UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS E ENGENHARIA DE PETRÓLEO
PROVA DE SELEÇÃO MESTRADO 2018.2

Linha de Pesquisa: Automação na Indústria de Petróleo e Gás Natural

QUESTÕES

1- Considere a seguinte função $f(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 4$. Pede-se: ***(2,0 ponto)***

a) Calcule o valor da derivada da função no ponto $x = 2$
b) Faça o gráfico da função e apresente uma interpretação gráfica para a derivada calculada
c) Calcule o ponto de mínimo local e de máximo local da função e os valores da função nesses pontos

2- Calcule o valor da integral $\int_{-1}^{1}(-x^2 + 3x + 4 + sen\,\pi x)dx$ e apresente uma interpretação gráfica para a integral calculada. ***(1,0 ponto)***

3- Calcule $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2 + 3x - 6}{x^2 + 2x - 3}$ ***(1,0 ponto)***

4- Seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, determine os autovalores e autovetores de **A**. ***(2,0 ponto)***

5- Dado o seguinte sistema de equações lineares $\begin{cases} x + y = 3 \\ ax + by = c \end{cases}$ **(2,0 ponto)**

Determine valores de **a, b** e **c** para que o sistema tenha:
a) Uma única solução
b) Tenha infinitas soluções
c) Não tenha solução
d) Calcule a solução x,y quando $a = 1, b = -1$ e $c = 1$

6- Uma moeda não tendenciosa é lançada até que sejam obtidos dois resultados consecutivos iguais. Qual a probabilidade de a moeda ser lançada exatamente três vezes ? **(1,0 ponto)**

7- No lançamento de dois dados perfeitos, qual a probabilidade de que a soma dos resultados obtidos seja igual a 6 ? (**1,0 ponto**)

GABARITO

1) Resolução

a) $\dfrac{df(x)}{dx} = 3x^2 - 4x - 2 \;\Big|_{x=2} = 12 - 8 - 2 = 2$

b) Fazer a curva aproximada e identificar a derivada como sendo a reta tangente à curva no ponto x=2

c) Calcular os pontos em que a derivada é zero (raízes da equação do item (a))

$$3x^2 - 4x - 2 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4.3.(-2)}}{2.3} = \begin{cases} 1.720 \\ -0.387 \end{cases}$$

$$f(1.72) = -0.268$$

$$f(-0.387) = 4{,}416$$

2) Resolução

a) $\int_{-1}^{1} (-x^2 + 3x + 4 + sen\pi x)dx = -\dfrac{x^3}{3} + 3\dfrac{x^2}{2} + 4x + \dfrac{1}{\pi}\cos \pi x \;\Big|_{-1}^{1}$

$$\int_{-1}^{1} (-x^2 + 3x + 4 + sen\pi x)dx = -\frac{1}{3} + \frac{3}{2} + 4 + \frac{1}{\pi}\cos\pi - \left[\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 4 + \frac{1}{\pi}\cos(-\pi)\right] = \frac{31}{6} - \left(-\frac{13}{6}\right) = \frac{22}{3}$$

b) Fazer a curva aproximada e identificar a integral como sendo a área compreendida entre a curva e o eixo x entre os pontos x=-1 e x=1. A contribuição da função seno é zero, pela mesma ser uma função ímpar.

3) Existe uma indefinição no limite 0/0. Uma solução é aplicar o teorema de L´Hopital

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^2 + 3x - 6}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x\to 1}\left(\frac{\frac{d}{dx}(3x^2 + 3x - 6)}{\frac{d}{dx}(x^2 + 2x - 3)}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{6x + 3}{2x + 2} = \frac{9}{4}$$

Ou podemos fatorar os 2 polinômios e cancelar as suas raízes comuns:

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^2 + 3x - 6}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x\to 1} \frac{3(x+2)(x-1)}{(x+3)(x-1)} = \frac{9}{4}$$

4) Os auto valores da matriz A podem ser determinados da seguinte forma:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 + 3\lambda - 9 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_1 = 3 \\ \lambda_3 = -1 \end{cases}$$

Agora, calculando os autovetores associados aos autovalores $\lambda = 3$, chegamos ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 4z = 3x \\ 3y + 5z = 3y; \\ -z = 3z \end{cases}$$

cuja solução é: z = 0 e x, y quaisquer. De onde concluímos que os autovetores correspondentes ao autovalor $\lambda = 3$ são do tipo:

$$v = (x, y, 0)$$

Por fim, calculando os autovetores associados aos autovalores $\lambda = -1$, chegamos ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -1\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 4z = -x \\ 3y + 5z = -y \\ -z = -z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 4z = 0 \\ 4y + 5z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -\frac{5}{4}z \\ 0 = 0 \end{cases}$$

De onde concluímos que os autovetores correspondentes ao autovalor $\lambda = -1$ são do tipo:

$$v = (z, -\frac{5}{4}z, z)$$

5- Resolução:

Montando o sistema de forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ c \end{bmatrix}$$

a) Para que o sistema tenha uma única solução é necessário que a matriz **A** tenha inversa, ou seja, que o determinante de **A** seja diferente de zero. Como det(**A**)= b – a, o sistema terá uma única solução para **b** diferente de **a** e **c** qualquer.

b) Para que o sistema tenha infinitas soluções é necessário que o det(**A**) seja zero, ou seja, **a**=**b** e que as duas equações não sejam conflitantes, ou seja que **c**=3**a**

c) Para que o sistema não tenha solução é necessário que o det(**A**) seja zero, ou seja, **a**=**b** e que as duas equações sejam conflitantes, ou seja que **c** seja diferente de 3**a**

d) Nesse caso, o determinante de A é diferente de zero. Assim a solução é

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

6- Resolução:

Primeira jogada: qualquer resultado serve (probabilidade igual a 1)

Segunda jogada: só serve o resultado que não aconteceu da primeira vez (probabilidade igual a ½)

Terceira jogada: só serve o mesmo resultado que aconteceu na segunda jogada (probabilidade igual a ½)

Logo: 1 x ½ x ½ = ¼

7- Para que a soma seja 6, precisamos das seguintes faces: {(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)}. E considerando que o espaço amostral do lançamento de dois dados e representado pela multiplicação 6 * 6 = 36, temos a seguinte probabilidade:

$$P = \frac{número\_de\_eventos\_favoráveis}{número\_de\_resultados\_possíveis}$$

$$P = \frac{5}{36} \Rightarrow P \cong 0,1388 \Rightarrow 13,88\%$$

A probabilidade é de 5/36, ou seja, aproximadamente 13,88% de chance.