Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Prova de Seleção - Expectativa de Respostas
Data: 16/10/2017

Nome do Candidato:

1. Quer-se construir uma sala retangular que tenha 236 m^2 de área. Quais devem ser as dimensões para que seu perímetro seja o menor possível?

   Resposta:

   Considerando inicialmente a sala retangular com lados x e y a ser determinados. Temos que a área será $A = xy = 236$ e o perímetro $P = 2x + 2y$. Isolando o valor de x na primeira equação e substituindo na equação do perímetro, obtemos

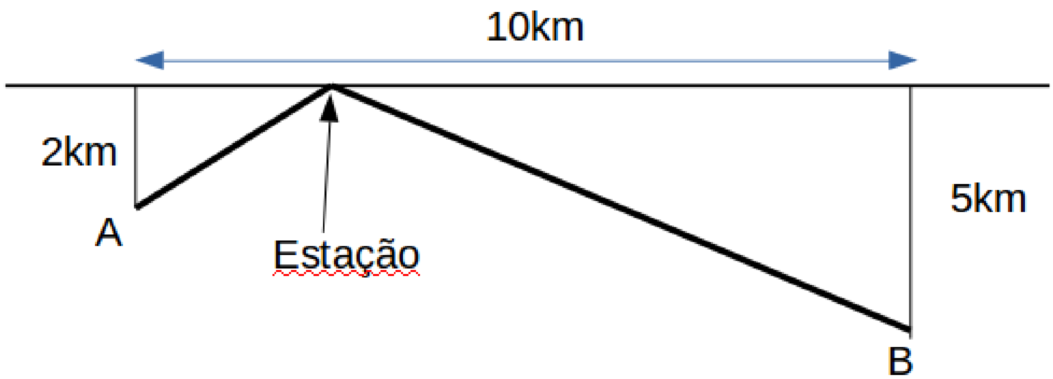
   $$P = \frac{2A}{y} + 2y$$

   Derivando P em relação a y e igualando a zero para determinar o extremo, obtemos

   $$-\frac{2A}{y^2} + 2 = 0$$

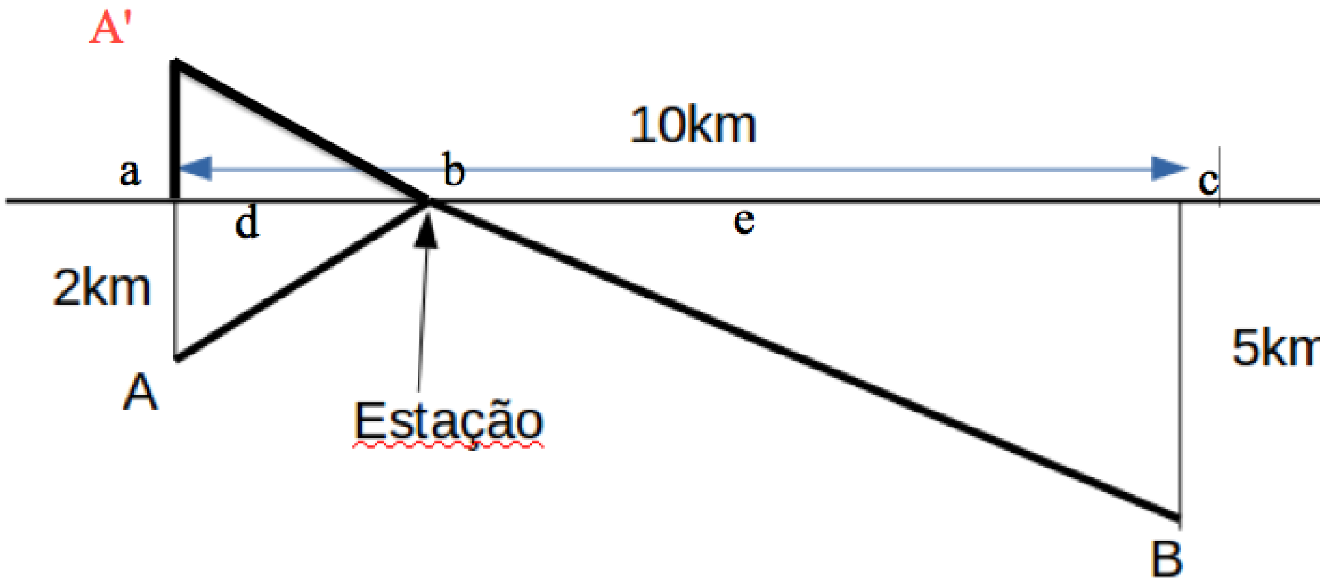
   finalmente obtemos $y = \sqrt{A} = \sqrt{236}$ e $x = \sqrt{236}$. Ou seja a sala na verdade terá a forma de um quadrado de lado $\sqrt{236}$.

2. Duas cidades, A e B, estão localizadas ao sul de um rio conforme a figura abaixo. Uma estação bombeadora de água será instalada para servir às duas cidades. A tubulação seguirá as retas que ligam cada cidade à estação. Defina o ponto onde a estação bombeadora deve ser instalada para minimizar o custo da tubulação.



Resposta:

Esse problema pode ser facilmente resolvido considerando a figura abaixo, onde posicionamos uma cidade imagem A’ que está situada a uma mesma distância do rio que a cidade A, de maneira que o comprimento do segmento de reta Ab será igual ao comprimento do segmento A’b. Nesse caso o comprimento mínimo será aquele obtido traçando-se um segmento de reta direto de A’ até B. Para definirmos a localização da estação precisamos calcular a distância entre os pontos a e b, que estamos representando na figura como d, ou a distância entre b e c, nesse caso e.



Os triângulos abA' e bcB são semelhantes e podemos usar a relação

$$2/d = 5/e$$

Além disso $d + e = 10$. Usando essas duas equações obtemos $d = 20/7$ e $e = 50/7$.

3. Uma bateria de voltagem fixa V e resistência elétrica interna fixa r está ligada a um circuito de resistência variável R. Pela lei de Ohm, a corrente I no cirscuito é $I = \frac{V}{R+r}$. Se a potência é dada por $P = I^2 R$, qual deve ser o valor de R para que a potência seja máxima.

   Resposta:

   Substituindo o valor de I na equação da potência obtemos:

   $$P = \frac{V^2 R}{(R+r)^2} = \frac{V^2}{R + 2r + \frac{r^2}{R}}$$

   Derivando a equação acima em relação a R e igualando a zero obtemos que a resistência R que dá a potência máxima é $R = r$.

4. Encontre a solução geral da equação diferencial $\frac{dy}{dt} = -\frac{t}{y}$. Interprete geometricamente a solução.

   Resposta:

Esta equação pode ser resolvida via separação de variáveis. De uma forma equivalente a $\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{t}{y}$ temos:

$$\int tdt + \int ydy = 0$$

cuja solução é:

$$x^2 + y^2 = Cte$$

onde Cte é uma constante de integração que depende das condições iniciais do problema. O conjunto de soluções acima corresponde a circunferências centradas na origem, cada condição inicial está associado a uma circunferência de raio igual à raiz quadrada da constante.

5. Seja a equação da onda

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Sendo c constante e com as condições iniciais dadas por:

$$\begin{cases} u\,(x,0) & = g(x), \qquad x \in \mathbb{R} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) & = 0 \qquad\qquad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

seja $g(x)$ dado pela gaussiana:

$$g(x) = e^{-x^2/4}$$

(a) Determine a solução $u(x,t)$ e dê uma interpretação para a solução.

(b) Mostre que a energia definida por

$$E\,(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx$$

se mantém constante.

Resposta

(a) Para o caso onde c é constante a equação da onda pode ser resolvida exatamente de várias maneiras, por exemplo usando a solução de d'Alembert, por transformada de Fourier ou via separação de variáveis. Abaixo mostramos uma possível resolução usando a solução de d'Alembert.

Vamos introduzir as mudanças de variáveis $\xi = x - ct$ e $\eta = x + ct$. Usando a regra da cadeia podemos obter

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \eta} = -c^2\frac{\partial}{\partial \xi} + c^2\frac{\partial}{\partial \eta}$$

De maneira que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2c^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + c^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

e a equação da onda torna-se

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

que tem solução geral $u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$ ou $u(x,t) = f(x+ct) + g(c-ct)$.

Usando as condições iniciais podemos mostrar que a solução para esse problema específico será

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(e^{(x-ct)^2/4} + e^{(x+ct)^2/4}\right)$$

que corresponde um pulso gaussiano se movendo para a direita e outro para a esquerda.

(b)

$$\begin{aligned} E\left(t\right) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] dx \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2}\left[e^{-\frac{1}{4}(x+t)^2}(x+t) - e^{-\frac{1}{4}(x-t)^2}(x-t)\right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{2}\left[e^{-\frac{1}{4}(x+t)^2}(x+t) + e^{-\frac{1}{4}(x-t)^2}(x-t)\right]$$

Seja

$$\begin{aligned} A(x,t) &= e^{-\frac{1}{4}(x+t)^2}(x+t) \\ B(x,t) &= e^{-\frac{1}{4}(x-t)^2}(x-t) \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{2}\left[A(x,t) - B(x,t)\right] \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{2}\left[A(x,t) + B(x,t)\right] \end{aligned}$$

Assim

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 &= \frac{1}{4}\left(A^2 - 2AB + B^2\right) \\
\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 &= \frac{1}{4}\left(A^2 + 2AB + B^2\right)
\end{aligned}
$$

$$
\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] = \frac{1}{2}\left(A^2 + B^2\right)
$$

$$
\begin{aligned}
E(t) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\left(A^2 + B^2\right)dx \\
&= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}A(x,t)^2dx + \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}B(x,t)^2dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A(x,t)^2 &= e^{-\frac{1}{2}(x+t)^2}(x+t)^2 \\
B(x,t)^2 &= e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2}(x-t)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}A(x,t)^2dx &= \int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}(x+t)^2}(x+t)^2dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}m^2}m^2dx \\
&= \sqrt{2\pi}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}B(x,t)^2dx &= \int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2}(x-t)^2dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}m^2}m^2dx \\
&= \sqrt{2\pi}
\end{aligned}
$$

Assim:

$$
\begin{aligned}
E(t) &= \frac{1}{4}\sqrt{2\pi} + \frac{1}{4}\sqrt{2\pi} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{2\pi} \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}}
\end{aligned}
$$

6. Quando ocorre uma descarga elétrica na atmosfera (raio) ouve-se nos rádios um ruído, qualquer que seja a estação, ou a frequência em que o receptor de rádio esteja sintonizado. Explique por que este fenômeno acontece, usaando argumentos de Física e Matemática.

   Resposta:

   O raio corresponde a uma corrente elétrica de alta intensidade e de curta duração. Cargas elétricas são então aceleradas produzindo uma radiação eletromagnética, a qual se propaga como uma onda eletromagnética em forma de um pulso de curta duração.

   Se quisermos detectar esta onda em um receptor de rádio teremos que responder à seguinte pergunta: em que frequência teremos de sintonizar o receptor?

   A resposta é dada pela transformada de Fourier do campo eletromagnético do pulso de onda. A transformada de Fourier fornece a informação sobre o espectro da onda, ou seja sobre as frequências contidas no pulso e suas respectivas amplitudes.

   Neste caso, como o pulso é estreito no tempo, a transformada de Fourier nos diz que o espectro é largo, contendo uma ampla escala de frequências. O caso limite seria o de um pulso tipo ”delta de Dirac” que corresponderia a uma ”espectro branco” no qual todas as frequências estariam presentes com mesma amplitude.

   Este é o motivo pelo qual o ruído é ouvido em todas as faixas de frequências do rádio, de KHz a MHz.

7. Os estados de um sistema são representados pelos vetores $|\Psi\rangle$ e $|\Phi\rangle$ dados por

$$|\Psi\rangle = 5|1\rangle - 3|2\rangle + 2|3\rangle$$

$$|\Phi\rangle = |1\rangle - 5|2\rangle + x|3\rangle$$

   sendo os vetores $|1\rangle$, $|2\rangle$ e $|3\rangle$ ortonormais. Para que valor de x os estados $|\Psi\rangle$ e $|\Phi\rangle$ são ortogonais?

   Resposta:

   A condição de ortonormalidade impõem que o produto escalar destes dois vetores seja nulo. Então:

$$5 * 1 + (-3) * (-5) + 2 * x = 0$$

   de onde $5 + 15 + 2x = 0$ ou $x = -10$.

8. Um pequeno bote, dentro do qual está uma pedra de granito com a forma de um paralelepípedo, flutua numa piscina. A pedra tem um volume de 40 litros e pesa 110 Kgf. A piscina ocupa uma área de 60 m^2. O que acontece com o nível da água na beira da piscina quando a pedra é jogada na água ? Há algum princípio da Física que justifique sua resposta ?

   Resposta

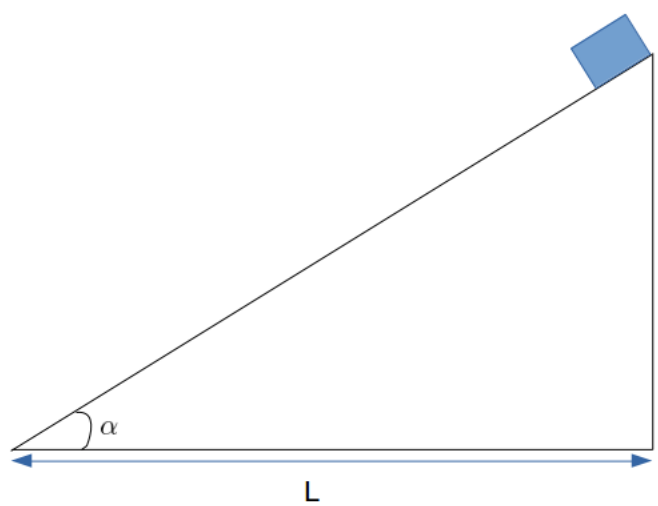
O principio de Arquimedes da mecânica dos fluidos diz que o empuxo que um corpo sofre dentro da agua é igual a peso do volume de água deslocado pelo corpo. A pedra que se encontrava dentro do barco faz o barco afundar por um volume de água que corresponde ao peso da pedra. Sendo a densidade da água menor do que a da pedra, o volume deslocado pelo barco dentro da água é maior do que o volume da pedra. Quando a pedra é jogada dentro da água ela desloca um volume d'água correpondente apenas ao seu proprio volume, mas a água deslocada pelo barco era maior. Assim o nível da piscina desce.

9. Uma geladeira é posta a funcionar com a porta aberta dentro de uma sala ou compartimento cujas paredes são isolantes térmicos perfeitos. O que acontecerá com a temperatura média dessa sala após muitas horas de funcionamento da geladeira? Justifique sua resposta com base nas Leis da Termodinâmica e em conceitos da Física.

   Resposta:

   Uma geladeira é uma máquina térmica que bombeia calor de dentro de seu interior para fora. O bombeamento de calor, por sua vez, consome energia. Apesar do calor transferido da parte interna da geladeira para a parte externa, a segunda Lei da Termodinâmica nos diz que isto não pode acontecer expontaneamente e é necessário a realização de um certo trabalho, com o fornecimento de energia. Desta forma a temperatura do compartimento fechado onde a geladeira se encontra vai aumentar.

10. Uma pequena caixa desliza sem atrito ao longo de toda extensão de um plano inclinado, cuja base horizontal tem um comprimento L. O plano inclinado forma um ângulo α com a horizontal. Admitindo que o ângulo α possa variar, mantendo-se L constante, determine para que ângulo α o tempo de descida é mínimo.



   Resposta

A caixa desliza com um aceleração igual a $g\ sen\alpha$, a componente da aceleração da gravidade na direção do plano inclinado. O tempo t que a caixa leva para percorrer a rampa total D esta expresso na equação do movimento acelerado:

$$D = \frac{gsen\alpha}{2}t^2$$

D é a hipotenusa do triangulo retangulo, então $cos\alpha = L/D$. Rescrevendo a equação anterior temos

$$\frac{L}{cos\alpha} = \frac{gsen\alpha}{2}t^2$$

Isolando o tempo teremos:

$$t = \sqrt{\frac{2L}{g\ sen\alpha\ cos\alpha}}$$

Derivando esta relação e igualando a zero para achar o extremo.

$$\frac{dt}{d\alpha} = 0 = 1/2(\frac{2L}{g\ sen\alpha\ cos\alpha})^{-1/2}(sen\alpha^2 - cos\alpha^2)$$

Finalmente:

$$sen\alpha = cos\alpha$$

ou $\alpha = 45^o$