que  $T_\pi$  representa o menor período do sistema de elementos finitos, podendo ser estimado pela expressão 5.93.

$$T_\pi \leq \frac{2\pi}{\omega_{max}} \quad (5.93)$$

Sendo  $\omega_{max}$  a maior frequência natural.

#### **5.6.5. Método explícito da Diferença Finita de Quarta Ordem (Souza & Moura, 1997)**

Souza & Moura (1997) propuseram um método com o objetivo de minimizar possíveis erros que são obtidos através emprego do método das Diferenças Centrais, sobretudo quando se adota um incremento de tempo próximo ao valor crítico. Conforme os autores, esta metodologia além de conservar as vantagens de um método explícito, praticamente elimina as oscilações numéricas espúrias.

Com o interesse de formular um algoritmo de alta precisão no domínio do tempo, deve-se, de acordo com o método, escrever a posição como um polinômio de Lagrange de quarto grau. Desta forma, a velocidade e aceleração nodais são dadas por:

$$\begin{aligned} \dot{X}_t = \frac{1}{2\Delta t} (X_{t+\Delta t} - X_{t-\Delta t}) \\ - \frac{1}{12\Delta t} (X_{t-3\Delta t} - 6X_{t-2\Delta t} + 12X_{t-\Delta t} - 10X_t + 3X_{t+\Delta t}) \end{aligned} \quad (5.94)$$

$$\begin{aligned} \ddot{X}_t = \frac{1}{\Delta t^2} (X_{t+\Delta t} - 2X_t + X_{t-\Delta t}) \\ - \frac{1}{12\Delta t^2} (X_{t+\Delta t} - 4X_t + 6X_{t-\Delta t} - 4X_{t-2\Delta t} + X_{t-3\Delta t}) \end{aligned} \quad (5.95)$$

Aplicando-se as expressões 5.94 e 5.95 em 5.38, obtém-se:

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial X} \right|_{t+\Delta t} = \left. \frac{\partial U_e}{\partial X} \right|_{t+\Delta t} - F_{t+\Delta t} + \frac{11M}{12\Delta t^2} X_{t+\Delta t} + MQ_t + \frac{C}{4\Delta t} X_{t+\Delta t} + CR_t = 0 \quad (5.96)$$

Em que:

$$Q_t = \frac{1}{12\Delta t^2} (-20X_t + 6X_{t-\Delta t} + 4X_{t-2\Delta t} - X_{t-3\Delta t}) \quad (5.97)$$

$$R_t = \frac{1}{12\Delta t} (-X_{t-3\Delta t} + 6X_{t-2\Delta t} - 18X_{t-\Delta t} + 10X_t) \quad (5.98)$$

A matriz Hessiana é dada por:

$$\left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial X^2} \right|_{t+\Delta t} = \nabla g(X_0) = \left. \frac{\partial^2 U_e}{\partial X^2} \right|_{t+\Delta t} + \frac{11M}{12\Delta t^2} + \frac{C}{4\Delta t} \quad (5.99)$$

Para que o sistema apresente estabilidade, é preciso que:

$$\Delta t_{crit} \leq \sqrt{\frac{2}{3} \frac{2}{\omega_{max}}} \quad (5.100)$$

### 5.6.6. Método explícito de Chung & Lee (1994)

Chung & Lee (1994) propuseram uma nova família de métodos de integração temporal de segunda ordem com dissipação de altas frequências para solução de diversos problemas dinâmicos. As posições e velocidades são aproximadas por:

$$X_{t+\Delta t} = X_t + \Delta t \dot{X}_t + \beta_1 \ddot{X}_t + \beta_2 \ddot{X}_{t+\Delta t} \quad (5.101)$$

$$\dot{X}_{t+\Delta t} = \dot{X}_t + \Delta t \ddot{X}_t + \gamma_1 \ddot{X}_t + \gamma_2 \ddot{X}_{t+\Delta t} \quad (5.102)$$

Em que:

$$\beta_1 = \Delta t^2 \left( \frac{1}{2} - \beta_c \right) \quad (5.103)$$

$$\beta_2 = \Delta t^2 \beta_c \quad (5.104)$$

$$\gamma_1 = -\frac{1}{2} \Delta t \quad (5.105)$$

$$\gamma_2 = \frac{3}{2} \Delta t \quad (5.106)$$

Dessa forma, o modelo proposto apresenta apenas um parâmetro livre, representado por  $\beta_c$ , que, por meio de estudo de precisão, convergência e estabilidade, Chung & Lee (1994) estabeleceram um intervalo dentro do qual é possível estimar seu valor (equação 5.107).

$$1 \leq \beta_c \leq \frac{28}{27} \quad (5.107)$$

É possível obter a aceleração através da equação 5.108, conforme segue:

$$\ddot{X}_{t+\Delta t} = \frac{(X_{t+\Delta t} - X_t)}{\beta_2} - \frac{\Delta t \dot{X}_t}{\beta_2} - \frac{\beta_1 \ddot{X}_t}{\beta_2} \quad (5.108)$$

Aplicando-se as equações 5.102 e 5.108 em 5.38, tem-se que:

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial X} \right|_{t+\Delta t} = \left. \frac{\partial U_e}{\partial X} \right|_{t+\Delta t} - F_{t+\Delta t} + \frac{M}{\beta_2} X_{t+\Delta t} + M Q_t + \frac{\gamma_2 C}{\beta_2} X_{t+\Delta t} + C R_t = 0 \quad (5.109)$$

Em que:

$$Q_t = -\frac{X_t}{\beta_2} - \frac{\Delta t \dot{X}_t}{\beta_2} - \frac{\beta_1 \ddot{X}_t}{\beta_2} \quad (5.110)$$

$$R_t = \dot{X}_t + \Delta t \ddot{X}_t + \gamma_1 \ddot{X}_t + \gamma_2 Q_t \quad (5.111)$$

A matriz Hessiana é dada por:

$$\left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial X^2} \right|_{t+\Delta t} = \nabla g(X_0) = \left. \frac{\partial^2 U_e}{\partial X^2} \right|_{t+\Delta t} + \frac{M}{\beta_2} + \frac{\gamma_2 C}{\beta_2} \quad (5.112)$$

O método de Chung & Lee (1994), para  $\beta_c = 1$ , apresenta características semelhantes ao método das Diferenças Centrais. No entanto, para valores próximos ao limite superior de 28/27, o método apresenta máxima dissipação numérica.

## 5.7. IMPACTO DE ESTRUTURAS CONTRA ANTEPAROS RÍGIDOS

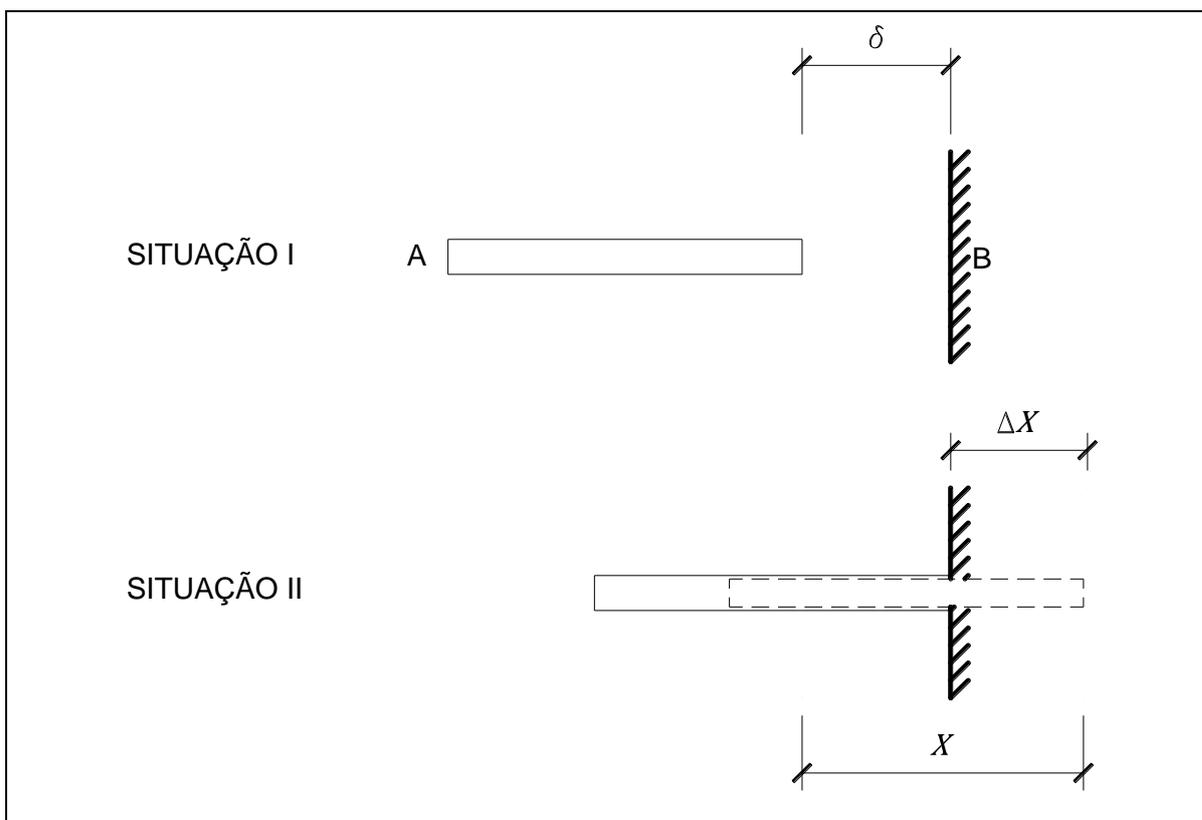
Esta seção apresenta a técnica adotada para a consideração do impacto na discretização do modelo computacional. A metodologia aqui apresentada é também abordada por Simo *et al.* (1986), Greco (2004), Marques (2006), Maciel (2008), Cavalcante (2017), Silva (2017), dentre outros.

O esquema de impacto adotado consiste na limitação das posições dos nós que sofrem impacto através da condição de penetração nula, de acordo com a expressão 5.113:

$$X - \delta \geq 0 \quad (5.113)$$

O termo  $\delta$  corresponde à mínima distância entre o corpo e o anteparo rígido, como pode ser observado na Figura 5.5.

Figura 5.5 - Condição de penetração nula



Fonte: Cavalcante (2016)

A Figura 5.5 fornece duas situações de configuração estrutural, sendo elas representadas pela situação I, na qual a estrutura se apresenta a uma distância  $\delta$  do anteparo rígido, e pela situação II, em que o impacto é efetivado. No entanto, para que a condição de impacto (equação 5.113) seja satisfeita, é preciso que as posições nodais sejam restringidas à posição do anteparo, de modo que:

$$X_{Nó} = X_{Anteparo} \quad (5.114)$$

Nesta situação, conforme Marques (2006), calcula-se o vetor de forças internas  $F_{int} \neq 0$  nos pontos impactantes, de forma a garantir a força de reflexão do corpo. Desta forma:

$$g = F_{Contato} = F_{ext} - F_{int} \quad (5.115)$$

É importante destacar que este trabalho não considera os efeitos do atrito no esquema do impacto.

### 5.7.1. Parâmetros de Newmark e regularização da solução de impacto

Como abordado anteriormente, na família de algoritmos de Newmark a adoção de diferentes valores para os parâmetros  $\beta$  e  $\gamma$  fornece diversos métodos. Estes parâmetros definem a estabilidade, precisão e amortecimento dos métodos (COOK *et al.*, 1989).

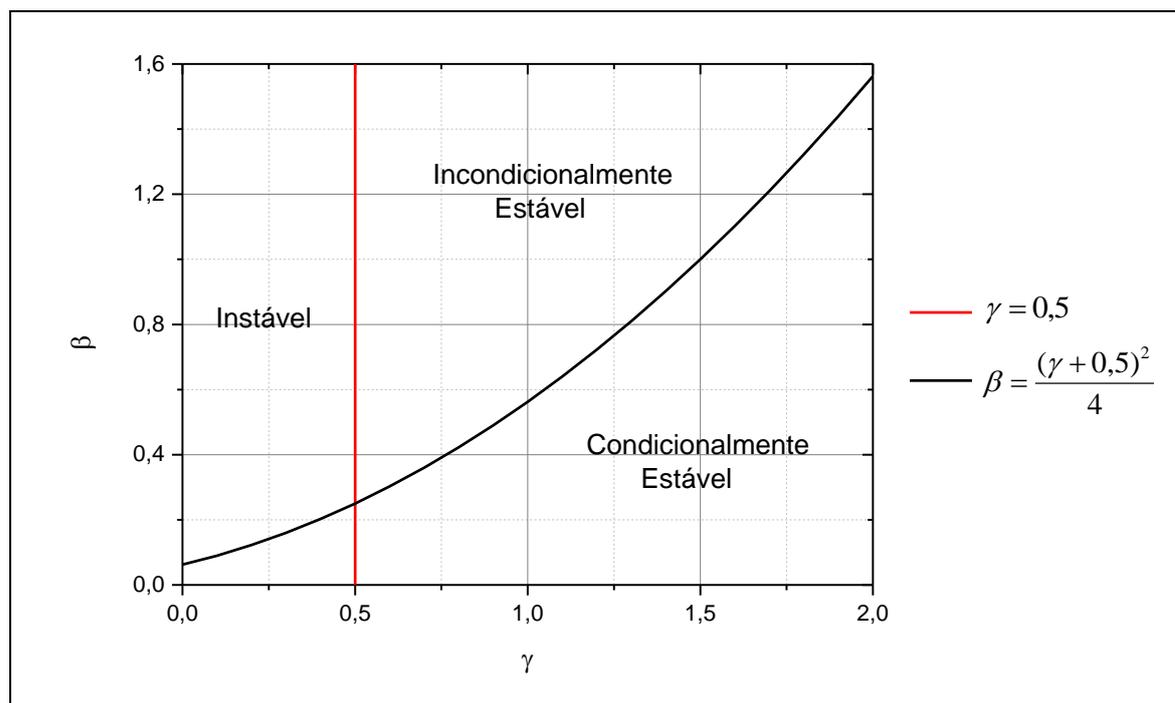
Em problemas em que o impacto não é considerado, geralmente adota-se o Método da Aceleração Média, por ser um método eficiente na determinação da resposta dinâmica estrutural (MARQUES, 2006). No entanto, esse método não apresenta o mesmo desempenho quando se trata de problemas com ocorrência de impacto, sobretudo quando verificadas altas frequências (CARPENTER *et al.*, 1991; TAYLOR & PAPADOPOULOS, 1993; SOLBERG & PAPADOPOULOS, 1998).

Hu (1997) fornece uma possível solução de modo a corrigir a instabilidade numérica verificada em problemas de impacto, sendo esta baseada num algoritmo que se enquadra na família de Newmark, cujas hipóteses estão relacionadas à aceleração que se desenvolve na região impactante (MARQUES, 2006). Segundo Greco (2004), o algoritmo corresponde ao modelo clássico de Newmark com a utilização de parâmetros cujos valores são dados como:

$$\beta = 1,0; \gamma = 1,5$$

A Figura 5.6 representa as regiões de estabilidade descritas em função dos parâmetros de Newmark  $\beta$  e  $\gamma$ . Essa figura permite observar que os parâmetros propostos por Hu (1997) se encontram no limite da região incondicionalmente estável sobre a curva  $\beta$ , da mesma forma que os parâmetros clássicos utilizados em problemas convencionais de dinâmica estrutural se apresentam no limite da região de estabilidade, no ponto referente à interseção da reta  $\gamma$  e da curva  $\beta$ , também gerando um algoritmo estável.

Figura 5.6 - Regiões de estabilidade para os parâmetros de Newmark



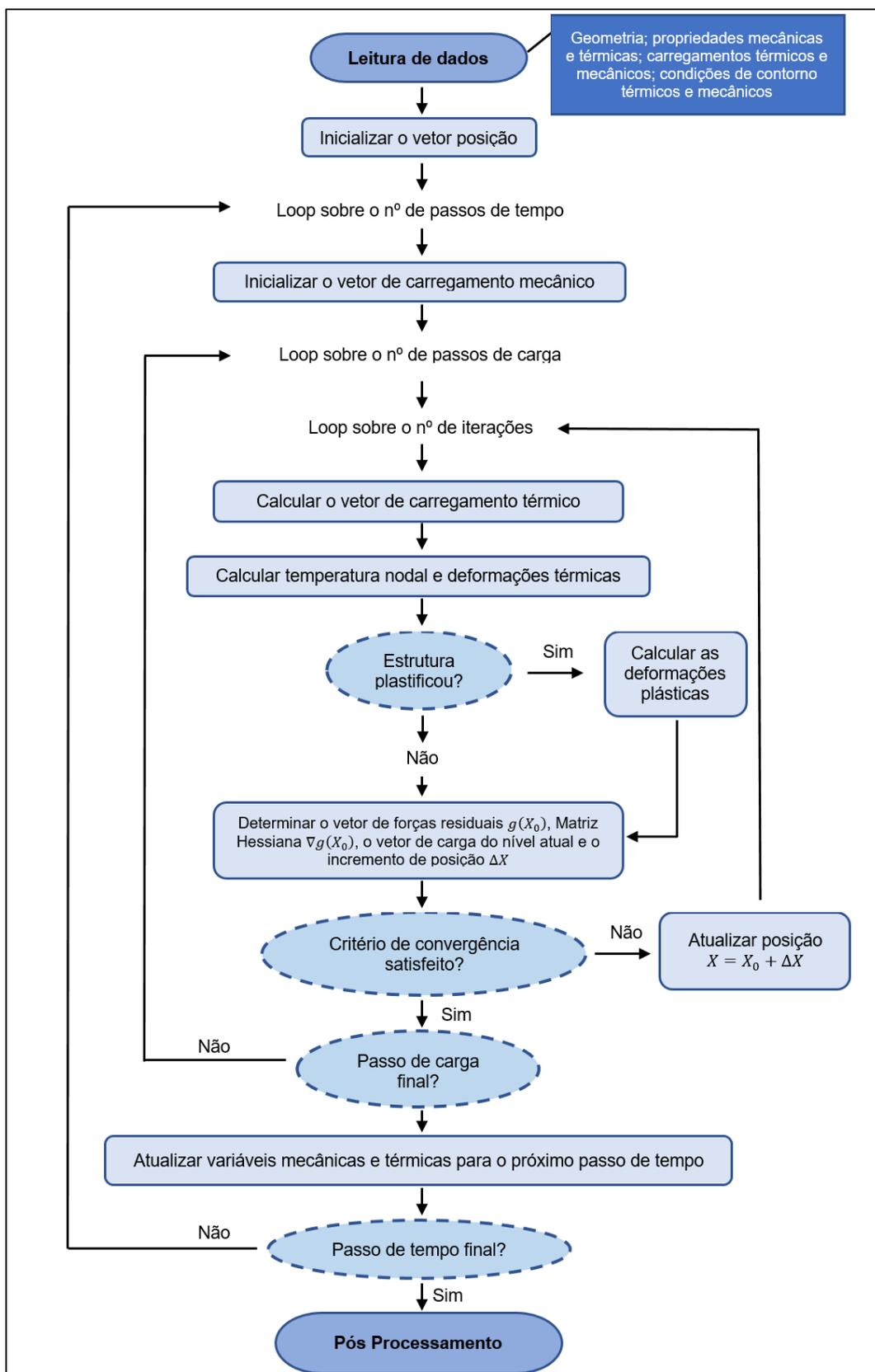
Fonte: Adaptado de Marques (2006)

## 5.8. IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA TERMOELASTOPLÁSTICO

A Figura 5.7 apresenta um fluxograma no qual é descrito o processo de resolução de problemas dinâmicos com abordagem não linear física e geométrica com acoplamento termomecânico, em que o método de integração temporal é associado ao procedimento iterativo de Newton-Raphson. A consideração dos efeitos térmicos na análise estrutural consiste na divisão do problema acoplado em duas partes, sendo uma térmica e outra mecânica.

O procedimento determina que a configuração e a temperatura da estrutura permaneçam inalteradas na solução da fase térmica e mecânica, respectivamente. Esta técnica é denominada de solução escalonada, cujas equações são resolvidas sequencialmente (CARRAZEDO, 2009).

Figura 5.7- Fluxograma da discretização temporal associada ao procedimento iterativo



Fonte: Silva (2017)

De modo geral, o problema térmico é solucionado primeiramente, o que implica que a solução para o passo atual é determinado mediante configuração do passo anterior. Este acoplamento é denominado fraco e devidamente classificado como explícito (SILVA, 2017). Em Carrazedo (2009) é possível observar análises termomecânicas com acoplamento forte, ou implícito. Contudo, não se recomenda a adoção desta estratégia de solução, devido ao maior tempo empregado na análise e obtenção dos resultados, havendo diferenças pouco significativas mediante comparação entre ambas as técnicas.

## CAPÍTULO 6

# Aplicações numéricas

### 6.1. ANÁLISE NUMÉRICA

Este capítulo tem como finalidade a análise térmica, mecânica e termomecânica de sólidos bidimensionais, considerando-se os efeitos das não linearidades física e geométrica. Como forma de validação e discussão da formulação implementada, emprega-se exemplos presentes na literatura especializada.

Para análise do desempenho dos métodos de integração temporal, definiu-se um conjunto de exemplos cujos resultados são confrontados com aqueles encontrados na literatura. Para tanto, admitem-se os seguintes parâmetros para os exemplos abordados:

$$\beta = 0,25$$

$$\gamma = 0,50$$

$$\theta_w = 1,420815$$

$$\beta_c = 1,03$$

No entanto, para problemas de impacto solucionados pelo método de Newmark, adota-se  $\gamma=1,5$  e  $\beta=1,0$  (Hu, 1997). Além disso, não se considera os efeitos do atrito na formulação do impacto.

Relativo aos problemas térmicos, conforme Duhamel (1837), considera-se um estado inicial submetido a uma determinada temperatura positiva e invariável ao longo do tempo, definida como temperatura de referência, em que tensões e deformações não são observadas.

O parâmetro  $\bar{\alpha}$  de integração temporal é adotado conforme o método de Crank-Nicolson que considera uma aproximação da taxa de temperatura de forma constante

e igual a média entre  $t$  e  $t+\Delta t$ . Portanto, em problema térmico ou termomecânico, tal parâmetro é considerado igual a 0,5.

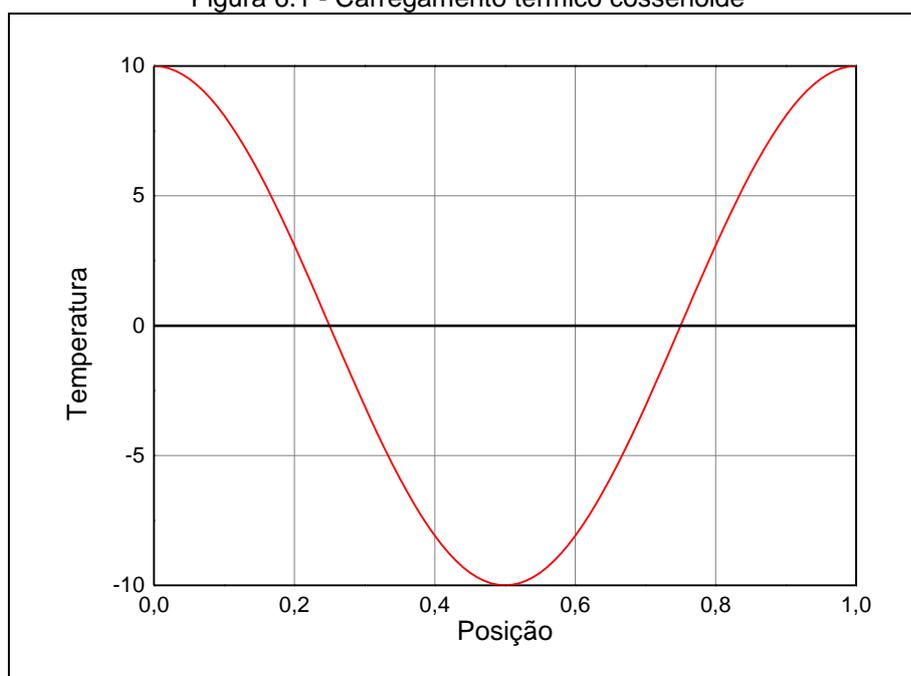
Dessa forma, a partir de fontes de calor termoelastoplásticas, determina-se as temperaturas, que, posteriormente, implicam numa nova configuração da estrutura. A cada novo passo de tempo, o carregamento térmico é atualizado, e por conseguinte, a configuração estrutural. Para tanto, o problema térmico é solucionado antes do problema mecânico, o que implica na obtenção das fontes de calor baseadas nas taxas de deformação do passo anterior.

## 6.2. BARRA SUBMETIDA À UM CARREGAMENTO TÉRMICO

Este exemplo, que pode ser verificado em Copetti (1999; 2002), assim como em Carrazedo (2009), Cavalcante (2016), e Silva (2017), corresponde à análise térmica de uma barra unidimensional de comprimento unitário submetida a um carregamento térmico cossenoide adimensional conforme equação 6.1, ilustrado na Figura 6.1. Para fim de comparação, adotou-se, neste trabalho, uma altura unitária, assim como massa específica, coeficiente de condução térmica e calor específico.

$$p(x) = 10\cos(2\pi x) \quad (6.1)$$

Figura 6.1 - Carregamento térmico cossenoide

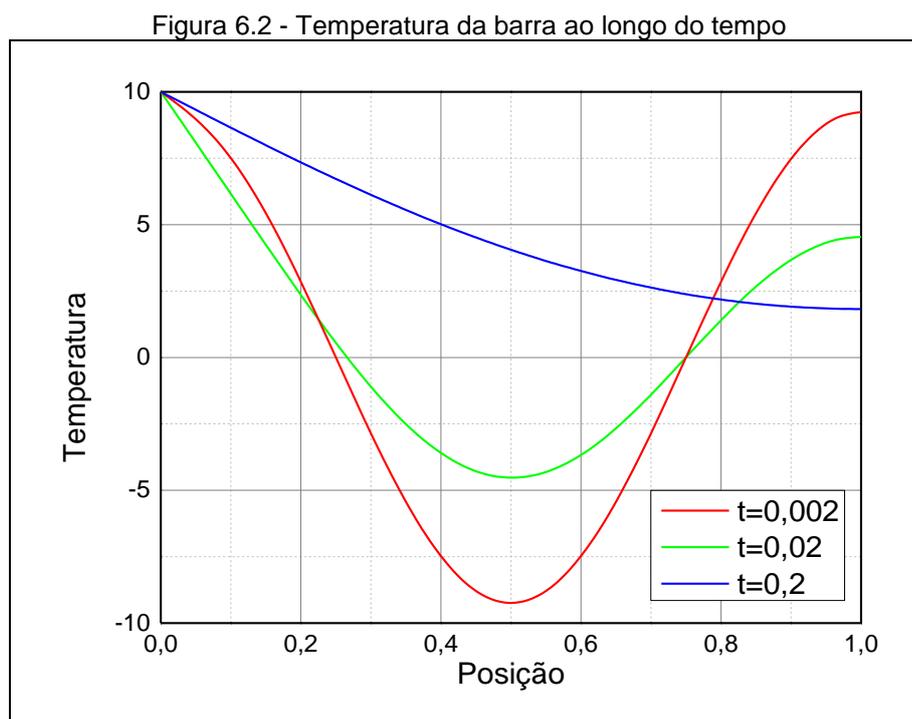


Além disso, o corpo apresenta uma restrição de temperatura na posição  $x = 0$ , de acordo com a expressão 6.2.

$$\theta(0, t) = 10 \quad (6.2)$$

Com a finalidade de comparar os resultados com os presentes na literatura, adotou-se uma superfície discretizada em 244 elementos com variação temporal de 0,0001.

Na Figura 6.2, observa-se o gráfico que apresenta a temperatura ao longo do eixo central do sólido bidimensional em alguns instantes de tempo. Os resultados obtidos são satisfatórios quando comparados às referências. Além disso, percebe-se uma tendência no equilíbrio da temperatura ao longo do corpo, devido à condição de restrição de temperatura.



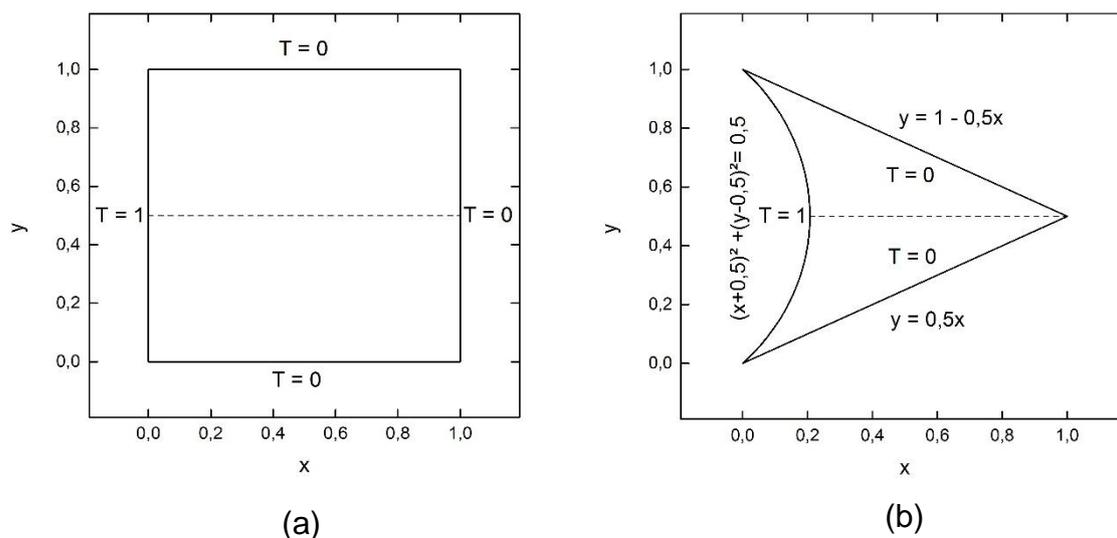
### 6.3. CONDUÇÃO DE CALOR EM SUPERFÍCIE

Soleimani *et al.* (2010) e Hidayat *et al.* (2015) investigaram o comportamento da condução de calor transiente em estruturas de duas dimensões através da aplicação de métodos numéricos, dentre os quais, o método das diferenças finitas.

Nesse contexto, para validação do modelo térmico implementado, busca-se confrontar dois exemplos encontrados na literatura discutida anteriormente.

O primeiro exemplo corresponde a uma placa quadrada de dimensões unitárias, cuja forma esquemática pode ser vista na figura 3a. Da mesma forma (figura 3b), o segundo exemplo se refere a uma superfície triangular com um dos lados em forma de arco de círculo. Além disso, as condições de contorno também podem ser obtidas na figura 6.3.

Figura 6.3 – Problema de condução de calor em diferentes superfícies

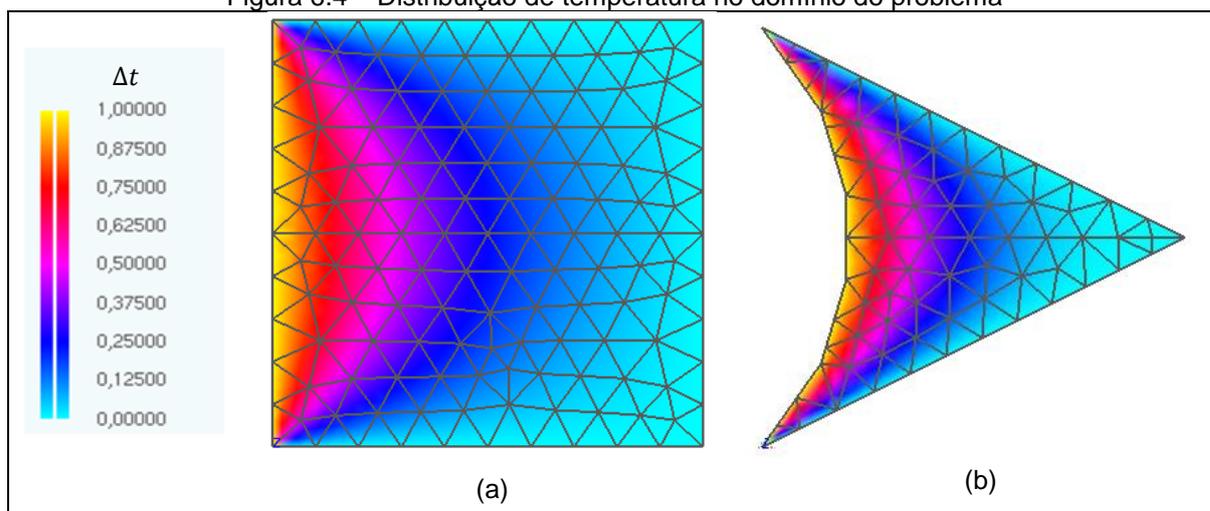
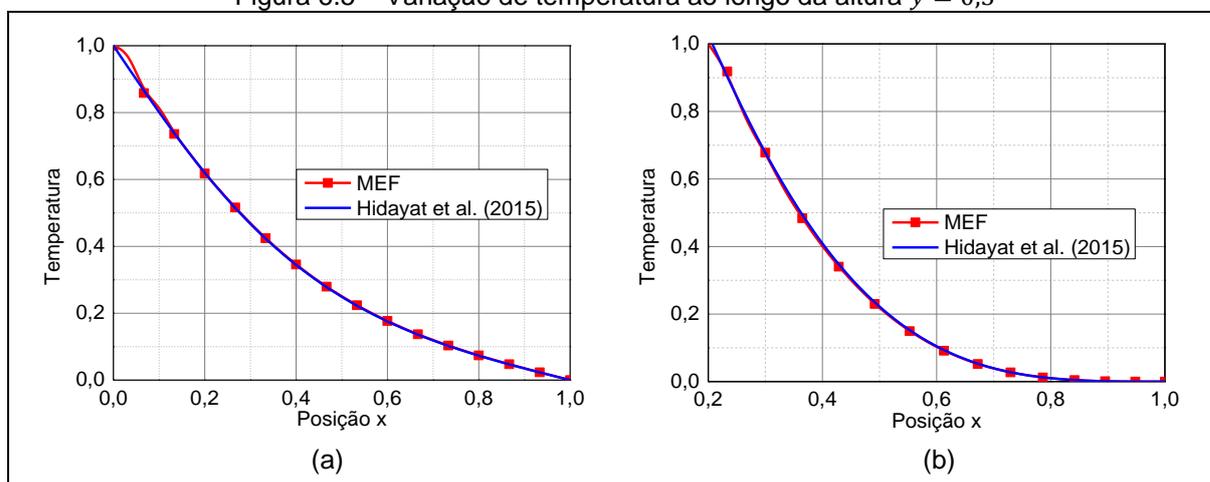


São utilizados um total de 244 elementos para discretizar a superfície quadrada, e 112 elementos para a triangular. A massa específica, o coeficiente de condução térmica e o calor específico são considerados unitários afim de se obter convergência dos resultados de forma mais rápida. Para ambas, utilizou-se um total de 300 passos com uma variação temporal de 0,01 para se obter o equilíbrio térmico na superfície.

Na figura 6.4, pode-se observar a distribuição de temperatura ao longo da superfície bidimensional. Tal comportamento condiz com o verificado na literatura.

Para ambos exemplos, a variação de temperatura ao longo da altura  $y=0,5$  para o problema de condução de calor, pode ser verificada na figura 6.5. Para mais, os resultados são confrontados com o obtido por Hidayat *et al.* (2015), sendo verificada uma boa precisão quanto à convergência dos resultados.

Figura 6.4 – Distribuição de temperatura no domínio do problema

Figura 6.5 – Variação de temperatura ao longo da altura  $y = 0,5$ 

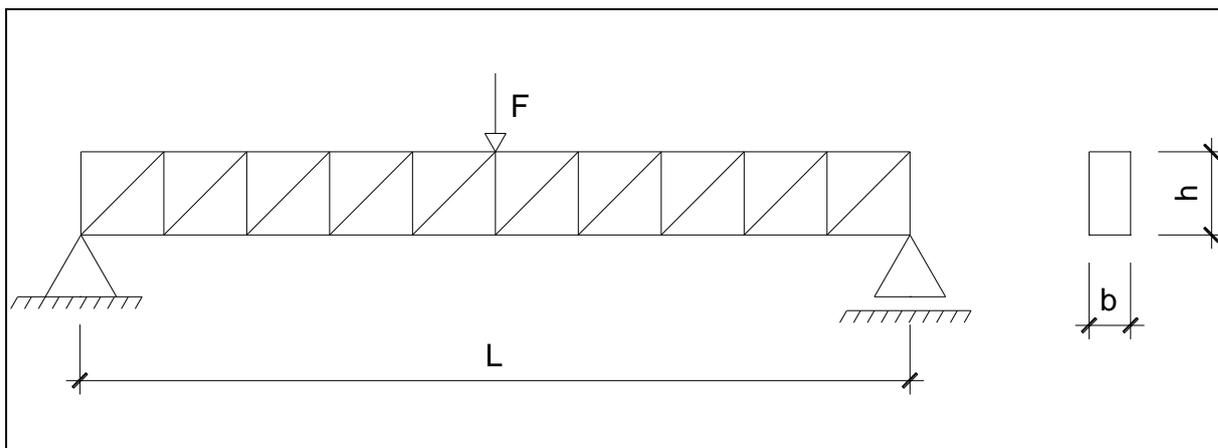
#### 6.4. VIGA ELASTOPLÁSTICA BIAPOIADA COM CARGA APLICADA NO MEIO DO VÃO

Este exemplo apresenta como objetivo a validação do modelo elastoplástico implementado, partido de uma análise estática de uma viga bi-apoiada discretizada por 20 elementos bidimensionais, cuja carga é aplicada no meio do vão, como ilustrado na figura 6.6.

São consideradas as seguintes propriedades mecânicas e geométricas:

$$\begin{aligned}
 E &= 210 \text{ kN/mm}^2 & \nu &= 0 \\
 L &= 3000 \text{ mm} & b &= 150 \text{ mm} \\
 h &= 300 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

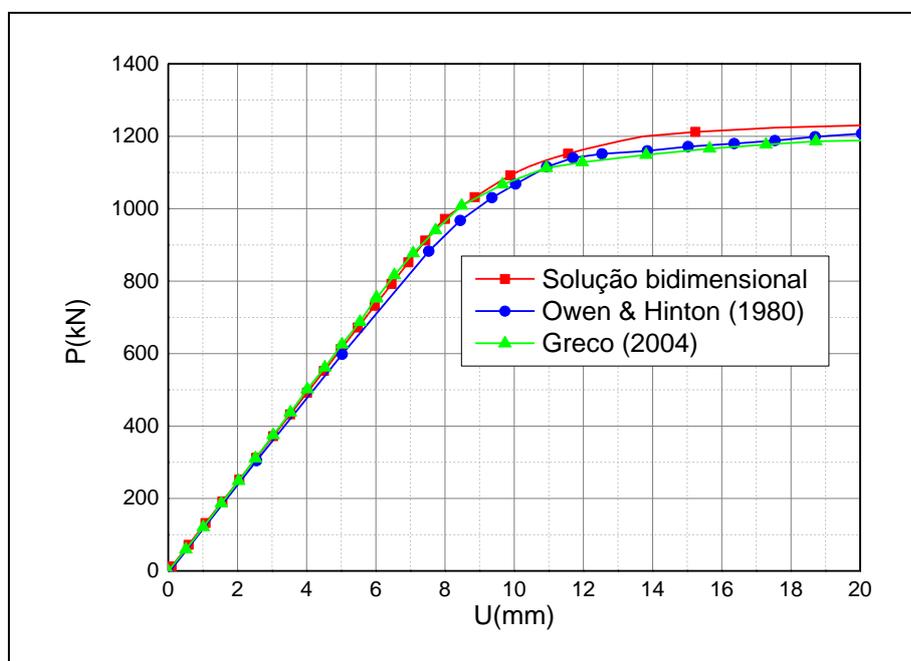
Figura 6.6 - Esquema da viga bi-apoiada.



O material da viga tem comportamento elastoplástico perfeito com uma tensão de escoamento igual a  $\sigma_y = 0,25kN/mm^2$ . Além disso, são empregados 103 passos de carga de  $12kN$ , quantidade suficiente para que a estrutura atinja o regime plástico.

Conforme disposto na figura 6.7, a solução fornece bons resultados quando comparados às referências, apresentando um patamar que tende à horizontalidade em torno da carga crítica de formação da rótula plástica.

Figura 6.7 – Deslocamento transversal x Força aplicada no meio do vão da viga.



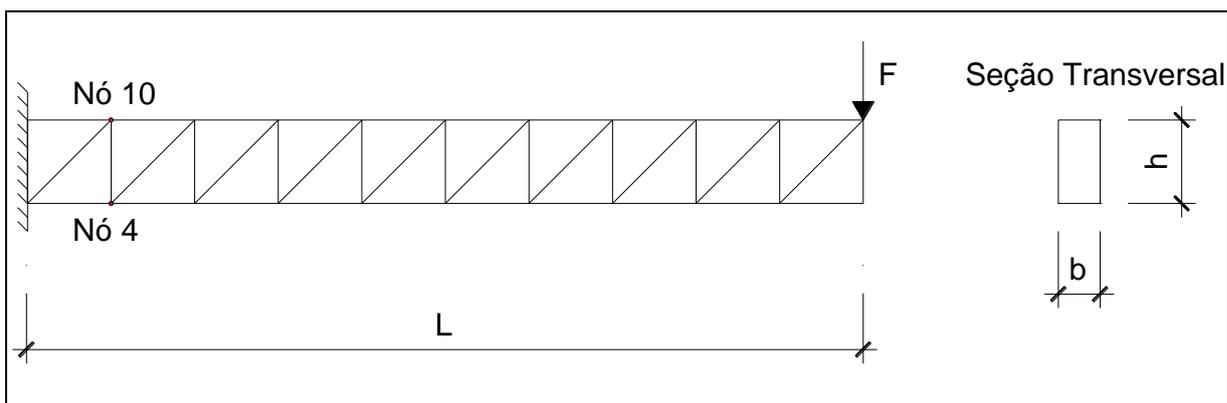
## 6.5. VIGA ELASTOPLÁSTICA EM BALANÇO COM CARGA TRANSVERSAL APLICADA NA EXTREMIDADE LIVRE

Assim como no exemplo anterior, este exemplo busca validar o modelo não linear físico abordado, através de análise estática de uma viga em balanço discretizada por 20 elementos finitos bidimensionais, sendo a carga aplicada transversalmente na extremidade livre, conforme figura 6.8.

São consideradas as seguintes propriedades mecânicas e geométricas:

$$\begin{aligned}
 E &= 30000 \text{ ksi} & \nu &= 0 \\
 \sigma_y &= 30 \text{ ksi} & H' &= 1000 \text{ ksi} \\
 L &= 5 \text{ pol} & b &= 0,1 \text{ pol} \\
 h &= 0,5 \text{ pol}
 \end{aligned}$$

Figura 6.8 - Esquema da barra engastada

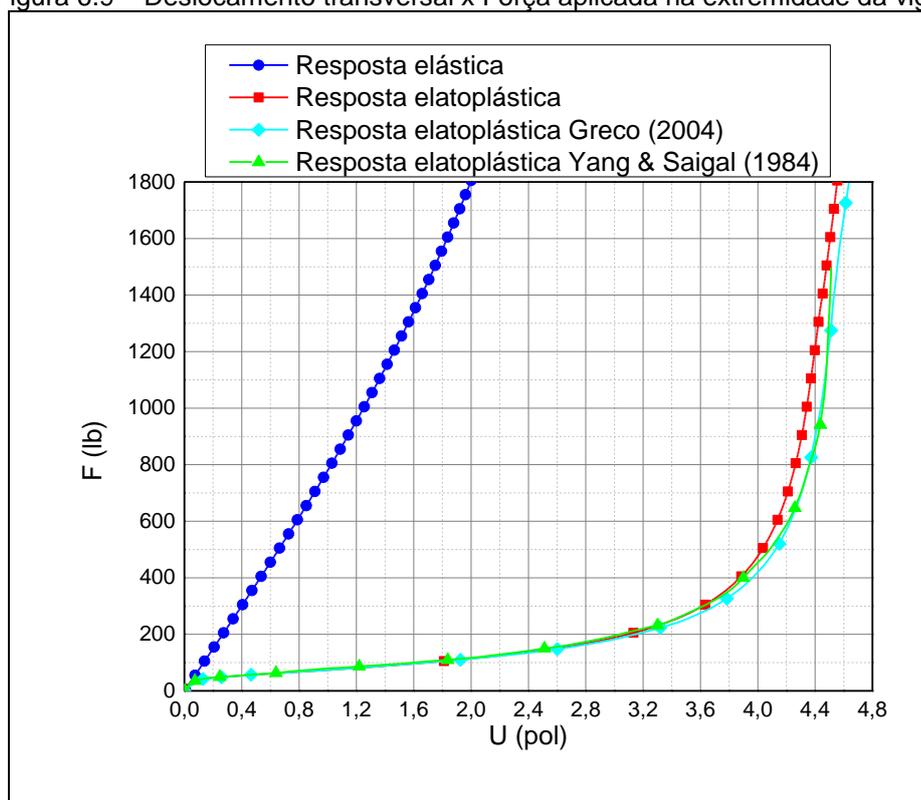


Para este exemplo, emprega-se um material cujo comportamento pode ser descrito como elastoplástico com encruamento positivo. Uma quantidade de 400 passos de carga de  $5,0 lb$  são utilizados a fim de se obter a curva para comparação.

Os resultados obtidos pela formulação empregada são confrontados com a solução analítica apresentada por Yang & Saigal (1984) e Greco (2004), e também com a solução não linear geométrica elástica, para o deslocamento da extremidade livre.

Como se verifica na figura 6.9, a solução implementada fornece bons resultados que tendem à convergência daqueles apresentados pela referência.

Figura 6.9 – Deslocamento transversal x Força aplicada na extremidade da viga.



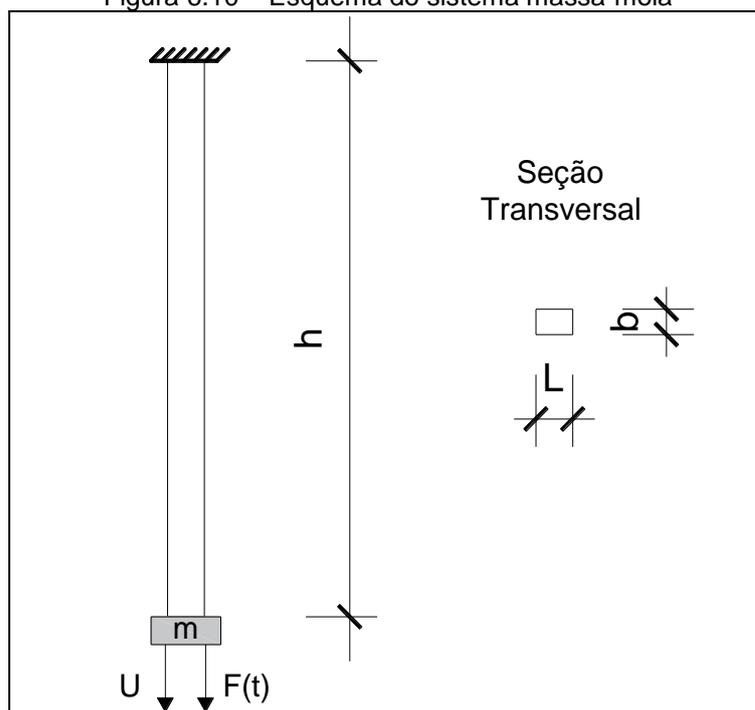
## 6.6. SISTEMA MASSA-MOLA COM ACOPLAMENTO TERMOMECÂNICO

Como forma de validação do modelo termoelastoplástico empregado, busca-se avaliar o comportamento a partir da análise da resposta dinâmica de uma barra de massa desprezível é submetida a um carregamento axial aplicado em uma massa concentrada unida à sua extremidade livre, como ilustra a Figura 6.10.

Este exemplo pode ser encontrado em Silva (2017), no qual foi constatada a influência térmica na resposta dinâmica estrutural. Para tanto assume-se que a barra não possui massa desprezível, e considera-se os parâmetros termomecânicos inerentes ao aço, como segue:

$$\begin{aligned}
 E &= 30000 \text{ ksi} & \nu &= 0 \\
 L &= 6,57 \text{ pol} & b &= 100 \text{ pol} \\
 h &= 0,0423 \text{ pol} & F &= 30 \text{ kips} \\
 \rho &= 7,339 \cdot 10^{-4} \text{ ksi pol}^2 & m &= 0,0259 \text{ lb s}^2/\text{pol}^4 \\
 k &= 0,0117 \text{ kips}/(\text{°C s}) & c_e &= 4,185 \text{ kpi pol}/(\text{°C kg}) \\
 \alpha_1 &= 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ pol}/(\text{°C pol}) & \alpha_2 &= 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ pol}/(\text{°C pol})
 \end{aligned}$$

Figura 6.10 – Esquema do sistema massa-mola



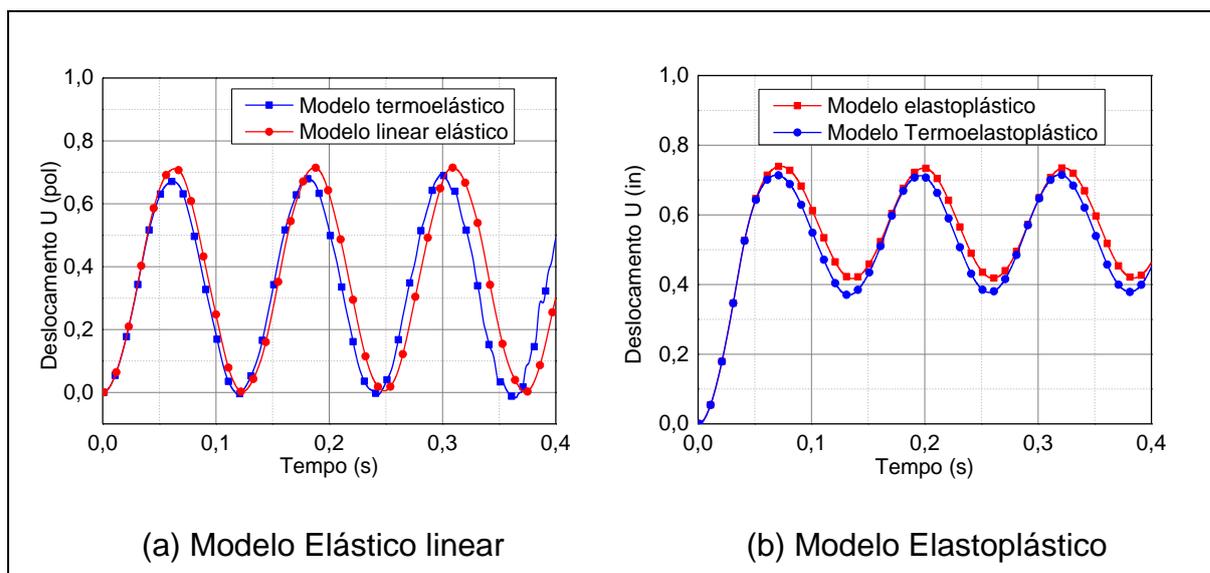
Para a discretização do sólido bidimensional, considera-se um total de 106 elementos finitos, utilizando-se como modelo de integração temporal o método de Newmark. Para isso, adota-se 400 passos de tempo de 0,001 s.

Admite-se, ainda, que material da viga tem comportamento elastoplástico com encruamento, considera-se uma tensão de escoamento  $\sigma_y = 162,9 \text{ ksi}$  e módulo de encruamento  $H' = 1000 \text{ ksi}$ .

As Figuras 6.11-a e 6.11-b mostram os resultados comparativos das análises mecânica e termomecânica para o deslocamento  $U$  levando em consideração o modelo elástico linear e o modelo elastoplástico com encruamento, respectivamente.

Verifica-se que nas análises com acoplamento termomecânico, tanto as amplitudes do movimento oscilatório, como a frequência são menores. Este fenômeno pode ser explicado pela provável dissipação de energia mecânica na geração de calor no sistema.

Figura 6.11 - Deslocamento do grau de liberdade analisado considerando os efeitos térmicos



## 6.7. VIGA ELASTOPLÁSTICA EM BALANÇO COM ACOPLAMENTO TÉRMICO

Para avaliar a formulação em termos do acoplamento termomecânico, toma-se por base o comportamento da viga analisada no exemplo 6.5. Da mesma forma, a viga é discretizada em 20 elementos finitos, e, além disso, considera-se que não há variação de temperatura nos nós restritos.

Para o problema dinâmico, considerou-se um aumento gradativo na aplicação da carga de forma a obter uma aproximação quase estática. Para isso, o método de Newmark foi utilizado na integração temporal, considerando-se uma variação temporal de 0,001s. Os parâmetros termoelásticos adotados são dados:

$$k = 1,741 \text{ lb}/(^\circ\text{Fs})$$

$$\rho = 7,337 \cdot 10^{-4} \text{ lb s}^2/\text{pol}^4 \quad c_e = 1119,81 \text{ lb s}^2/\text{pol}^4$$

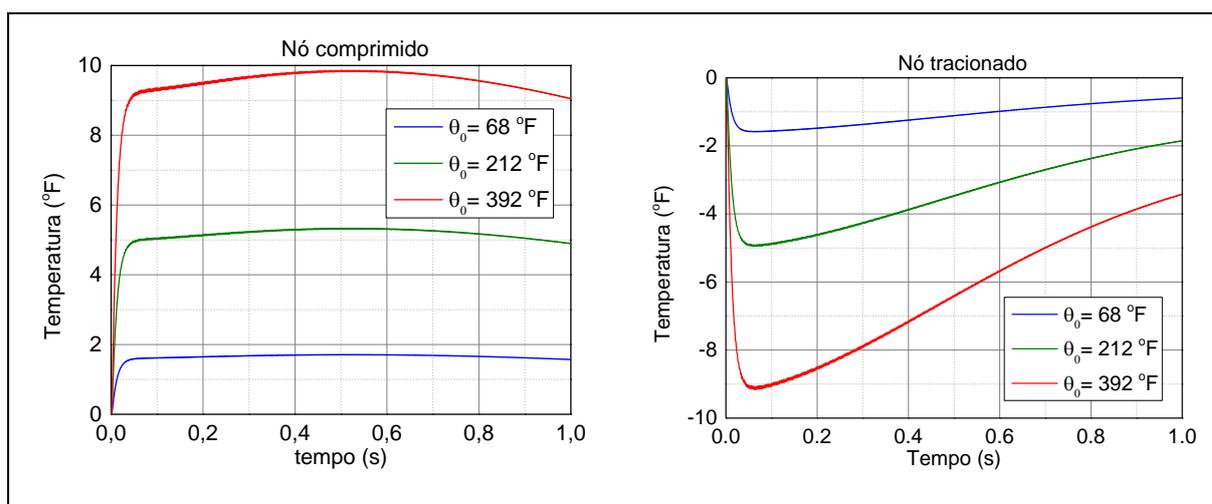
$$\alpha_1 = 9,7 \cdot 10^{-6} \text{ pol}/(^\circ\text{F pol}) \quad \alpha_2 = 9,7 \cdot 10^{-7} \text{ pol}/(^\circ\text{F pol})$$

Numa primeira análise elástica, varia-se a intensidade da temperatura de referência de forma a verificar a mudança de temperatura ao longo do tempo. A análise termomecânica não acarretou em diferenças significativas na resposta dinâmica da estrutura, mesmo considerando temperaturas de referências elevadas, uma vez que o coeficiente de expansão térmica adotado é baixo. Nesse sentido, os resultados comparativos à resposta puramente mecânica são omitidos.

Além disso, para a análise termoelástica, considera-se que o carregamento é aplicado num intervalo de tempo de 1 s.

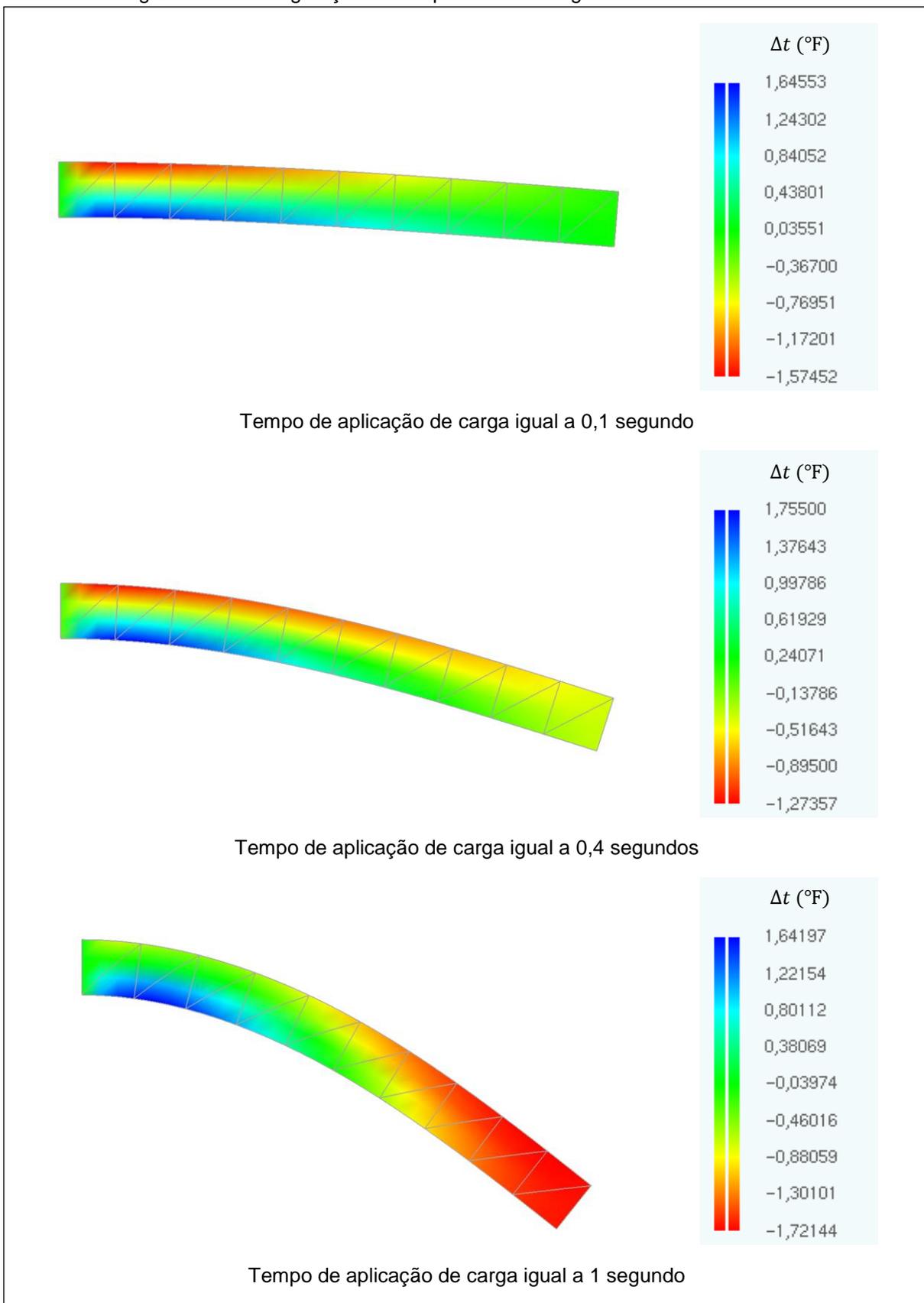
A Figura 6.12 apresenta os resultados obtidos para as três situações de temperatura de referência, cujos valores são  $\theta_0 = 68^\circ\text{F}$ ,  $\theta_0 = 212^\circ\text{F}$  e  $\theta_0 = 392^\circ\text{F}$ , considerando dois nós numa mesma seção localizada a 0,50m do engaste. Através da análise da temperatura nos nós, verifica-se uma variação de temperatura positiva no nó 4, sujeito à compressão, assim como é observada uma variação negativa na região tracionada (nó 10), caracterizando o efeito de Gough-Joule. E ainda, as mudanças de temperatura são mais significativas à medida que a temperatura de referência é maior. Também, a distribuição da temperatura no nó tracionado varia com o tempo, no entanto, no nó comprimido, a variação é menos gradativa, devido ao confinamento que ocorre naquela região.

Figura 6.12 – Variação de temperatura na seção  $x=0,50\text{m}$



Como a distribuição da temperatura na viga é semelhante para as três situações analisadas, variando-se apenas sua intensidade, são apresentados os resultados para  $\theta_0 = 68^\circ\text{F}$  na figura 6.13.

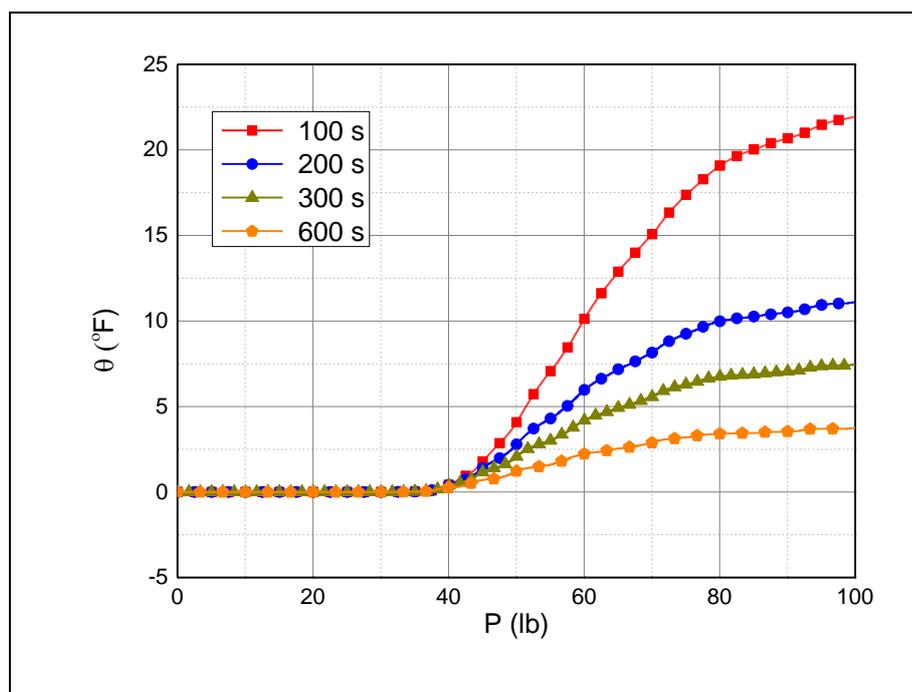
Figura 6.13 –Configuração de temperatura ao longo da estrutura deformada



Pode-se notar que a distribuição da temperatura na viga varia com a condição deformada. Além disso, percebe-se que a região comprimida apresenta taxas de variação de temperatura positivas, enquanto que nas regiões tracionadas há um resfriamento, caracterizando, portanto, o Efeito Gough-Joule.

Na sequência, atribui-se a plasticidade na análise, com o objetivo de avaliar sua influência na distribuição da temperatura, assim como de associar o fator tempo na variação. Para isso, admite-se diferentes intervalos de tempo para aplicação de carregamento, os quais, 100 s, 200 s, 300 s e 600 s são considerados. Adota-se, ainda, 80% de geração de calor devido às deformações plásticas, assim como  $\theta_0 = 68$  °F.

Figura 6.14 –Configuração de temperatura para diferentes intervalos de tempo para aplicação de carga.



Para a extremidade livre, a geração de calor devido às deformações plásticas são mais expressivas quando comparadas com as oriundas das deformações elásticas, como ilustra o gráfico da Figura 6.14, comprovando assim a influência da plasticidade no acréscimo de temperatura do corpo.

Além disso, a taxa de carregamento influencia de forma inversa a variação de temperatura no corpo. Quando se admite a aplicação da carga em um curto intervalo de tempo, há uma maior dissipação de energia na forma de calor. À medida que essa

taxa de aplicação de carga diminui, ocorre uma menor dissipação de energia, e portanto uma menor variação de temperatura no corpo.

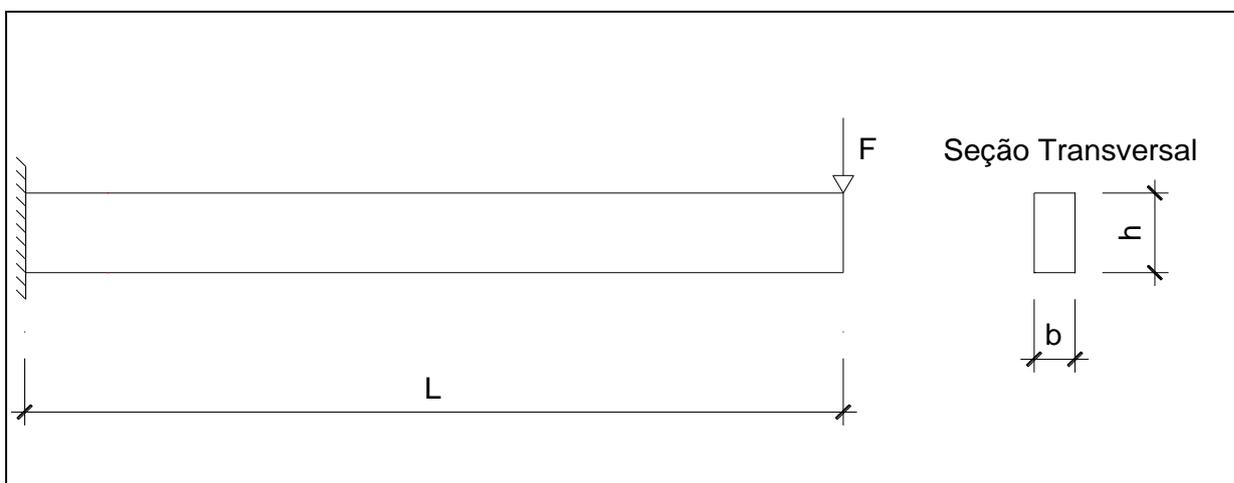
## 6.8. VIGA ENGASTADA

Neste exemplo, encontrado em Greco (2004) assim como em Marques (2006) e Maciel (2008), uma viga robusta em balanço é submetida a um carregamento de impacto na extremidade livre, conforme ilustra a Figura 6.15.

Referente a discretização da estrutura, Greco (2004) adotou 20 elementos finitos unidimensionais de aproximação linear. Por sua vez, Marques (2006) e Maciel (2008), obtiveram os resultados para este problema utilizando elementos finitos sólidos, cuja modelagem adotou uma malha de, respectivamente, 80 e 77 elementos.

O objetivo deste exemplo é de verificar o comportamento dos diversos algoritmos de integração temporal aqui adotados. A análise é realizada para dois casos, diferenciados pelo carregamento de impacto. No primeiro, adota-se um carregamento constante, enquanto que no segundo, tal carregamento é considerado crescente até certo tempo, além do qual se torna constante.

Figura 6.15 - Esquema da barra engastada



São consideradas as seguintes propriedades mecânicas e geométricas:

$$E = 210 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2 \quad \nu = 0$$

$$L = 1200 \text{ mm} \quad b = 150 \text{ mm}$$

$$h = 300 \text{ mm} \quad \rho = 1691,81 \cdot 10^{-4} \text{ N s}^2/\text{m}^4$$

Para isso, utiliza-se uma malha de 88 elementos finitos bidimensionais com variação temporal de  $0,0001s$  e  $0,00001s$ , de modo a verificar a influência deste parâmetro nos diversos modelos de integração temporal adotados.

A primeira etapa na determinação da integração temporal corresponde à definição de valor apropriado ao intervalo de tempo, uma vez que ele está diretamente relacionado ao comportamento real da estrutura e problemas de instabilidade numérica (Bathe & Wilson, 1973). Nesse contexto, as figuras 6.16 e 6.17 comparam os valores de deslocamento do nó onde o carregamento é aplicado, adotando-se diversos modelos de integração temporal com diferentes intervalos de tempo.

É possível perceber nas figuras abaixo a influência do fator tempo na resposta estrutural, sobretudo para os métodos explícitos. A medida em que a variação temporal é diminuída, o comportamento dos resultados tendem a assumir uma mesma forma.

Nas figuras 6.16 e 6.17, é possível verificar uma diferença relativamente pequena entre os resultados obtidos por métodos explícitos. Conforme abordado por Cavalcante (2016), o método de Chung & Lee (1994) apresentou um pequeno amortecimento numérico em relação aos algoritmos de Souza & Moura (1997) e Diferenças Centrais, condicionado pela manipulação do parâmetro  $\beta_c$ .

Pode-se perceber um certo amortecimento apresentado pelos métodos explícitos quando comparados aos implícitos, sobretudo para intervalos de tempo relativamente maiores. Conforme se diminui tal intervalo, observa-se uma menor dissipação dos métodos explícitos, ao passo que os métodos implícitos não sofrem grandes mudanças.

O método de Newmark apresentou resultados praticamente idênticos aos obtidos na literatura, independente do intervalo de tempo analisado. Os métodos de Houbolt e Wilson- $\theta$  manifestam um leve amortecimento que é diminuído com a diminuição da variação temporal.

Figura 6.16 – Caso 1

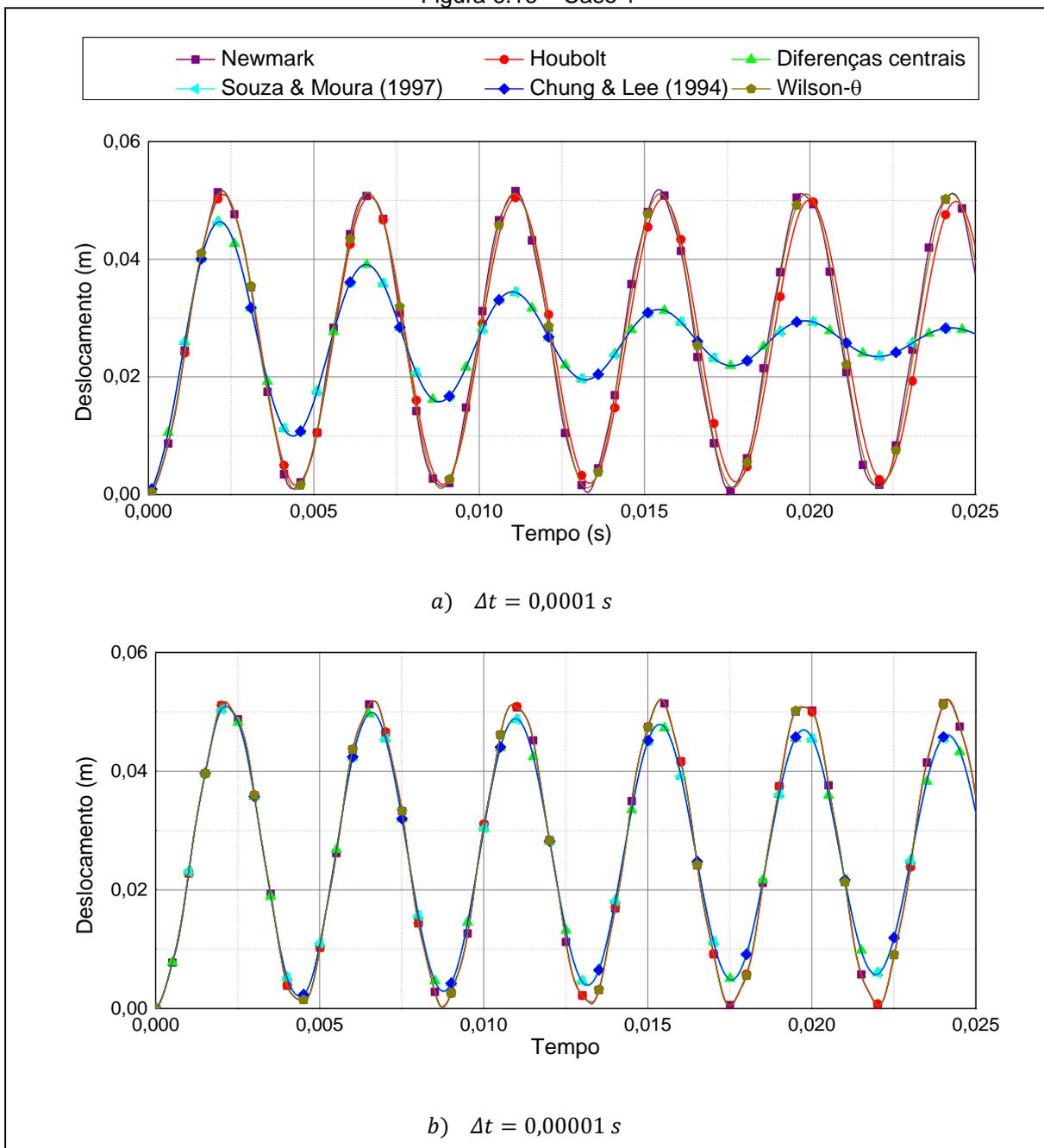
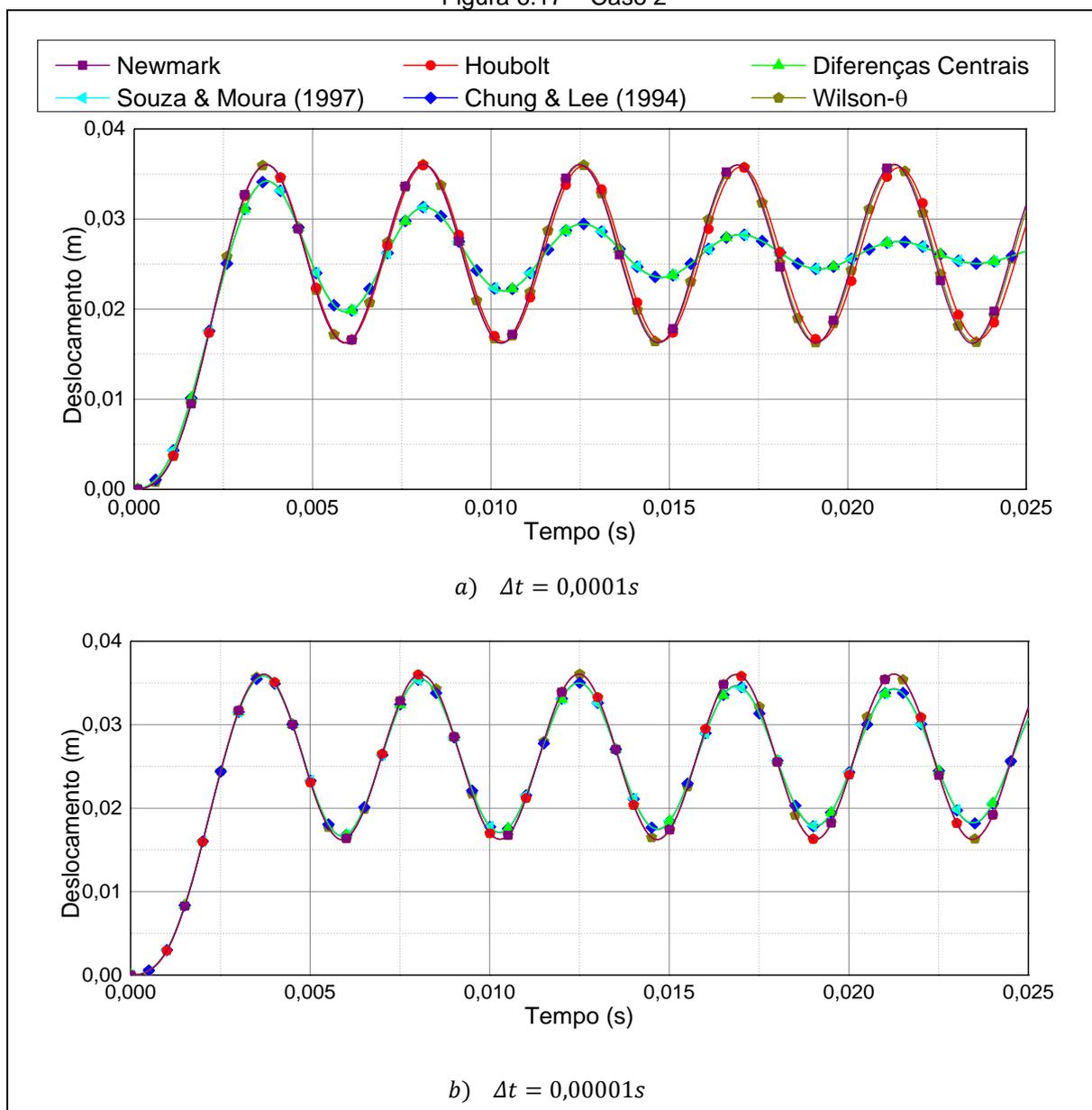


Figura 6.17 – Caso 2



De maneira geral, assim como observado por Cavalcante (2016), o esforço computacional exigido pelos métodos explícitos é menor, contudo, há a necessidade de passos de tempo menores. Além disso, os métodos explícitos e implícitos tendem a convergir ao mesmo resultado à medida que o intervalo de tempo é diminuído.

## 6.9. VIGA ENGASTADA COM ACOPLAMENTO TERMOELÁSTICO

O exemplo anterior é analisado, neste momento, através do acoplamento termomecânico na estrutura, admitindo-se os seguintes parâmetros termoelásticos:

$$k = 52 \text{ J}/(^{\circ}\text{C m s})$$

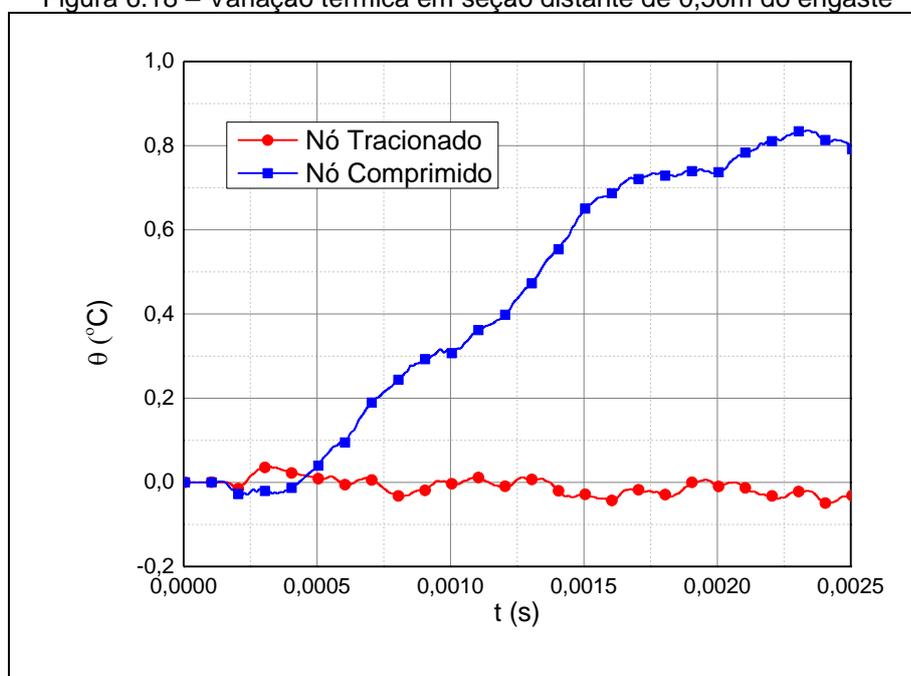
$$c_e = 477 \text{ J}/(^{\circ}\text{C kg})$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ m}/(\text{°C m}) \quad \theta_0 = 27 \text{ °C}$$

Devido à grande robustez, as deformações oriundas da variação térmica pouco influenciaram no deslocamento estrutural, não conduzindo a diferenças significativas na resposta dinâmica puramente mecânica com aquela causada pela parcela térmica.

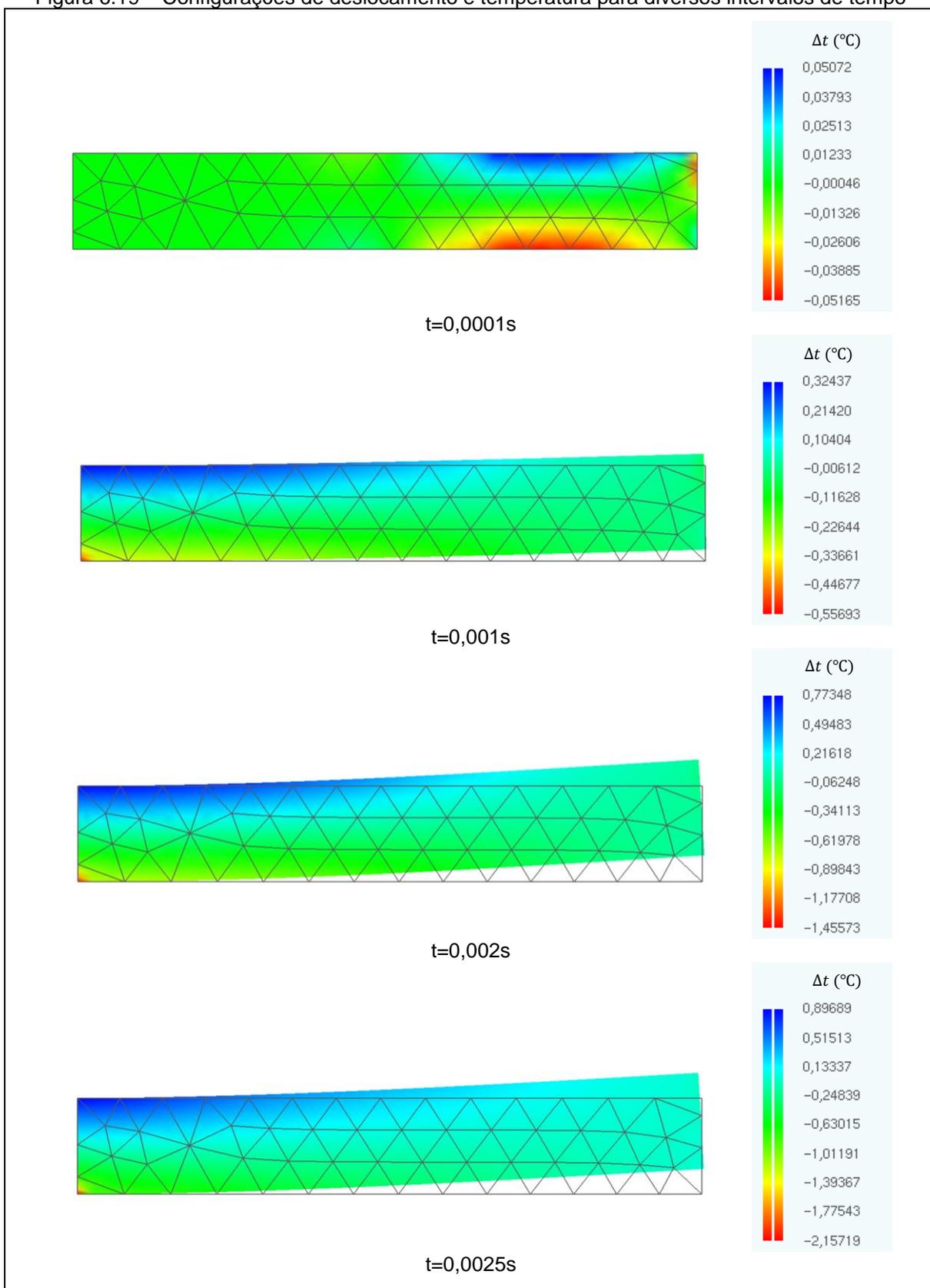
O gráfico da Figura 6.18 mostra a variação de temperatura ao longo do tempo para as extremidades da seção localizada a 0,5 metros do engaste. Nela, é possível verificar o aumento da variação térmica no nó que está sujeito à compressão, enquanto que o nó que sofre tração, a variação de temperatura assume valores preponderantemente negativos, corroborando o Efeito Gough-Joule.

Figura 6.18 – Variação térmica em seção distante de 0,50m do engaste



Diversas configurações mostrando a variação de temperatura ao longo de toda a estrutura pode ser vista na Figura 6.19, na qual as regiões expostas à compressão sofrem um aumento na temperatura. Já nas regiões tracionadas, se verifica a variação negativa.

Figura 6.19 – Configurações de deslocamento e temperatura para diversos intervalos de tempo



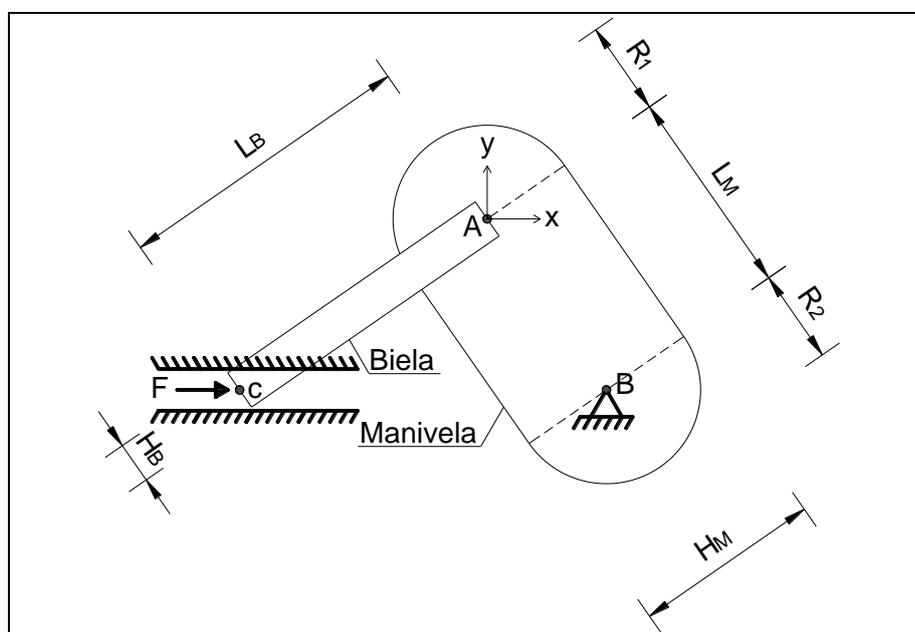
## 6.10. CONJUNTO BIELA-MANIVELA

Neste exemplo, verifica-se a eficiência dos algoritmos de integração temporal na análise do comportamento de um conjunto biela-manivela, abordado por Marques (2006). Desta forma, a Figura 6.20 evidencia o esquema de funcionamento do conjunto estrutural, composto por um braço mecânico, denominado biela, e uma manivela, com maior robustez. A biela é articulada no ponto  $C$  e presa à manivela no ponto  $A$ , enquanto que o ponto  $B$  representa o eixo em torno do qual gira a manivela.

São consideradas as seguintes propriedades mecânicas e geométricas:

$E = 210 \cdot 10^9 \text{ kg/cm}^2$	$c_m = 5 \text{ s}^{-1}$	$\rho = 0,0079 \text{ kg/cm}^3$
$L_B = 14,4 \text{ cm}$	$H_B = 2 \text{ cm}$	$h_B = 1 \text{ cm}$
$L_M = 10,0 \text{ cm}$	$H_M = 9 \text{ cm}$	$h_M = 1 \text{ cm}$
$R_1 = 4,50 \text{ cm}$	$R_2 = 4,50 \text{ cm}$	$\nu = 0$

Figura 6.20 – Esquema do conjunto biela-manivela



Para a análise, utiliza-se uma malha de 312 elementos finitos com variação temporal de  $0,00025 \text{ s}$  numa primeira análise e  $0,00005 \text{ s}$  numa outra. Além disso, considera-se o carregamento com intensidade de  $F = 100000 \text{ kg/cm}^2$ .

A aplicação do carregamento é realizada no momento de ida em uma revolução. Na volta, considera-se que a estrutura sofre descarregamento, ocorrendo uma recarga no início de novo ciclo, situação correspondente ao máximo aproveitamento da força.

A seguir, por meio das Figuras 6.21 e 6.22, são apresentadas algumas configurações de deslocamento da estrutura para diversos intervalos de tempo, utilizando-se como modelo de integração, o método de Houbolt. Por essa análise, constata-se que o tempo necessário para a realização do ciclo atual é menor que o observado para o seu anterior, o que condiz com Marques (2006), no qual foi determinada a velocidade angular do sistema, que aumenta ao longo do tempo até atingir valor constante.

Figura 6.21 – Configurações de deslocamento para o primeiro ciclo de rotação

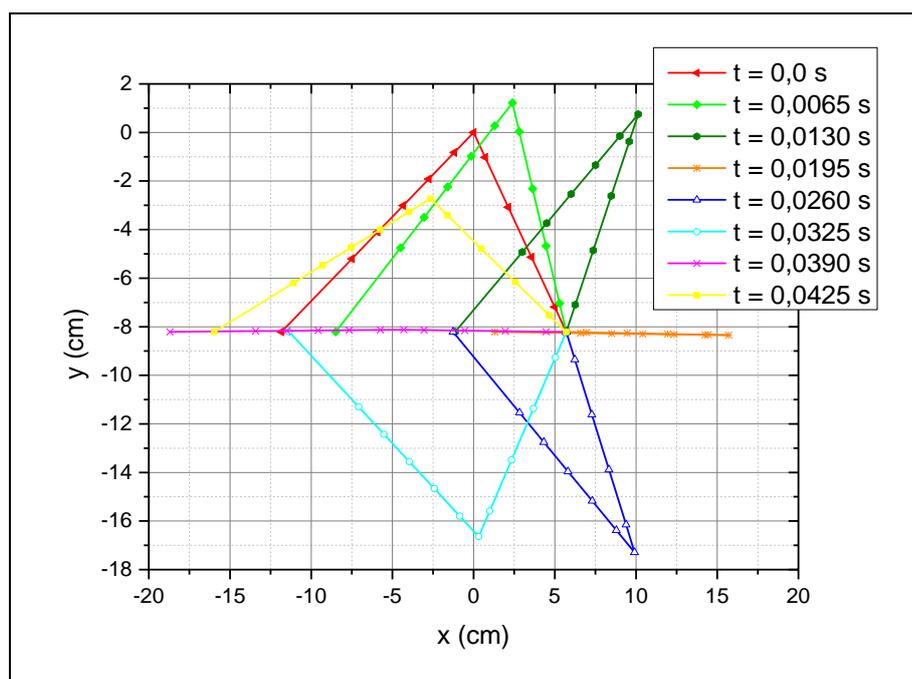
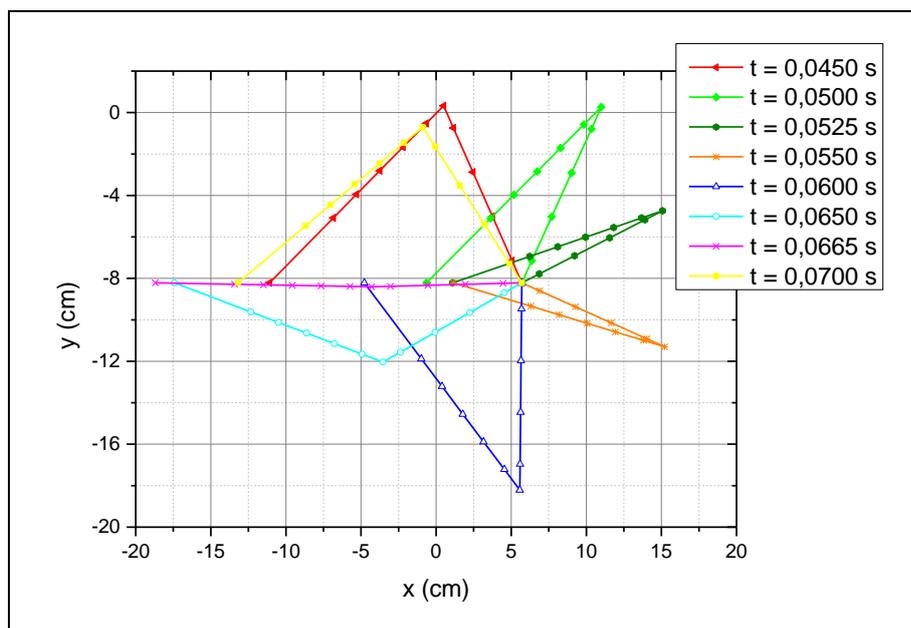


Figura 6.22 – Configurações de deslocamento para o segundo ciclo de rotação

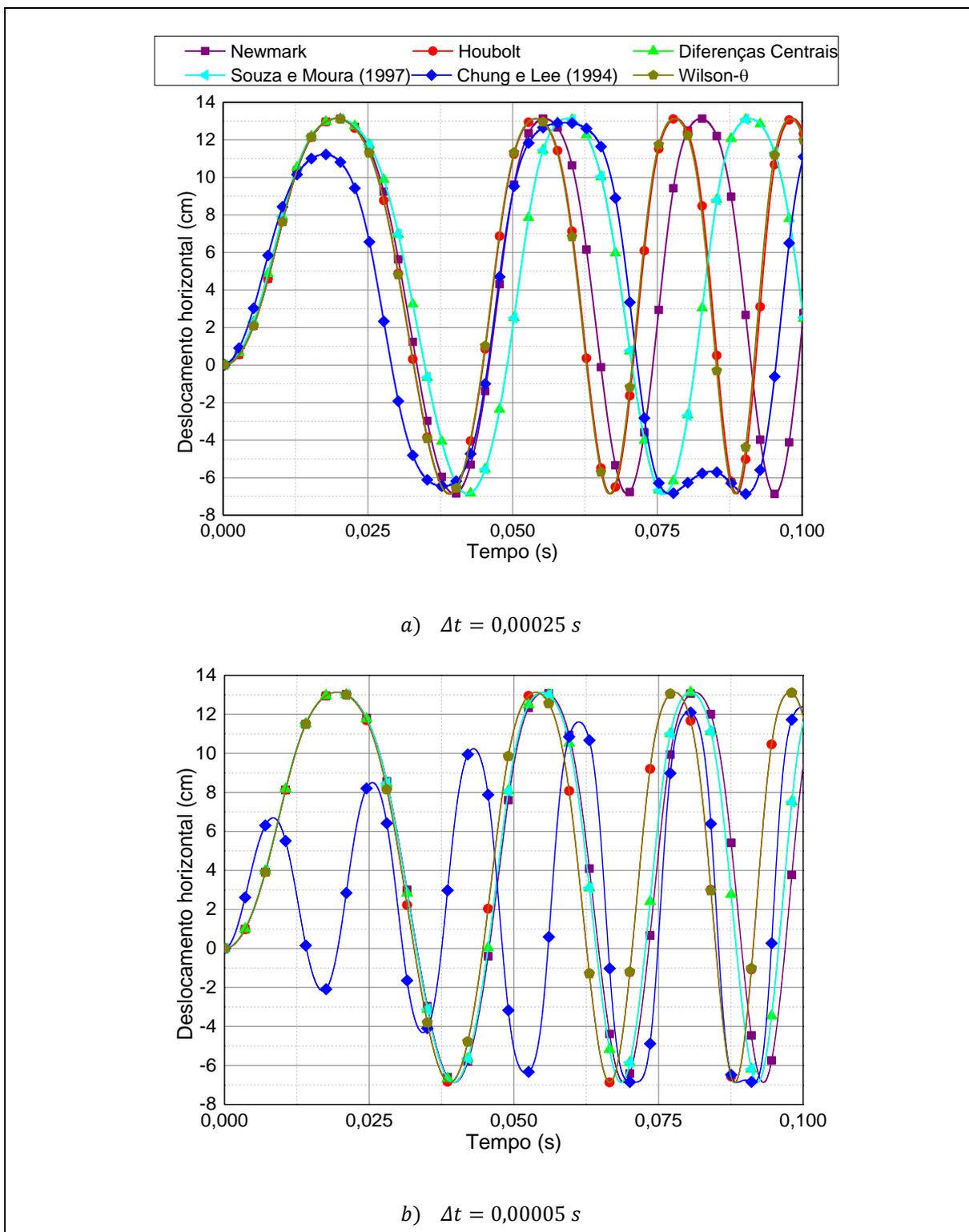


Como forma de avaliar o desempenho dos algoritmos de integração temporal neste exemplo, são apresentados os resultados de deslocamento horizontal para o ponto de aplicação de carga. Então, na Figura 6.23, observa-se uma tendência na convergência dos resultados quando a discretização é realizada com passo de tempo menor.

Além disso, os algoritmos de Souza & Moura (1997) e Diferenças Centrais exibiram comportamento idêntico, apresentando resultados com período de revolução superior aos demais métodos pelo fato de serem altamente dissipativos. O modelo proposto por Chung & Lee (1994) mostrou-se ineficaz na convergência dos resultados.

Os métodos de Houbolt e Wilson- $\theta$  mostraram-se bastante consistentes, apresentando resultados bem próximos, independente da variação temporal adotada. Já o método de Newmark proporcionou tendência à convergência à medida que o passo de tempo diminuía.

Figura 6.23 – Comparação dos resultados para a posição horizontal do ponto de aplicação de carga



### 6.11. CONJUNTO BIELA-MANIVELA COM ACOPLAMENTO TERMO-ELÁSTICO

O comportamento termomecânico do conjunto biela-manivela apresentado no exemplo anterior é aqui investigado. É considerado o modelo de Houbolt para a discretização temporal, dada a convergência para intervalos de tempo maiores. O número dos elementos finitos e os dados mecânicos e geométricos permanecem os mesmos. No entanto, como o problema original não aborda o campo térmico, adota-se os seguintes parâmetros para o aço de baixa liga:

$$k = 52 \text{ J}/^\circ\text{C m s} = 5200 \text{ kg cm}^2 \text{ s}^{-2}/^\circ\text{C cm s}$$

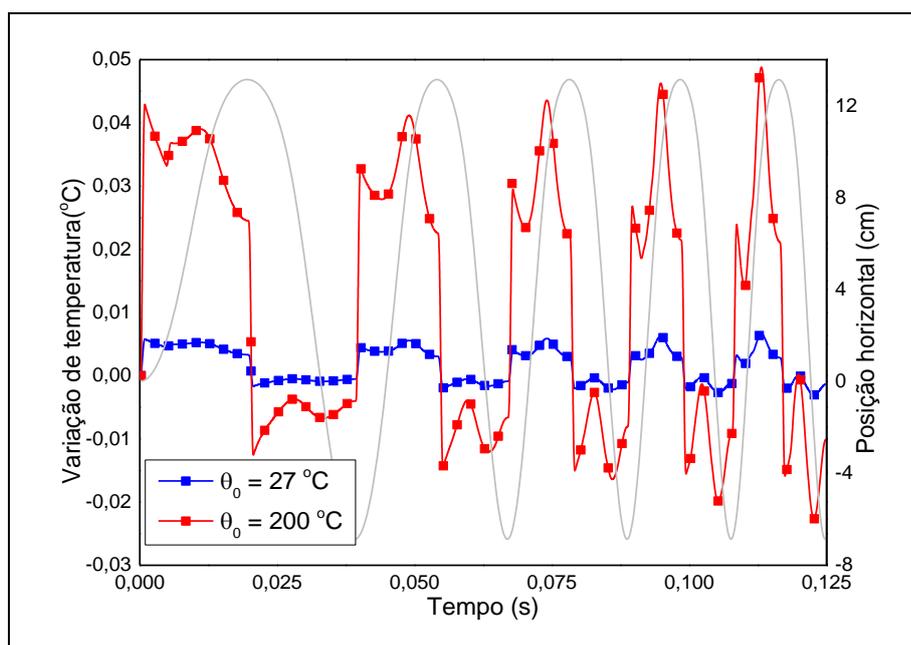
$$c_e = 477 \text{ J}/\text{kg } ^\circ\text{C} = 4770000 \text{ kg cm}^2/\text{kg } ^\circ\text{C s}^2$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

São considerados duas temperaturas de referência,  $\theta_0 = 27 \text{ } ^\circ\text{C}$  e  $\theta_0 = 200 \text{ } ^\circ\text{C}$ , o que permite constatar a influência deste parâmetro na variação de temperatura. Em virtude da elevada robustez do sistema, a temperatura não produziu deformações suficientes para modificar a resposta dinâmica da estrutura.

A Figura 6.24 ilustra a variação de temperatura ao longo do tempo no ponto de aplicação da força. Verifica-se que há uma região de variação positiva de temperatura, que incide no momento de ida da revolução, caracterizada pela aplicação da força, e outra negativa, na qual a estrutura volta ao estado inicial. A cada novo ciclo, as taxas de deformação se intensificam devido ao aumento da velocidade angular, o que proporciona, desta forma, um aumento na temperatura para cada nova revolução, até que a frequência de giro seja constante.

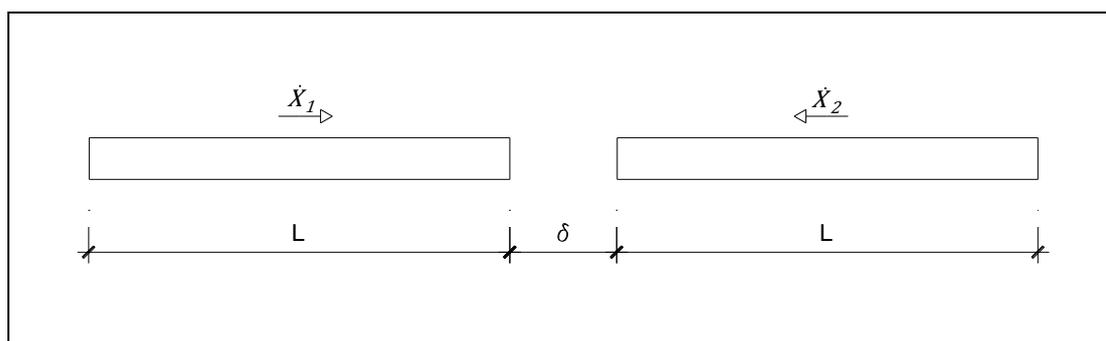
Figura 6.24 – Variação de temperatura no ponto de aplicação de carga



## 6.12. IMPACTO UNIDIRECIONAL ENTRE DUAS BARRAS

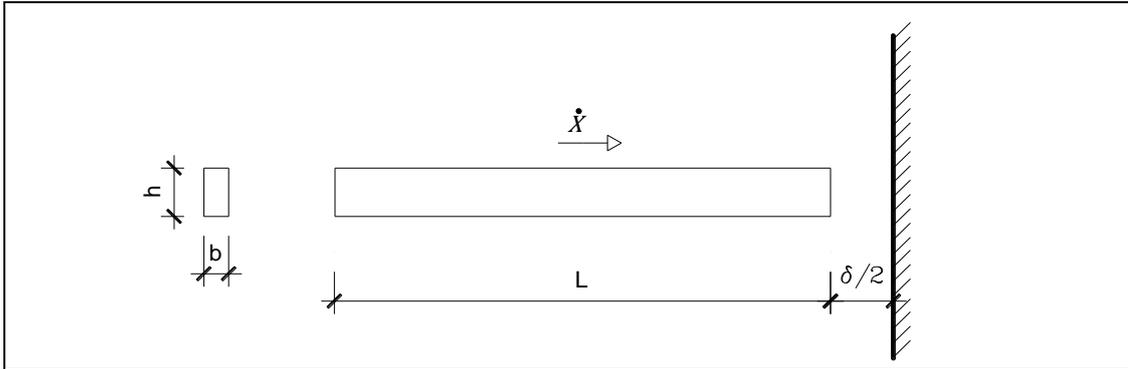
Proposto inicialmente por Carpenter *et al.* (1991), este exemplo avalia o impacto entre duas barras elastoplásticas (figura 6.25), não considerando a geração de calor oriunda das deformações estruturais.

Figura 6.25 - Esquema das duas barras



Em conformidade a Greco (2004) e Marques (2006), o problema pode ser simplificado a uma análise de impacto entre barra e anteparo rígido, de acordo com a figura 6.26, uma vez que as duas barras apresentam a mesma velocidade.

Figura 6.26 - Esquema de impacto entre barra e anteparo rígido



São consideradas as seguintes propriedades mecânicas e geométricas:

$$\begin{aligned}
 E &= 30000 \text{ ksi} & \nu &= 0 \\
 \dot{X} &= 202,2 \text{ pol/s} & \delta &= 0,02 \text{ pol} \\
 \rho &= 7,337 \cdot 10^{-4} \text{ lb s}^2/\text{pol}^4 & c_m &= 0 \text{ s}^{-1} \\
 L &= 10 \text{ pol} & b &= 1 \text{ pol} \\
 h &= 1 \text{ pol}
 \end{aligned}$$

A solução analítica, apresentada por Carpenter *et al.* (1991), é dada por:

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned} u_{imp} &= \dot{x}t \\ \dot{y}_{imp} &= \dot{x} \end{aligned} \right\} \forall t \leq t_{impacto} \\
 & \left. \begin{aligned} u_{imp} &= 0 \\ \dot{y}_{imp} &= 0 \end{aligned} \right\} \forall t_{impacto} \leq t \leq t_{separação} \\
 & \left. \begin{aligned} u_{imp} &= 2\dot{x} \left( \frac{\delta}{\dot{x}} + \sqrt{\frac{l_o^2 \rho}{E} - \frac{t}{2}} \right) \\ \dot{y}_{imp} &= -\dot{x} \end{aligned} \right\} \forall t \geq t_{separação}
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Em que  $u_{imp}$  corresponde ao deslocamento do nó impactante e  $\dot{y}_{imp}$  se refere à velocidade do nó,  $\dot{x}$  é a velocidade inicial da barra,  $\delta$  é a distância entre barra e anteparo e  $l_o$  é o comprimento inicial da barra. O tempo necessário para haver impacto e separação entre barra e anteparo rígido é dado, respectivamente, por:

$$\begin{aligned}
 t_{impacto} &= \frac{\delta}{\dot{x}} \\
 t_{separação} &= \frac{\delta}{\dot{x}} + 2L \sqrt{\frac{\rho}{E}}
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

Investiga-se, neste exemplo, o comportamento do deslocamento e da velocidade dos nós impactantes para mediante diferentes métodos de integração

temporal, explícitos e implícitos. Para isso, a barra é discretizada numa malha de 80 elementos finitos, com variação temporal  $\Delta t = 0,5 \cdot 10^{-6} s$ .

As Figuras 6.27, 6.28 e 6.29 mostram a solução numérica para o deslocamento, a força de contato e a velocidade do nó da extremidade que sofre impacto, respectivamente.

Figura 6.27 - Deslocamento da região impactante da estrutura

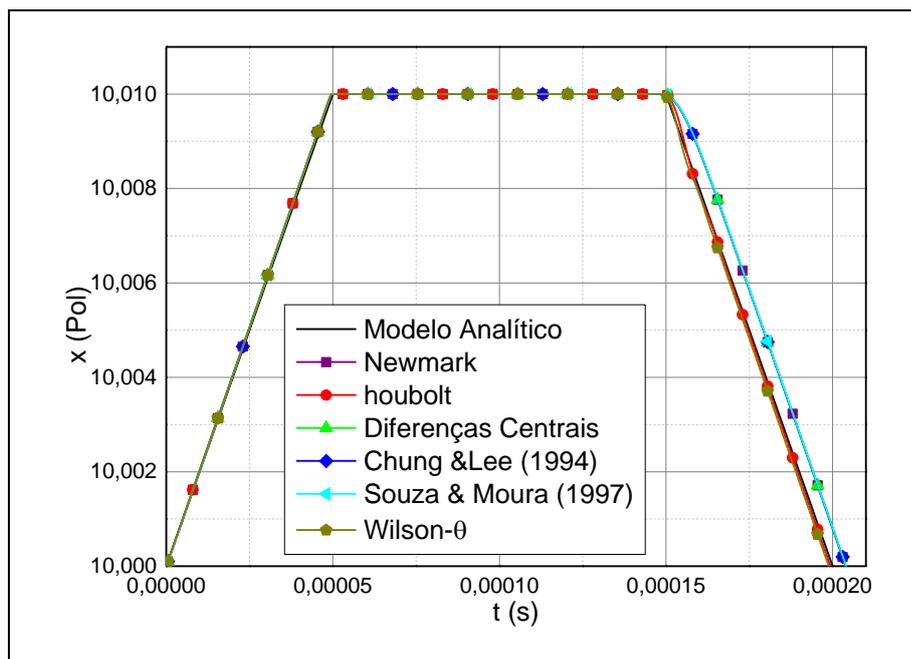


Figura 6.28 – Força de contato da superfície impactante

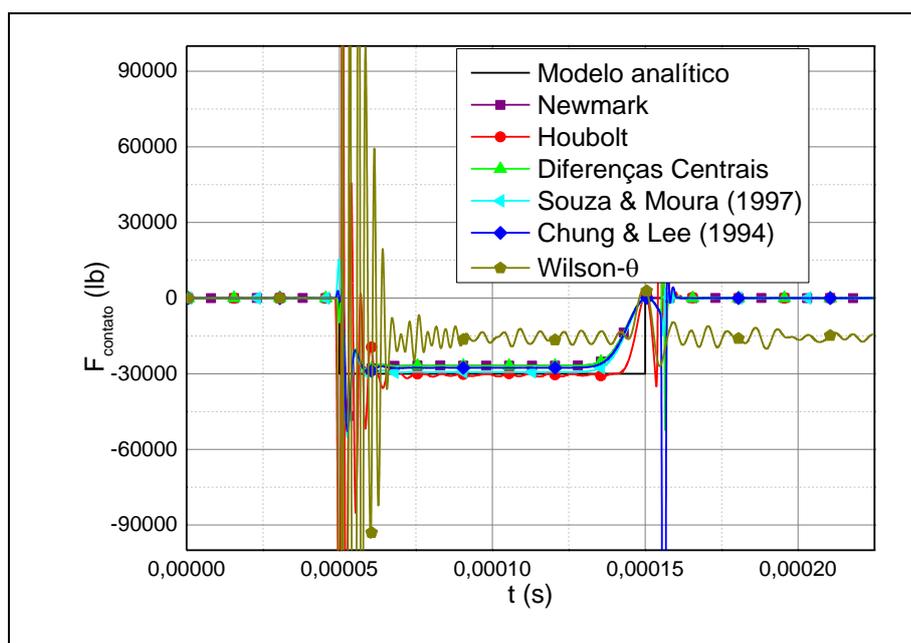
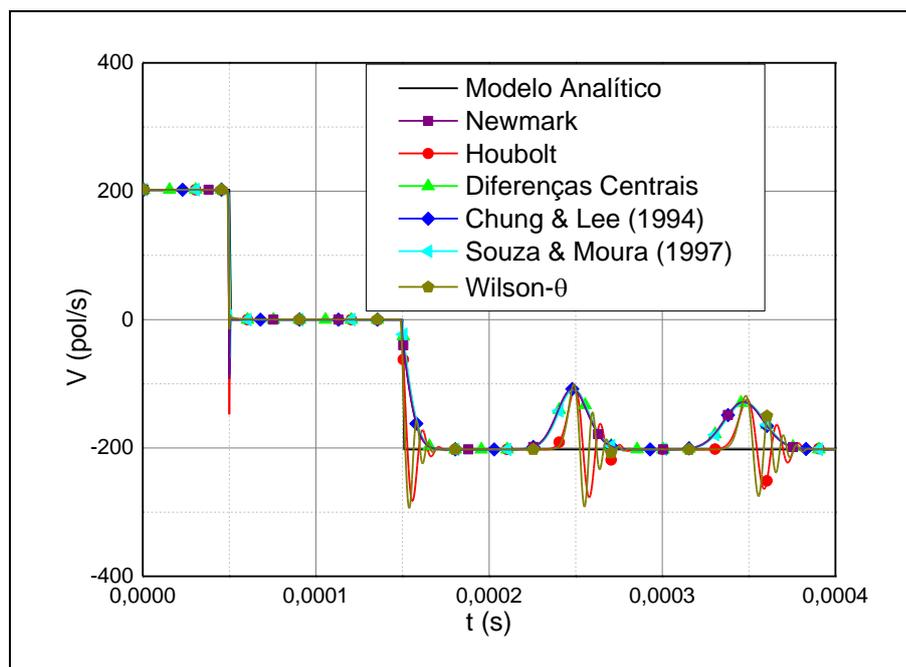


Figura 6.29 - Velocidade da superfície impactante



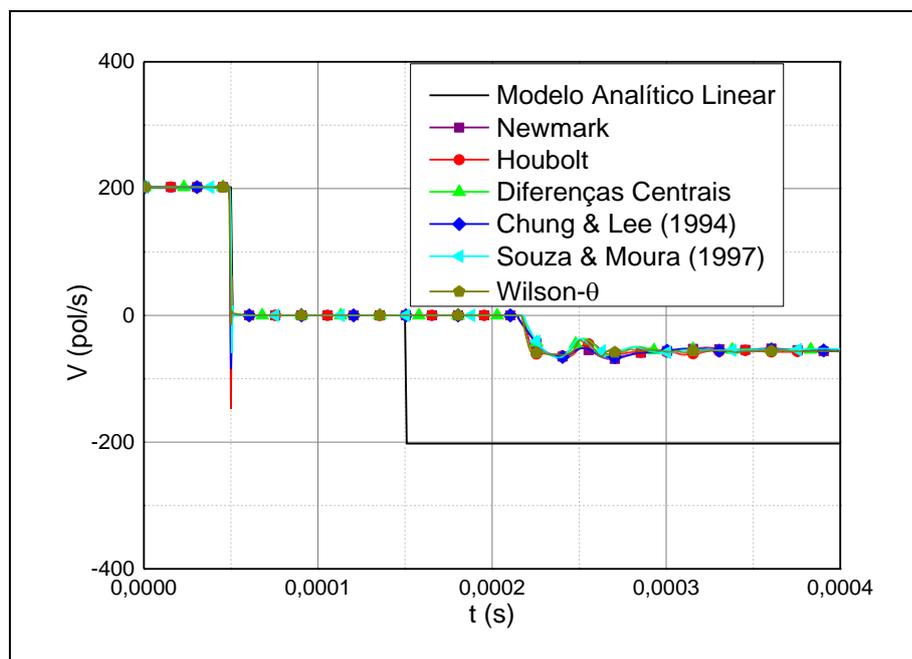
Constata-se, na figura 6.29, que o impacto provoca um salto de velocidade na extremidade da barra. No entanto, modelos de integração temporal explícitos, tal como o método das diferenças centrais, apresentam oscilações discretas no momento do impacto, quando comparados aos modelos implícitos, aproximando-se do resultado analítico. Pelo fato de ser um método multipasso, o método de Houbolt apresenta elevadas perturbações em torno do momento do impacto. Os métodos de Chung & Lee (1994) e Newmark comportam-se de maneira semelhante, em que se observa um breve salto de velocidade no momento do impacto, convergindo, em seguida ao resultado analítico. O método de Souza & Moura (1997) converge rapidamente à resposta analítica, no entanto, apresentando baixas oscilações de velocidade no momento do impacto.

O método de Wilson- $\theta$  apresentou oscilação na resposta inerente à velocidade após o impacto, quando comparada à analítica, durando até o instante de tempo igual a 0,0001s.

No momento da separação, pode-se observar que o método de Houbolt, assim como o método de Wilson- $\theta$ , apresenta melhor desempenho quando comparado ao resultado analítico, atingindo a velocidade de separação mais rapidamente, no entanto, ocorrendo uma oscilação acentuada. Além disso, em conformidade com a



Figura 6.31 – Velocidade da superfície impactante considerando-se modelo elastoplástico com encruamento isotrópico

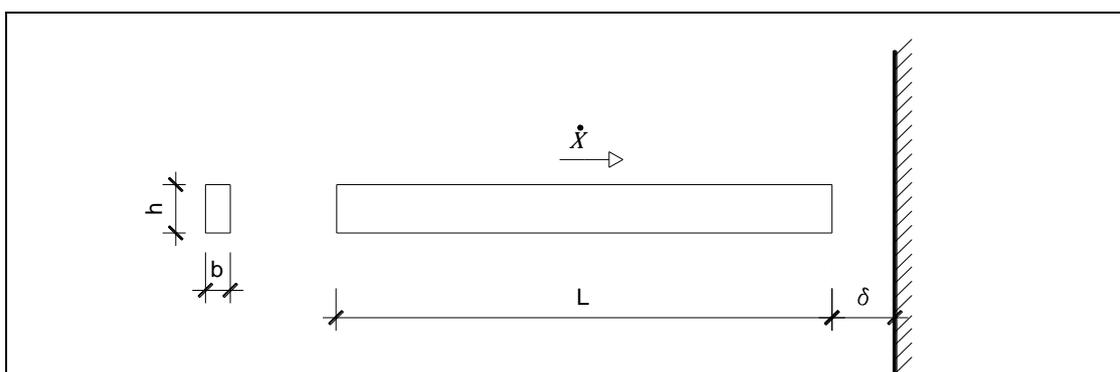


Conforme Figura 6.30, verifica-se que o tempo de contato entre a barra e o anteparo é maior. A intensidade da velocidade após a separação é menor que a observada no modelo elástico linear. Esse fenômeno pode ser explicado pela dissipação de energia decorrente das deformações plásticas.

### 6.13. IMPACTO UNIDIRECIONAL ENTRE BARRA E ANTEPARO RÍGIDO COM ACOPLAMENTO TERMOMECÂNICO

Este exemplo consiste em avaliar o impacto de uma barra, de comprimento e altura unitários, que está sujeita ao impacto unidirecional considerando uma análise termoelástica, conforme Figura 6.32.

Figura 6.32- Esquema de impacto entre barra e anteparo rígido



Este exemplo, sob uma análise puramente mecânica, foi inicialmente abordado por Armero & Petocz (1998), e em seguida por Marques (2006) e Maciel (2008). Cavalcante (2016), assim como Silva (2017) apresentaram resultados considerando o acoplamento termomecânico, que servirão de referência para a validação do termo de geração de calor em problemas de impacto.

São consideradas as seguintes propriedades mecânicas e geométricas:

$$\begin{aligned} E &= 1 & \nu &= 0 \\ \dot{X} &= 0,5 & \delta &= 0,05 \\ \rho &= 1 & c_m &= 0 \\ L &= 1 & b &= 1 \\ h &= 1 \end{aligned}$$

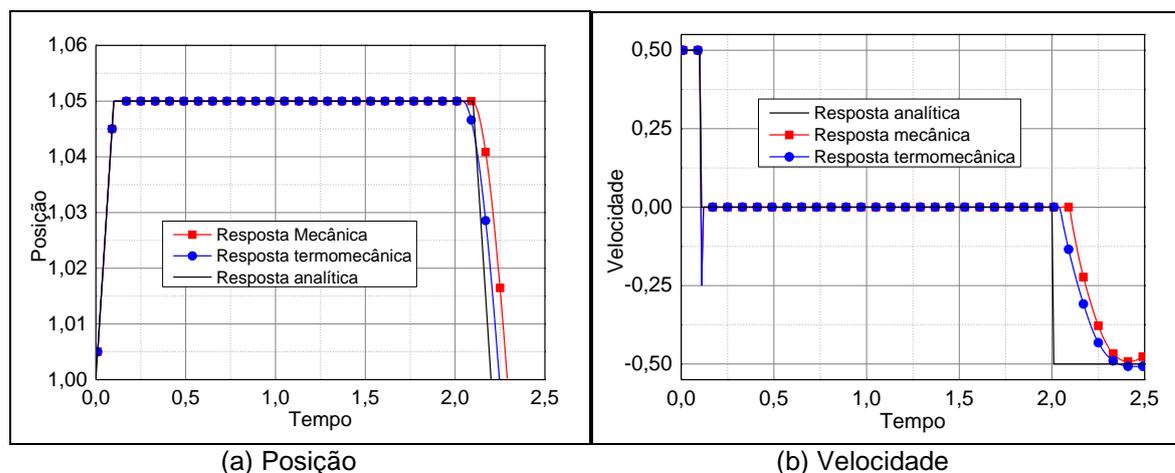
Como forma de simplificação, adota-se valores adimensionais para o problema. Além disso, despreza-se o amortecimento e atrito no impacto, assim como os efeitos elastoplásticos. A estrutura é discretizada numa malha de 244 elementos finitos com variação temporal  $\Delta t = 0,05$ , e, de acordo com Silva (2017), são adotados os seguintes parâmetros térmicos:

$$\begin{aligned} c_e &= 1 & k &= 1 \\ \alpha &= 0,11 & \theta_0 &= 10 \end{aligned}$$

Cavalcante (2016) e Silva (2017) consideraram o modelo de Newmark como método de integração temporal para a análise térmica do impacto, o que corrobora com a investigação apresentada no Exemplo 6.6, na qual verificou-se sua eficiência. Assim sendo, tal modelo será adotado para o problema de impacto deste estudo.

Pode-se observar, por meio da Figura 6.33-a, a comparação dos resultados da posição para uma análise mecânica e termomecânica, com a solução analítica elástica linear do problema.

Figura 6.33 - comparativo de posição e velocidade para problema mecânico e termomecânico

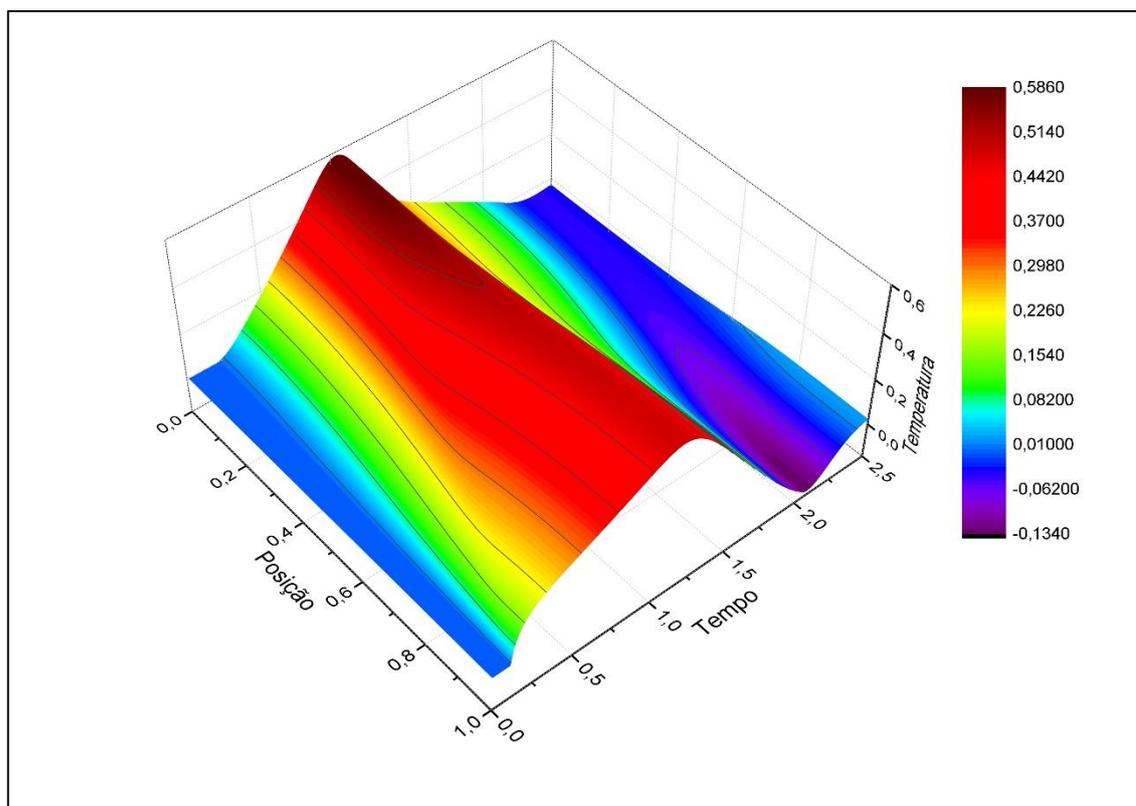


Antes do impacto, as respostas apresentadas pelos modelos são iguais, dado que não há deformação em tal momento. Os efeitos térmicos em problemas de impacto causam a redução do tempo de contato, uma vez que há desprendimento de energia para a geração de calor.

Os modelos mecânico e termomecânico, conforme Figura 6.33-b, apresentam velocidades da extremidade impactante iguais até o instante de 2,04, a partir do qual a diferença entre modelos aumenta no decorrer do tempo.

A mudança de temperatura da barra ao longo do tempo apresentou comportamento bastante próximo aos obtidos pelas referências, como pode ser constatado na Figura 6.34.

Figura 6.34 - Mudanças de temperatura da barra no problema de impacto



Conforme esperado, a temperatura do corpo sofre variação apenas após o instante de impacto, dada a ocorrência de deformações. Com a ocorrência de impacto, a estrutura fica submetida a esforços de compressão, os quais contribuem para o aumento de temperatura. Após o tempo de 1,05, o corpo tende a se alongar, de forma a recuperar a energia cinética perdida no impacto, caracterizando a diminuição de temperatura.

#### 6.14. IMPACTO UNIDIRECIONAL ENTRE DUAS BARRAS COM ACOPLAMENTO TERMOMECÂNICO

Apresentado anteriormente como exemplo puramente mecânico, busca-se, neste caso, avaliar o comportamento termomecânico do impacto através de uma análise elástica e outra elastoplástica, observando-se o efeito do encruamento.

Da mesma forma, barra é discretizada numa malha de 80 elementos finitos, com variação temporal  $\Delta t = 0,5 \cdot 10^{-6} s$ . Considera-se o método de Newmark como procedimento de integração temporal. Além disso, de acordo com Carrazedo (2009), foram consideradas as seguintes propriedades térmicas:

$$k = 1,741 \text{ lb}/(^{\circ}\text{Fs}) \quad c_e = 1119,81 \text{ lb s}^2/\text{pol}^4$$

$$\alpha_1 = 9,7 \cdot 10^{-6} \text{ pol}/(^{\circ}\text{F pol}) \quad \alpha_2 = 9,7 \cdot 10^{-7} \text{ pol}/(^{\circ}\text{F pol})$$

$$\theta_0 = 68 \text{ }^{\circ}\text{F}$$

De início, realiza-se uma análise avaliando apenas a resposta elástica do material, considerando-se duas configurações para valores de coeficiente de dilatação térmica. A primeira considera  $\alpha_1 = \alpha_2$ , e a segunda considera  $\alpha_1 \geq \alpha_2 = 9,7 \cdot 10^{-7} \text{ pol}/(^{\circ}\text{F pol})$ .

Nesse contexto, a Figura 6.35-a mostra que o tempo de contato entre a barra e o anteparo é diminuído à medida que o coeficiente de dilatação térmica é aumentado. Conforme Carrazedo (2009), isso se deve ao fato de haver uma irreal perda de energia que se converte em calor. Por outro lado, a intensidade da força de contato (Figura 6.35-b) é aumentada à medida que o coeficiente de dilatação térmica cresce. Para um valor de  $\alpha_1$  maior que  $\alpha_2$ , a diferença no tempo de contato é menos acentuada, como também ocorre na força de contato, mas também com a velocidade de retorno, como pode ser observado na Figura 6.36.

Figura 6.35 - Influência da temperatura na posição e força de contato da superfície impactante

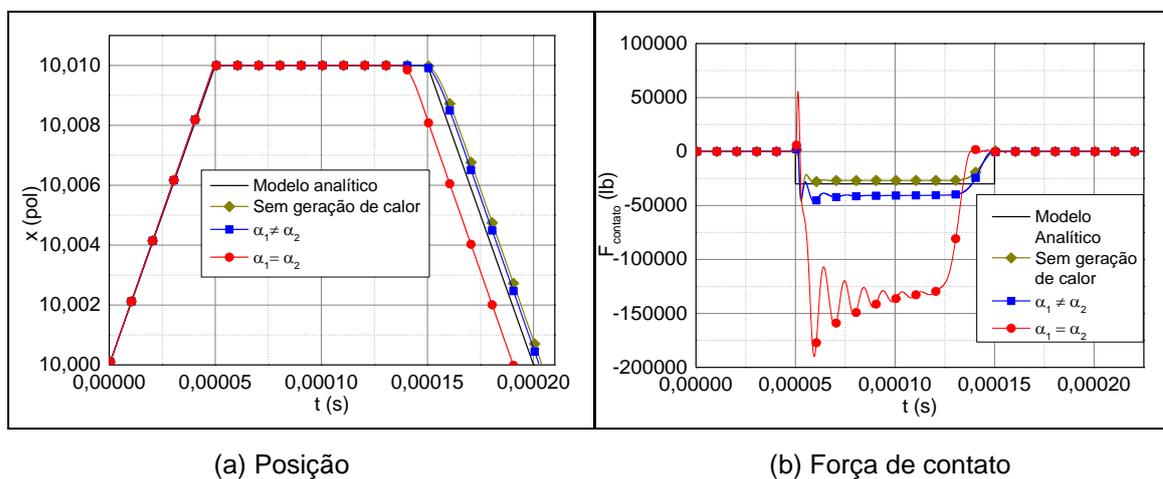
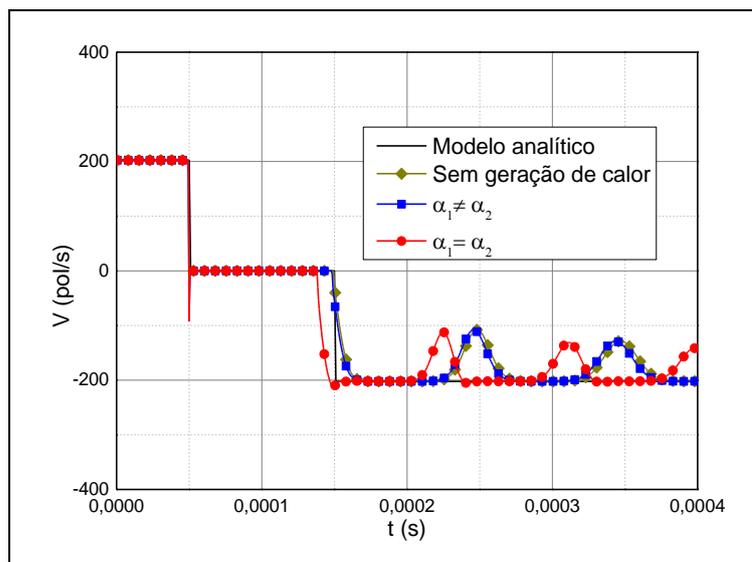
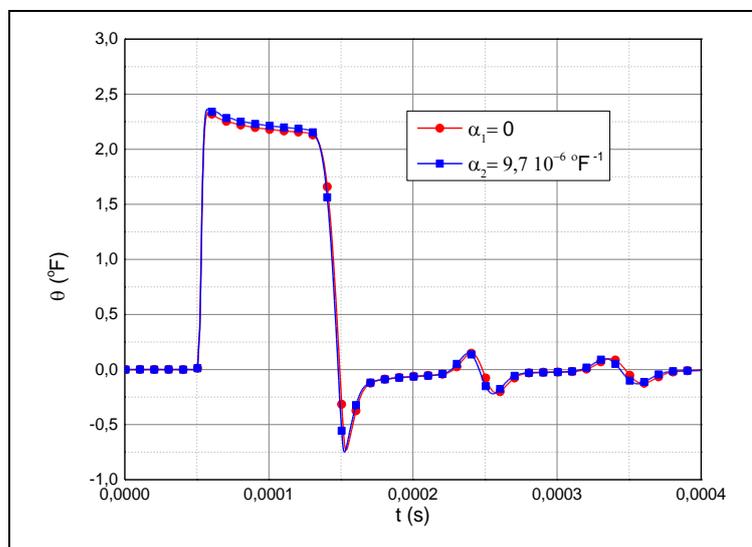


Figura 6.36 - Influência da temperatura na velocidade da superfície impactante



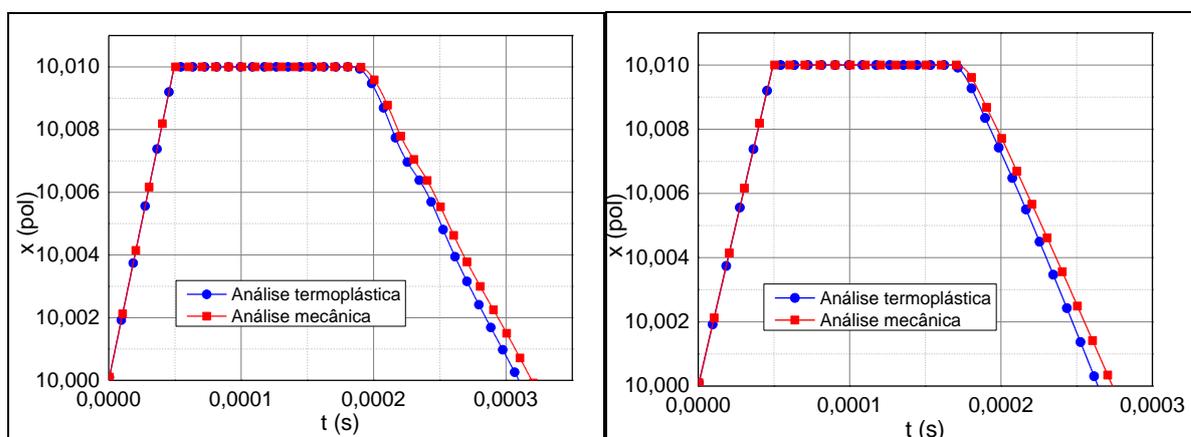
Na Figura 6.37, verifica-se a mudança de temperatura de um nó que se encontra na posição  $x = 9,5 \text{ pol}$ , provocada pelas deformações elásticas oriundas do impacto.

Figura 6.37 – Variação de temperatura para a superfície localizada em  $x = 9,5 \text{ in}$



A partir de então, considera-se o efeito não linear físico, adotando-se como limite de escoamento  $\sigma_y = 10 \text{ ksi}$ , e analisando-se o efeito do encruamento na geração de calor. Para isso, adota-se como parâmetro de encruamento  $H = 5000 \text{ ksi}$  e  $H = 15000 \text{ ksi}$ . Além disso, considera-se  $\alpha_1 \geq \alpha_2 = 9,7 \cdot 10^{-7} \text{ pol}/(^\circ\text{F pol})$ .

Figura 6.38 - Influência da temperatura na posição da superfície impactante, considerando efeitos elastoplásticos

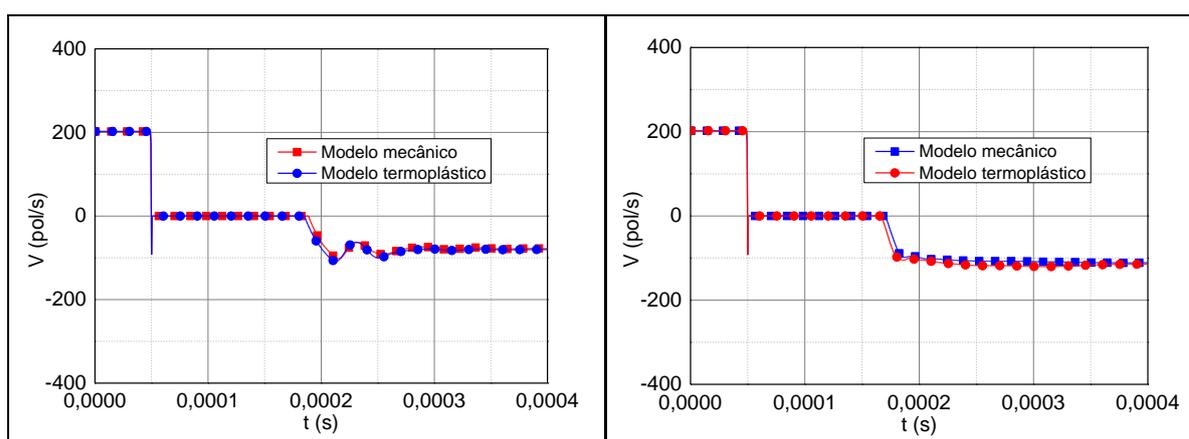


(a) Encruamento de 5000 ksi

(b) Encruamento de 15000 ksi

A Figura 6.38 permite observar que a consideração de um aumento na intensidade do encruamento contribui com um menor tempo de contato entre o nó impactante e o anteparo, da mesma forma que a velocidade de retorno tende a aumentar. Conforme Greco (2004) e Carrazedo (2009), este fato é proveniente da menor energia empregada na deformação da estrutura com a diminuição do encruamento e maior dissipação de energia.

Figura 6.39 - Influência da temperatura na velocidade da superfície impactante, considerando efeitos elastoplásticos



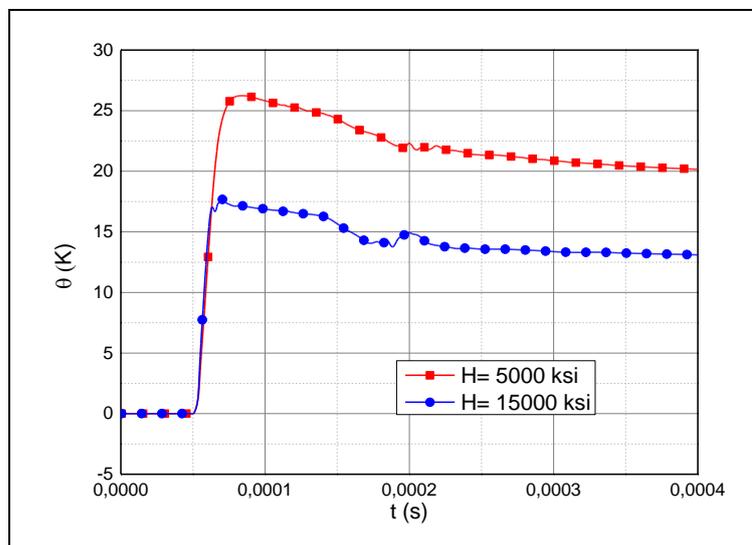
(a) Encruamento de 5000 ksi

(b) Encruamento de 15000 ksi

A velocidade na superfície impactante, conforme Figura 6.39, quando considerados efeitos térmicos, tende a assumir valores próximos aos obtidos em uma análise puramente mecânica. Além disso, o aumento do módulo do encruamento

contribui com acréscimo da intensidade de velocidade, causado pelo ganho energético devido ao encruamento.

Figura 6.40 – Variação de temperatura, considerando efeitos elastoplásticos



Como esperado, o gasto maior de energia necessária na deformação quando se considera um maior endurecimento permite o menor desprendimento de energia para geração de calor, fenômeno observado na Figura 6.40, na qual a mudança de temperatura se mostra mais intensa para uma menor intensidade de encruamento.

#### 6.15. IMPACTO PARCIAL ENTRE DUAS BARRAS COM ACOPLAMENTO TERMOMECAÂNICO

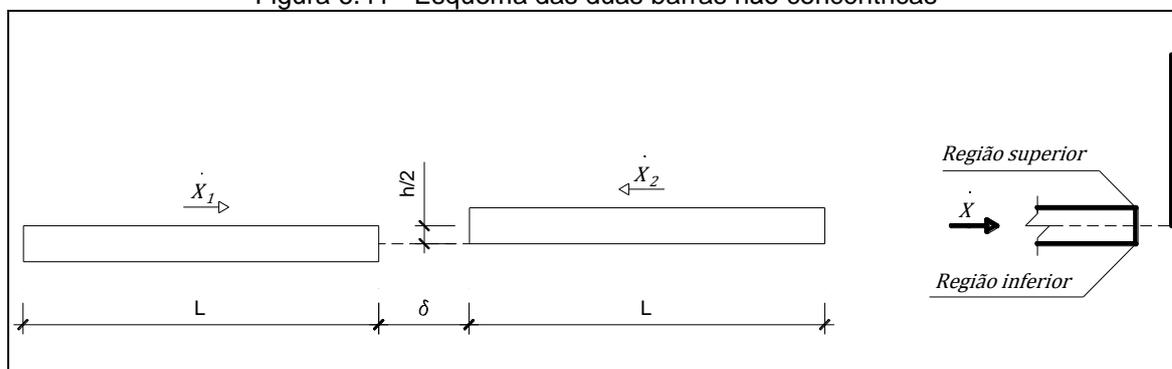
Esta situação proposta é semelhante ao exemplo 6.14, com a diferença de que o impacto ocorre parcialmente entre as barras. De maneira a simplificar, considera-se um anteparo rígido localizado na posição  $\delta/2$ , entretanto, tendo início à meia altura da barra, o que corresponde ao impacto da metade superior da estrutura, apenas.

É importante destacar que são tomados os mesmos parâmetros termoelásticos e geométricos adotados no exemplo passado.

Dessa forma, busca-se comparar o comportamento estrutural frente a situação anterior, na qual a região impactante correspondia a toda a superfície transversal da barra.

Na Figura 6.42, é mostrado o deslocamento horizontal da barra para os instantes em que ocorre o impacto ( $t = 0,00005 s$ ), durante o impacto ( $t = 0,000075 s$  e  $t = 0,0001 s$ ), e após o impacto ( $t = 0,00015 s$ ).

Figura 6.41 - Esquema das duas barras não concêntricas



Na parte inferior da barra, há uma tendência de continuação de movimento, o que gera deslocamento além da posição do anteparo para aquela região, conforme Figura 6.42-b e c. Após o impacto, no entanto, a região superior da seção tende a voltar mais rapidamente ao estado inicial do sistema, enquanto que na inferior, ocorre o contrário, de acordo com a Figura 6.42-d.

A Figura 6.43 corresponde à posição da superfície impactante ao longo do tempo. É disposto três situações, as quais se referem a pontos localizados na região superior e inferior da seção.

A temperatura do corpo sofre variação apenas após o instante de impacto, conforme a existência de deformações. Os comportamentos ao longo do tempo da variação térmica, para o eixo central dos dois casos em estudo, são bastante semelhantes. Contudo, para o caso de impacto parcial, há uma perturbação na região do impacto, provocando elevadas variações de temperatura. Isso se dá pelo fato de haver uma maior concentração de tensão não uniforme, devido à tendência de deslocamento proporcionada pela região não impactada.

Figura 6.42 – Comparação dos deslocamentos entre impacto entre barras não concêntricas e concêntricas

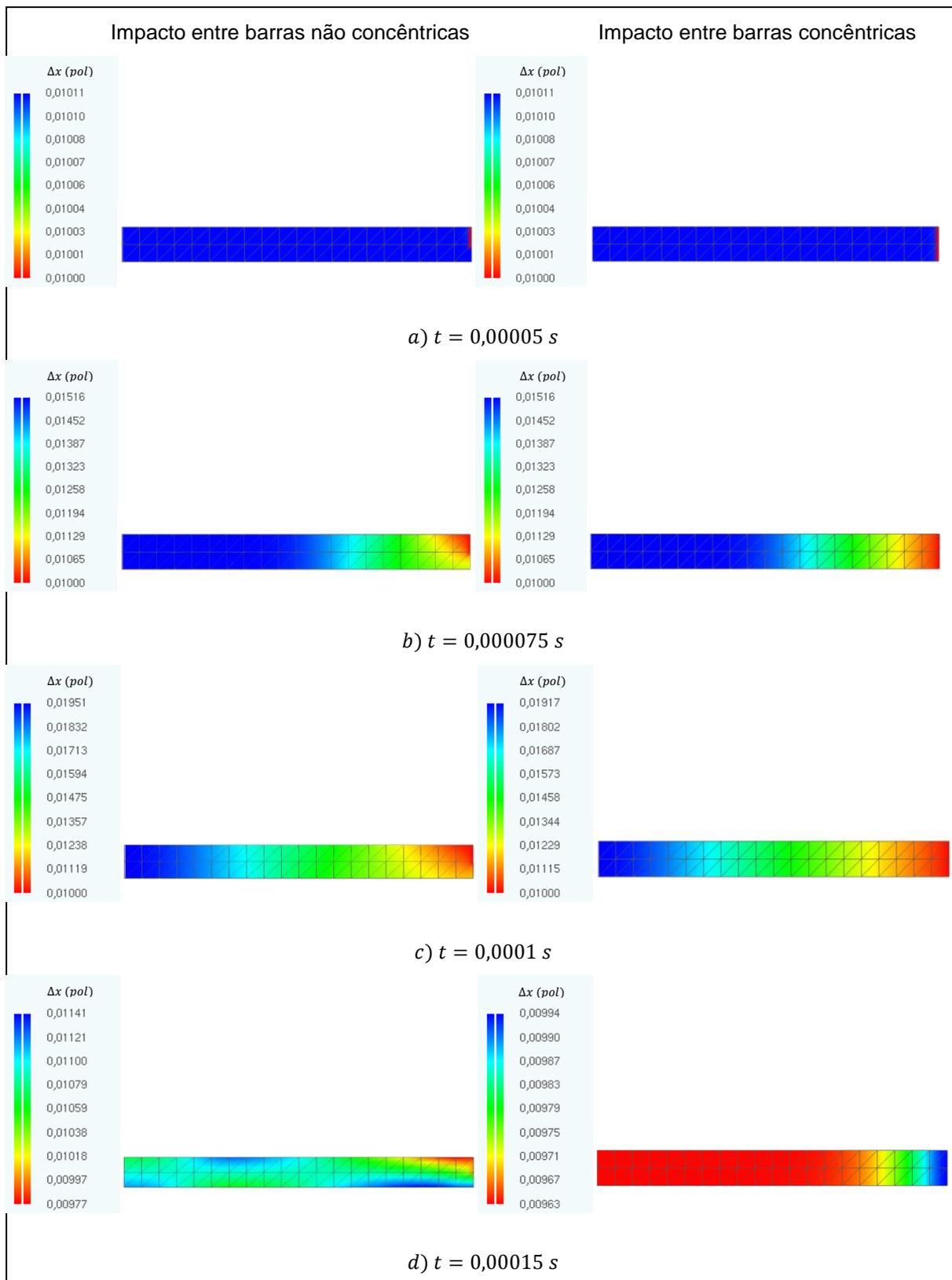
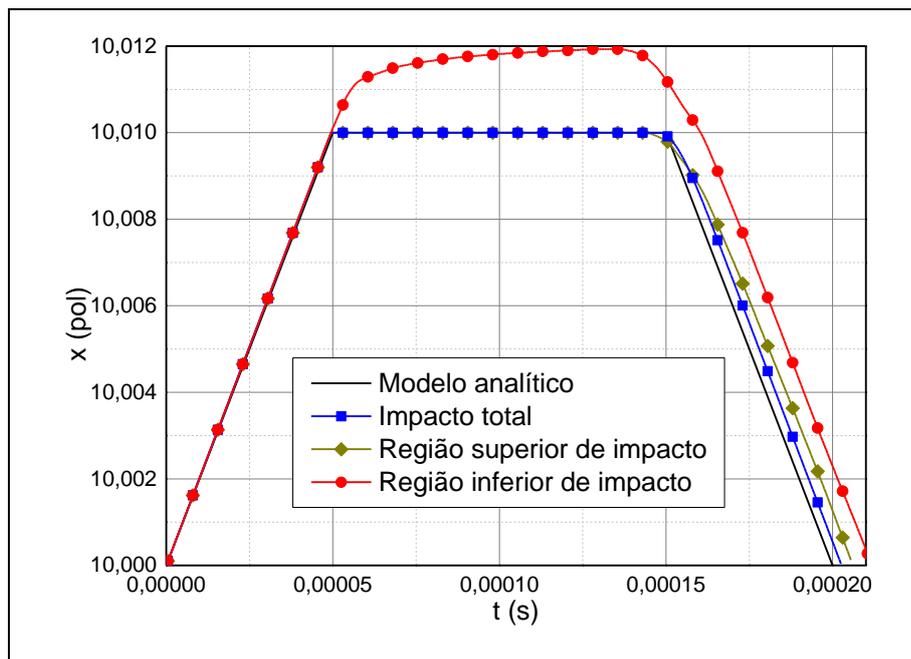


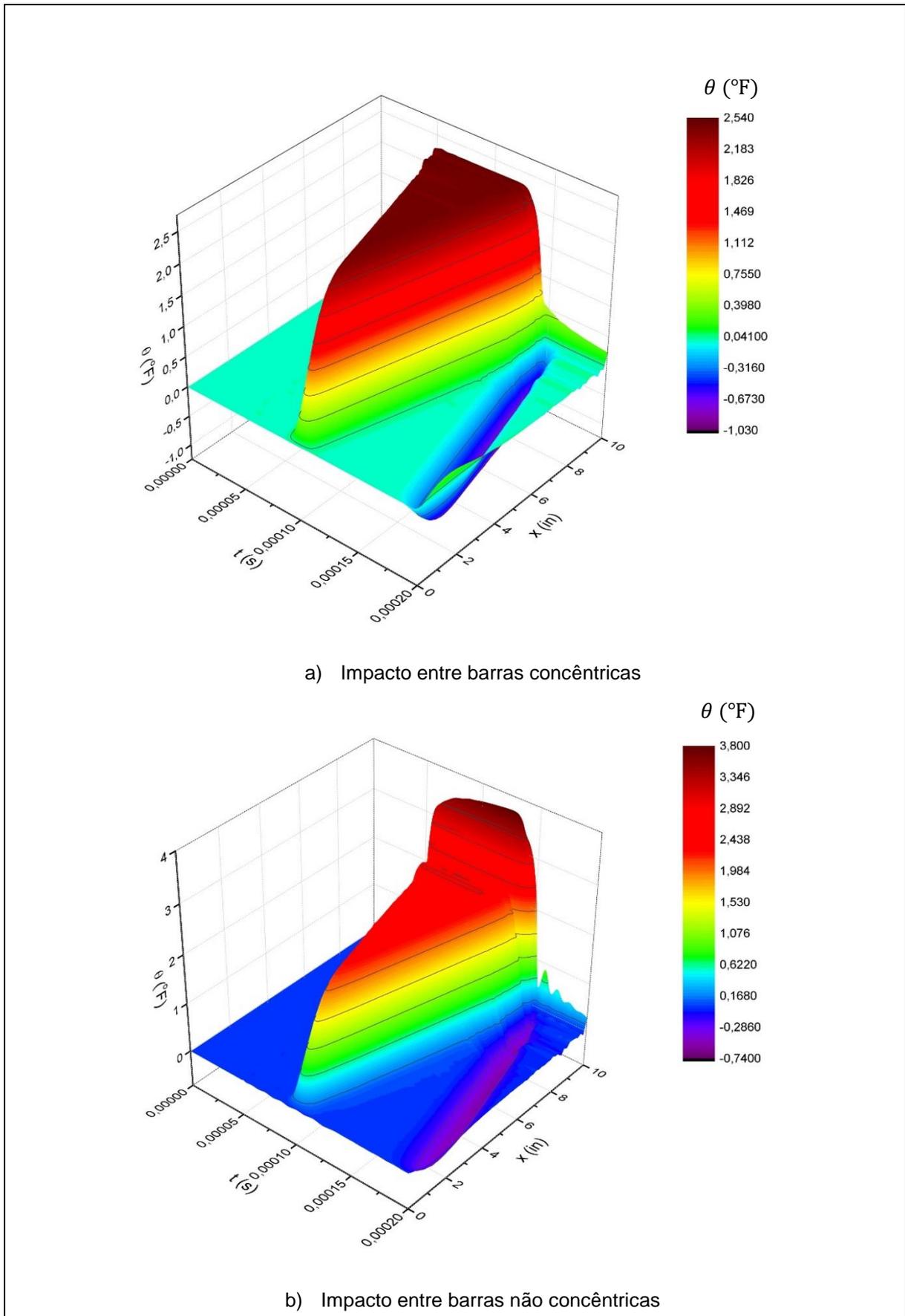
Figura 6.43- comparativo de posição para impacto parcial e total



A Figura 6.44 evidencia o acréscimo de temperatura durante o tempo de impacto ao longo da estrutura, para as duas situações propostas. No caso em que ocorre o impacto concêntrico, a distribuição de temperatura se dá de maneira uniforme, enquanto que, para a situação excêntrica, na região impactante, há uma maior variação da temperatura causada pela variação da taxa de deformação na direção ortogonal à superfície.

Desta forma, a estrutura fica submetida a esforços de compressão, durante a ocorrência do impacto, os quais contribuem para o aumento de temperatura. Após o impacto, o corpo tende a se alongar, de forma a recuperar a energia cinética perdida no impacto, caracterizando variação negativa de temperatura, conforme Efeito Gough Joule.

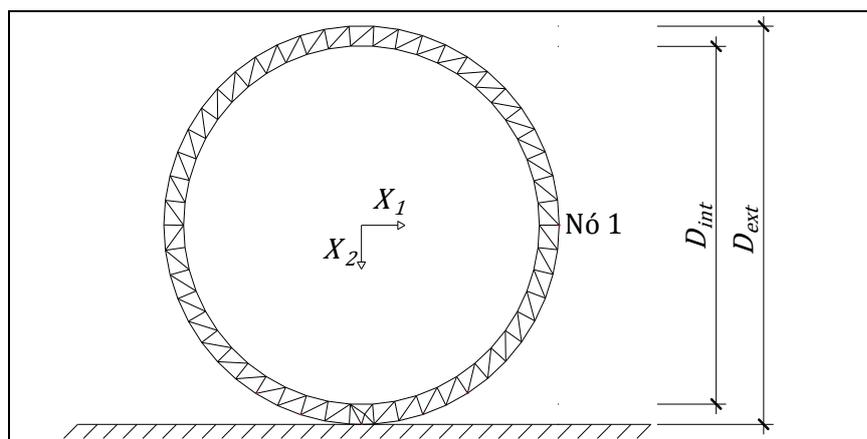
Figura 6.44- Mudanças de temperatura da barra no problema de impacto



## 6.16. IMPACTO DE ANEL EM ANTEPARO RÍGIDO COM ACOPLAMENTO TERMOMECAÂNICO

Este exemplo, abordado anteriormente por Wriggers *et al.* (1990), Greco (2004) e Maciel (2008), refere-se a um modelo de malha anelar que sofre impacto numa superfície horizontal. Para tanto, o corpo se movimenta com velocidade constante, seguindo uma trajetória inclinada em relação ao anteparo (Figura 6.45).

Figura 6.45 - Esquema de impacto entre barra e anteparo rígido



Neste trabalho, busca-se avaliar o comportamento do anel após o impacto, no que se refere ao ângulo de reflexão, considerando-se os efeitos térmicos provenientes da deformação mecânica. Para isso, toma-se por base diversas temperaturas de referência, dentre elas, 10, 50 e 60.

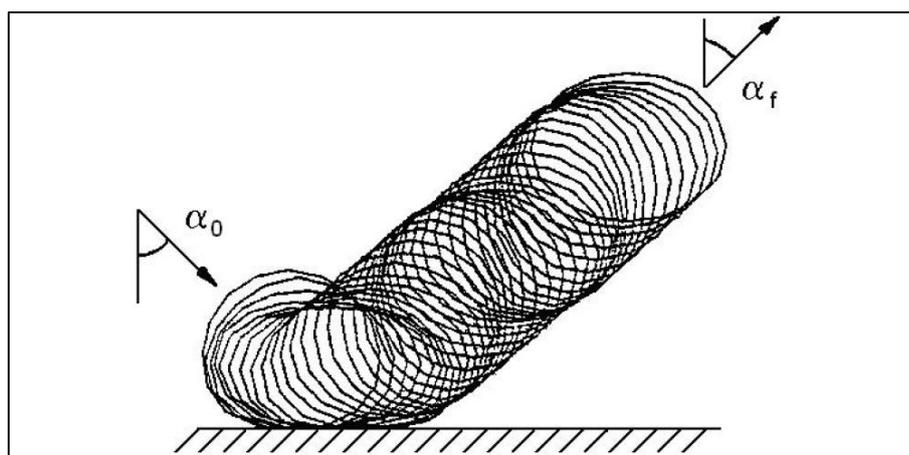
Considera-se uma malha com 108 elementos finitos, com variação temporal  $\Delta t = 0,005$ . Aplica-se o método de Newmark como procedimento de integração temporal. Além disso, são consideradas as seguintes propriedades termomecânicas:

$$\begin{aligned}
 E &= 100 & \nu &= 0 \\
 \dot{X}_1 &= 2 & \dot{X}_2 &= 2 \\
 \rho &= 0,01 & c_m &= 0 \\
 D_{ext} &= 20 & D_{int} &= 18 \\
 b &= 1 \\
 k &= 1 & c_e &= 1 \\
 \alpha_1 &= 0,001 & \alpha_2 &= 0,001
 \end{aligned}$$

É importante destacar que tais propriedades são consideradas adimensionais, conforme referência.

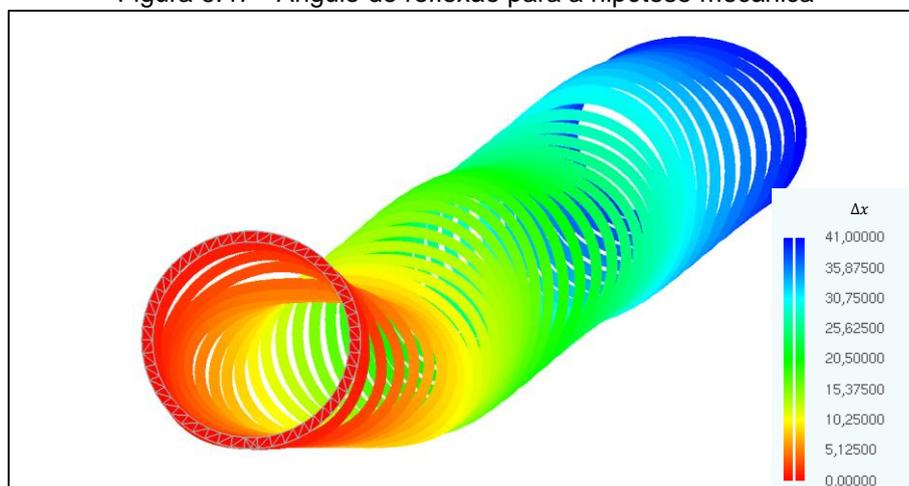
Na Figura 6.46, são dispostas as configurações deformadas para diversos instantes de tempo, segundo a referência. Observa-se um ângulo de  $50,20^\circ$  (Figura 6.47), para a situação em que as deformações térmicas não influenciam a análise mecânica, ou seja,  $\alpha_1 = 0$ , valor bem próximo aos obtidos pelas referências. Considerando-se os efeitos das deformações térmicas no exemplo, chega-se aos valores de  $50,20^\circ$  para  $\theta_0 = 10$ ,  $50,35^\circ$  para  $\theta_0 = 50$  e  $50,51^\circ$  para  $\theta_0 = 60$ .

Figura 6.46 - Ângulo de aproximação e de reflexão da estrutura anelar



Fonte: Greco (2004)

Figura 6.47 - Ângulo de reflexão para a hipótese mecânica



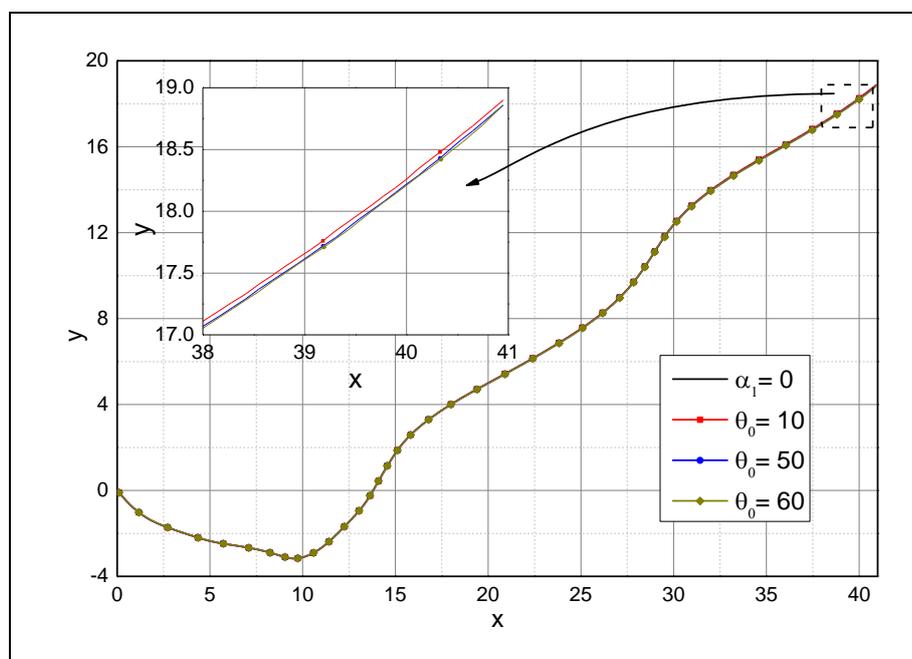
A Tabela 6.1 resume os valores observados para os ângulos de reflexão seguindo as diversas hipóteses implementadas.

Tabela 6.1 - Ângulos de reflexão

Referência	$\alpha_0$	$\alpha_f$
Wriggers <i>et al.</i> (1990)	45°	50°
Greco (2004)	45°	49,83°
Maciel (2008)	45°	50,19°
Análise mecânica	45°	50,20°
Análise termoelástica $\theta_0 = 10$	45°	50,20°
Análise termoelástica $\theta_0 = 50$	45°	50,35°
Análise termoelástica $\theta_0 = 60$	45°	50,51°

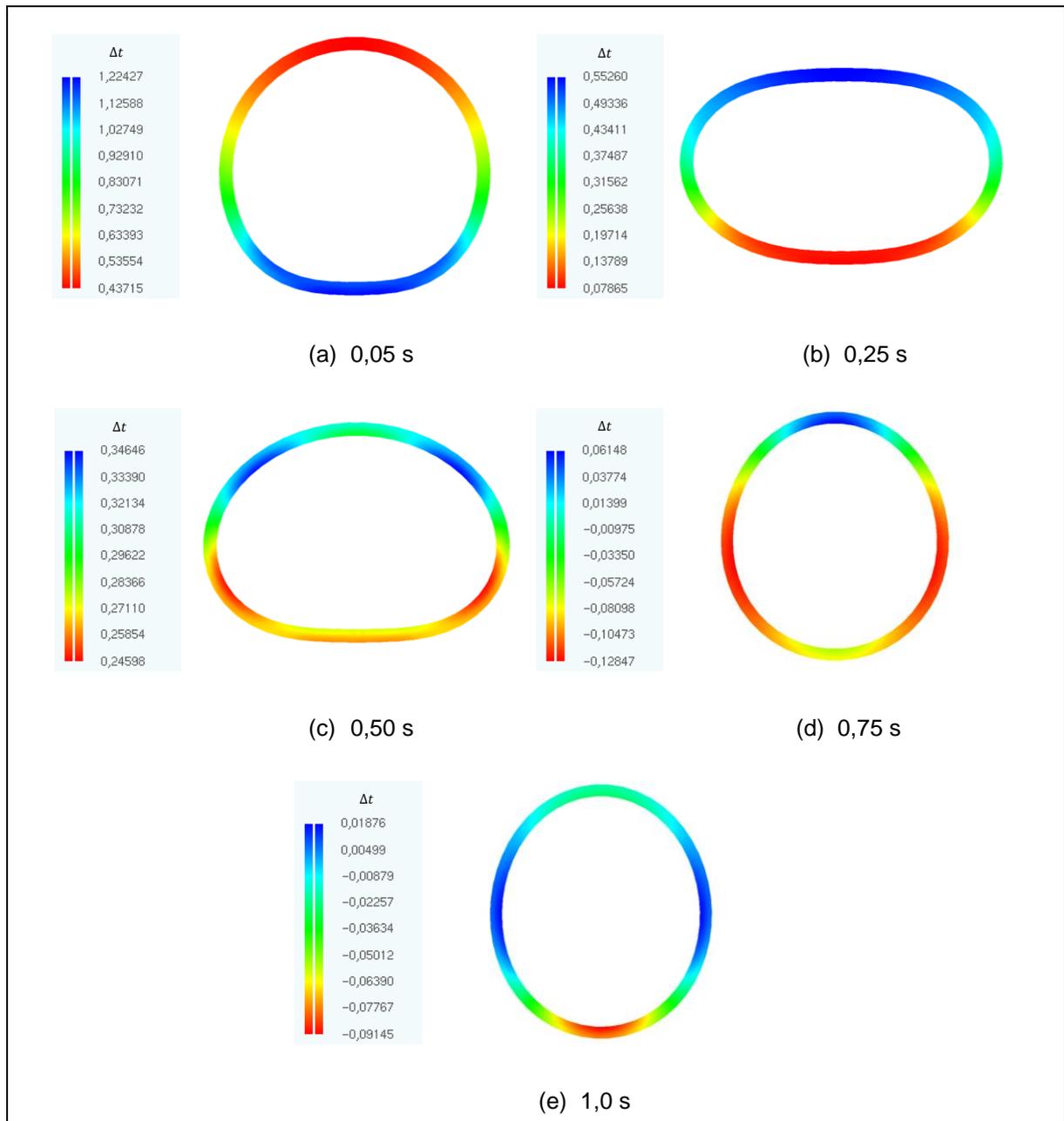
Diante do exposto, observa-se um acréscimo no ângulo de reflexão a medida que a temperatura de referência aumenta. Isso se deve ao fato de haver uma perda de energia, refletindo numa menor intensidade na velocidade de reflexão, que, por conseguinte, influi no menor deslocamento, tanto horizontal, quanto vertical do anel. Na figura 6.48, encontra-se o deslocamento da extremidade da direita do anel para as três situações de temperatura de referência, onde é possível verificar a ligeira defasagem entre modelos.

Figura 6.48 – Posição do nó 1



Por fim, os resultados apresentados na Figura 6.49 exibem os deslocamentos vertical e horizontal, assim como a temperatura no instante analisado para  $\theta_0 = 50$ .

Figura 6.49 - Configuração de Temperatura durante e após o impacto



## CAPÍTULO 7

# Conclusões

O avanço tecnológico possibilitou o emprego de estruturas cada vez mais inovadoras, sobretudo quanto às suas características físicas e geométricas. Por meio de uma análise não linear, é possível obter resultados mais condizentes com a realidade, e, então, aproveitar ao máximo dessas características. Surge, portanto, a necessidade de realização de pesquisas que mostrem de forma mais exata os avanços dos métodos nesta área, aliada com o aumento dos recursos computacionais modernos.

Nesse contexto, o principal objetivo, neste trabalho, é analisar o comportamento estrutural de sólidos bidimensionais por meio da consideração das não linearidades física e geométrica, assim como do tratamento termomecânico. Acredita-se que este trabalho surge para contribuir de forma significativa neste campo de estudo, uma vez que é possível representar mais fielmente o real comportamento estrutural.

Sendo assim, apresenta-se uma formulação posicional implementada e validada mediante comparação com literatura especializada, de modo a investigar o comportamento de estruturas bidimensionais com possível consideração de impacto.

Os algoritmos de integração temporal testados foram avaliados através da aplicação de exemplos considerando-se estruturas submetidas a carregamento dinâmico assim como ao impacto.

De forma geral, os algoritmos explícitos apresentaram resultados mais coerentes quando associados a variações temporais menores. No entanto, para problemas com rotações, os métodos de Houbolt, Wilson- $\theta$  e Newmark são mais indicados, sendo este último menos recomendado em razão da necessidade de

calibração. Os métodos explícitos das Diferenças Centrais e Souza & Moura (1997) apresentam certa instabilidade que pode ser facilmente contornada através da consideração de intervalos de tempo mais reduzidos.

Em problemas de impacto, os métodos explícitos assim como o de Newmark apresentaram resultados satisfatórios quando comparados à resposta analítica. Os métodos de Houbolt e de Wilson- $\theta$  mostraram-se bastante coerentes quanto à posição da superfície impactante, contudo, com falha na velocidade e força de contato, constatando-se grande oscilação durante e após o contato.

Assim sendo, é de extrema importância a verificação e adoção de intervalos de tempo condizentes com o modelo associado, garantindo estabilidade e precisão na resposta esperada.

Correspondente aos problemas termomecânicos, a validação do código desenvolvido é tomada mediante exemplos encontrados na literatura, porém, sem a parcela térmica do estudo. Dessa forma, a resposta obtida através da formulação termodinâmica implementada é analisada a partir de exemplos de aplicação de carregamento quase estático e dinâmico em estruturas engastadas. Da mesma forma, a parcela térmica é empregada em problemas de impacto, cujos resultados são confrontados com aqueles obtidos em literatura especializada.

A geração de calor, quando considerado os efeitos da plasticidade, é mais significativa, conforme constatado por Carrazedo (2009) e Cavalcante (2016) e Silva (2017). Da mesma forma, em problemas termoplásticos de impacto, são observadas elevadas taxas de deformação, o que produz mudanças no comportamento estrutural, uma vez que boa parte da energia cinética é convertida em calor.

Em problemas com grandes deslocamentos, incluindo grandes deformações, o acoplamento termomecânico pode influenciar na flexibilidade das estruturas a serem analisadas, sobretudo quando consideradas temperaturas de referência mais elevadas.

Entretanto, em estruturas com pequeno deslocamento, não se constata grande influência na resposta dinâmica na direção transversal, devido à robustez estrutural. Os efeitos térmicos influenciam mais significativamente os deslocamentos na direção longitudinal da estrutura, quando há o predomínio de uma direção em relação à outra.

Com base no exposto, é de extrema importância a consideração dos efeitos térmicos na análise de estruturas, que, dependendo das características dos materiais assim como das condições iniciais, podem promover efeitos de segunda ordem, e portanto, ocasionar a redistribuição considerável dos esforços.

Em se tratando de efeitos térmicos em estruturas bidimensionais discretizadas com elementos finitos de sólido, propõe-se para trabalhos futuros, a consideração de atrito em problemas de impacto bidirecional. Além disso, sugere-se a implementação da transmissão de calor por radiação e convecção no acoplamento térmico do sistema. Também se recomenda a adoção de efeitos viscoplásticos em estruturas sujeitas a elevadas temperaturas.

## Referências

Armero, F.; Petocz, E. (1998): Formulation and analysis of conserving algorithms for frictionless dynamic contact-impact problems. *Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 158, n. 3-4.

Assan, A. E. (1999). *Método dos elementos finitos: Primeiros passos*. Campinas-SP, Editora Unicamp.

Bathe, K. J. (1982): *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. 1 ed., Prentice, New Jersey.

Bathe, K. J. (1996): *Finite Element Procedures*. 1 ed., Prentice Hall, New Jersey.

Bathe, K. J.; Wilson, E. L. (1973): Stability and accuracy analysis of direct integration methods. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 1.

Bever, M. B.; Holt, D. L.; Titchener, A. L. (1973): The stored energy of cold work. *Mechanics of Materials*, vol. 17.

Biot, M. A. (1956): Thermoelasticity and irreversible thermodynamics. *Journal of Applied Physics*, vol. 27, n. 3.

Boley, B. A.; Tolins, I. S. (1962): Transient coupled thermoelastic boundary value problems in the half-space. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 29, n. 4.

Bottura, H. M. (1997): Uma família de algoritmos hermitianos para a integração direta das equações de dinâmica das estruturas. Tese (Doutorado), Curso de Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos.

Boulanger, T.; Chrysochoos, A.; Mabru, C.; Galtier, A. (2004): Calorimetric analysis of dissipative and thermoelastic effects associated with the fatigue behavior of steels. *International Journal of Fatigue*, vol. 26, n. 3.

Brebbia, C. A.; Dominguez, J. (1992): *Boundary elements and introductory course*. Computational Mechanics Publication, 2 ed., Southampton, Boston.

Canadija, M.; Brnic, J. (2004): Associative coupled thermoplasticity at finite strains with temperature-dependent material parameters. *International Journal of Plasticity*, vol. 20.

Carpenter, N. J.; Taylor, R. L.; Katona, M. G. (1991): Lagrange constraints for transient finite element surface contact. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 32, n. 1.

Carrazedo, R. (2009): Estudo e desenvolvimento de código computacional para análise de impacto entre estruturas levando em consideração efeitos térmicos. Tese (Doutorado), Curso de Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos.

Carrazedo, R.; Coda, H. B. (2010): Alternative positional FEM applied thermomechanical impact of truss structures. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 46.

Cavalcante, J. P. B. (2016): Contribuição ao estudo de treliças não lineares considerando efeitos térmicos. Dissertação (Mestrado). Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal.

Chen, W. F.; Han D. J. (1988): *Plasticity for structural engineers*. 1 ed., Springer-Verlag, New York.

Chung, J.; Lee, J. M. (1994): A new family of explicit time integration methods for linear and non-linear structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 37, n. 23.

Coda, H. B. (2003): Análise não linear geométrica de sólidos e estruturas: uma formulação posicional baseada no MEF. Tese (Texto complementar para concurso de professor titular), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

Coda, H. B.; Greco, M. (2004): A simple FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 193.

Coda, H. B.; Paccola, R. R. (2008): Positional FEM formulation for geometrically non-linear shells. *Latin American Journal of Solids and Structures*, vol. 5, n. 3.

- Cook, R.D.; Malkus, D.S.; Plesha, M.E. (1989): Concepts and Applications of Finite Element Analysis, 3 ed. John Wiley & Sons.
- Cook, R. D. (2001): Concepts and Applications of Finite Element Analysis. 3 ed. John Wiley & Sons Inc, New York.
- Copetti, M. I. M. (1999): Finite element approximation to a contact problem in linear thermoelasticity. *Mathematics of Computation*, vol. 68, n. 227.
- Copetti, M. I. M. (2002): A one-dimensional thermoelastic problem with unilateral constraint. *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 59, n. 4.
- Craig Jr., R. R. (1981): Structural dynamics – An introduction to computer methods. 1st ed., J. Wiley, New York.
- Dhaliwal R., Sherief H. (1980): Generalized thermoelasticity for anisotropic media. *Quart. Appl. Math.*, vol. 33, p.1–8. Dill, E. H. (2007): Continuum mechanics – elasticity, plasticity, viscoelasticity. 1 ed., CRC Press – Taylor & Francis Group, Boca Raton.
- Dillon, O. W. (1963): Coupled thermoplasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 11.
- Dokainish, M. A., and Subbaraj, K. (1989): A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics-I Explicit methods. *Computers & Structures*, vol 32, n. 6.
- Duhamel, J. M. C. (1837): Second mémoire sur les phénomènes thermomechanique. *Journal de L'Escole Polytechnique*, vol. 15, n. 25.
- Farren, W. S.; Taylor, G. I. (1925): The heat developed during plastic extension of metals. *Proceedings of the Royal Society of London*, vol. 107.
- Ferreira, I. P. (2009): Análise dinâmica não linear geométrica de treliças espaciais. Dissertação (Mestrado), Curso de Engenharia Civil, Centro Federal de educação Tecnológica de Minas Gerais, Belo Horizonte.
- Freitas, A. (2010): Modelagem da evolução do dano ortotrópico acoplado à elastoplasticidade em metais. Dissertação (Mestrado). Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

- Greco, M. (2004): Análise de problemas de contato/impacto em estruturas de comportamento não-linear pelo método dos elementos finitos. Tese (Doutorado), Curso de Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- Green, A. E.; Lindsay, K. A. (1972): Thermoelasticity. *Journal of Elasticity*, vol. 2, n. 1.
- Green, A. E.; Naghdi, P. M. (1993): Thermoelasticity without energy dissipation. *Journal of Elasticity*, vol. 31, n. 1.
- Green, A. E.; Naghdi, P. M. (1995): A unified procedure for construction of theories of deformable media. I – Classical continuum physics, II – Generalized continua, III – Mixtures of interacting continua. *Proceedings of the Royal Society: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* vol. 448.
- Hakansson, P. et al. (2005): Comparison of isotropic hardening and kinematic hardening in thermoplasticity. *International Journal of Plasticity*, vol. 21.
- Hidayat, M. I. P.; Ariwahjoedi, B.; Parman, S. (2015): A new meshless local B-spline basis functions-FD method for two-dimensional heat conduction problems, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, Vol. 25.
- Holzappel, G. A. (2004): *Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering*. 2nd ed. Chichester, Inglaterra: John Wiley & Sons.
- Houbolt, J. C. (1950): A Recurrence matrix solution for the dynamic response of aircraft. *Journal of Aeronautical Sciences*, vol. 17.
- Hu, N. (1997): A solution method for dynamic contact problems. *Computer & Structures*, vol. 63, n. 6.
- Hughes, T. J. R. (2000): *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. New York, Dover Publications INC.
- Irgens, F. (2008): *Continuum Mechanics*. 1 ed., Springer-Verlag, Bergen.
- Kamlah, M.; Haupt, P. (1998): On the macroscopic description of stored energy and self heating during plastic deformation. *International Journal of Plasticity*, vol. 13, n. 10.
- Khalifa, M. E.; El-Rahman, R. G. A.; Ghonamy, M. I. (2004): Some new exact solutions for linear thermoelastic system. *Applied Mathematics and Computation*, vol. 147, n. 3.

Lacerda, E. G. M. (2014): Análise não linear de treliças pelo método dos elementos finitos posicional. Dissertação (Mestrado), Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal.

Lemonds, J.; Needleman, A. (1986): Finite element analyses of shear localization in rate and temperature dependent solids. *Mechanics of Materials*, vol. 5, n. 4.

Lewis, R. W, et al. (1996): *The Finite Element Method in Heat Transfer Analysis*. 1<sup>st</sup> ed. Chichester, Inglaterra: John Wiley & Sons.

Lewis, R. W.; Nithiarasu, P.; Seetharamu, K. N. (2004): *Fundamentals of the finite element method for heat and fluid flow*. First ed., John Wiley & Sons.

Lord, H. W.; Shulman, Y. (1967): A generalized dynamical theory of thermoelasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 15.

Loureiro, F. S. (2007): Métodos de Integração Temporal Baseados no Cálculo Numérico de Funções de Green através do Método dos Elementos Finitos. Dissertação (Mestrado), Curso de Ciências em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

Maciel, D. N. (2008): Análise de problemas elásticos não-lineares geométricos empregando o método dos elementos finitos posicional. Tese (Doutorado em Engenharia). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo.

Marques, G. C. S. C. (2006): Estudo e desenvolvimento de código computacional baseado no método dos elementos finitos para análise dinâmica não linear geométrica de sólidos bidimensionais. Dissertação (Mestrado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

Martins, C. J. (2004): Condições iniciais em propagação de ondas elásticas através do método dos elementos finitos nos domínios do tempo e da frequência. Tese (Doutorado). Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

Minski, R. L. (2008): Aprimoramento de formulação de identificação e solução do impacto bidimensional entre estrutura e anteparo rígido. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

Morini, R. P. (2009): Método dos Elementos Finitos Posicional Aplicado à Análise Estática de Risers. Dissertação (Mestrado). Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Mondkar, D. P.; Powell, G. H. (1977): Finite element analysis of space frames by an incremental iterative technique. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol.47.

Mroz, Z.; Oliferuk, W. (2002): Energy balance and identification of hardening moduli in plastic deformation processes. *International Journal of Plasticity*, vol. 18, n. 3.

Munaiar Neto, J. (1998): Um estudo da formulação de modelos constitutivos viscoelásticos e elasto-viscoplásticos e do emprego de algoritmos implícitos e explícitos para a sua integração numérica. Tese (Doutorado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

Neumann, F. (1885): *Vorlesungen Uber die Theorie der Elasticitat*. Meyer, Brestau.

Newmark, N. M. (1959): A method of computation of structural dynamics. *Journal of Engineering Mechanics Division*, vol 85.

Oliferuk, W.; Swiatnicki, W. A.; Grabski, M. W. (1993): Rate of energy storage and microstructure evolution during the tensile deformation of austenitic steel. *Materials Science and Engineering A*, vol. 161, n. 1.

Oliveira, M. O. (2012): Análise dinâmica não linear de problemas envolvendo massas móveis aplicadas em cabos e elementos de viga. Dissertação (Mestrado), Curso de Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.

Oliveira, D. B. (2016): implementação computacional de modelos elastoplásticos para análise fisicamente não linear. Dissertação (Mestrado), Curso de Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.

Owen, D. R. J.; Hinton, E. (1980): *Finite elements in plasticity: theory and practice*. Swansea, Pineridge Press.

Parkus, H. (1976): *Thermoelasticity*. 2 ed., Springer-Verlag, Vienna.

Pascon, J. P. (2008): Modelos constitutivos para materiais hiperelásticos – estudo e implementação computacional. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

Perzyna, P.; Sawczuk, A. (1973): Problems in thermoplasticity. Nuclear Engineering and Design, vol. 24.

Reis, M. C. J. (2012): Análise não linear geométrica de pórticos planos considerando ligações semirrígidas elastoplásticas. Dissertação (Mestrado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

Rigobello, R. (2011): Desenvolvimento e aplicação de código computacional para análise de estruturas de aço aporticadas em situação de incêndio. Tese (Doutorado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

Rittel, D. (1999): On the conversion of plastic work to heat during high strain rate deformation of glassy polymers. Mechanics of Materials, vol. 31.

Rittel, D.; Kidane, A. A.; Alkhader, M.; Venkert, A.; Landau, P.; Ravichandran, G. (2012): On the dynamically stored energy of cold work in pure single crystal and polycrystalline copper. Acta Materialia, vol. 60.

Rosakis, P.; Rosakis, A. J.; Ravichandran, G.; Hodowany, J. (2000): A thermodynamic internal variable model for the partition of plastic work into heat and stored energy in metals. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol. 48.

Rubert, J. B. (1993): Estudo do desempenho de algoritmos numéricos na solução de sistemas não-lineares de estruturas formadas por barras de treliça. Tese (Doutorado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

Sampaio, M. S. M. (2014): Análise não linear geométrica de cascas laminadas reforçadas com fibras. Tese (Doutorado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

Sanches, R. A. K. (2011): Sobre o acoplamento fluido-casca utilizando o método dos elementos finitos. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

Santaoja, K. (2004): Gradient theory from the thermomechanics point of view. Engineering Fracture Mechanics, vol. 71, n. 4.

Schimidt, D. (2006). Análise elastoplástica com não-linearidade geométrica de estruturas através de elementos hexaédricos tri-lineares com um ponto de integração. Dissertação (Mestrado). Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

Serra, E.; Bonaldi, M. (2008): A Finite Element Formulation for Thermoelastic Damping Analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 78, n. 6.

Sherief H. H. (1980): On Generalized Thermoelasticity. Ph.D. Thesis, University of Calgary, Canada.

Sherief, H. H.; Hamza, F. A.; Saleh, H. A. (2004): The theory of generalized thermoelastic diffusion. *International Journal of Engineering Science*, vol. 42, n. 5.

Schulz, M.; Filippou, F. C. (2001): Non-linear spatial Timoshenko beam element with curvature interpolation. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 50.

Silva, R. L. (2017): Estudo de pórticos planos não-lineares considerando os efeitos térmicos. Dissertação (Mestrado). Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal.

Silveira, E. S. S. (2001): Análise dinâmica de linhas de ancoragem com adaptação no tempo e subciclagem. Tese (Doutorado), Curso de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

Simo, J. C.; Hughes, T. J. R. (1998): *Computational inelasticity*. 1 ed., Springer-Verlag, New York.

Simo, J. C., Miehe, C. (1992): Associative coupled thermoplasticity at finite strains: Formulation, numerical analysis and implementation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 98.

Simo, J. C.; Hjelmastad, K. D.; Taylor, R. L. (1986): Numerical formulations of elasto-viscoplastic response of beams accounting for the effect of shear. *Comp. Meth. In appl. Mech. Eng.*

Solberg, J. M.; Papadopoulos, P. (1998): A finite element method for contact-impact. *Finite Element in Analysis and Design*, vol. 30, n. 4.

Soleimani, S.; Jalaal, M.; Bararnia, H.; Ghasemi, E.; Ganji, D.D.; Mohammadi, F. (2010): Local RBF-DQ method for two-dimensional transient heat conduction problem”, International Communications in Heat and Mass Transfer, Vol. 37.

Souza, L. A. S.; Moura, C. A. (1997): Diferença finita de quarta ordem para integração explícita no domínio do tempo de problemas elastodinâmicos. XVIII Ibero Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, CILAMCE, Brasília, v. II.

Souza Neto, E. A.; Peric, D.; Owen, D. R. Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications. 1. ed. John Wiley & Sons, 2008.

Surana, K. S. (1983): Geometrically non-linear formulation for 2 dimensional curved beam elements. Computer and structures, vol. 17.

Tamma, K. K.; Zhou, X.; Sha, D. (2000): The time dimension – A theory towards the evolution, classification, characterization and design of computational algorithms for transient-dynamic applications. Archives of Computational Methods in engineering, vol. 7, n. 2.

Taylor, G.; Quinney, H. (1934): The latent energy remaining a metal after cold working. Proceedings of the Royal Society of London, vol. 143.

Taylor, R. L.; Papadopoulos, P. (1993): On a finite element method for dynamic contact-impact problems. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 36, n. 12.

Vieira, L. C. L. M. (2004): Estudo de algoritmos de integração elemento por elemento para análise dinâmica não linear de estruturas. Dissertação (Mestrado), Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal de Alagoas, Maceió.

Vila Real, P. J. M. M. F. (1988): Modelação por elementos finitos do comportamento térmico e termoelástico de sólidos sujeitos a elevados gradientes térmicos. Tese (Doutorado). Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto, Porto.

Wilson, E. L. (2002): Three-dimensional static and dynamic analysis of structures. 3 ed., Computers and Structures Inc., Berkeley.

Wilson, E. L.; K. Bathe. (1973): Stability and Accuracy Analysis of Direct Integration Methods. Earthquake Engineering and Structural Dynamics. Vol. 1.

Wriggers, P.; Van, T. V. ; Stein, E. (1990): Finite element formulation of large deformation impact-contact problems with friction. *Computer and structures*, vol. 37.

Xia, R.; Tian, X.; Shen, Y. (2014): Dynamic Response of Two-Dimensional Generalized Thermoelastic Coupling Problem Subjected to a Moving Heat Source. *Acta Mechanica Solida Sinica*, vol. 27, n. 3.

Yan, J. (1998): Study of Bauschinger effect in various spring steels. Dissertação (Mestrado). Curso de Ciências Aplicadas, Universidade de Toronto, Ottawa.

Yang, T. Y.; Saigal, S. (1984): A simple element for static and dynamic response of beams with material and geometric nonlinearities. *International Journal of solids and structures*, vol. 20.

Zhou, M.; Ravichandran, G.; Rosakis, A. J. (1996): Dynamically propagating shear bands in impact-loaded prenotched plates – II, Numerical simulations. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 44, n. 6.