



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE**  
**CENTRO DE TECNOLOGIA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

**Rafaela Lopes da Silva**

**ESTUDO DE PÓRTICOS PLANOS NÃO-LINEARES**  
**CONSIDERANDO OS EFEITOS TÉRMICOS**

**Natal**  
**2017**

**Rafaela Lopes da Silva**

**ESTUDO DE PÓRTICOS PLANOS NÃO-LINEARES  
CONSIDERANDO OS EFEITOS TÉRMICOS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, como requisito à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Nelson Maciel

**Natal  
2017**

UFRN / Biblioteca Central Zila Mamede  
Catalogação da Publicação na Fonte

Silva, Rafaela Lopes da.

Estudo de pórticos planos não-lineares considerando os efeitos térmicos  
/ Rafaela Lopes da Silva. - 2017.

171 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte,  
Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.  
Natal, RN, 2017.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Nelson Maciel.

1. Análise termomecânica – Dissertação. 2. Pórtico plano não linear -  
Dissertação. 3. Análise dinâmica – Dissertação. 4. Formulação posicional  
– Dissertação. 5. Integração temporal – Dissertação. I. Maciel, Daniel  
Nelson. II. Título.

RN/UF/BCZM

CDU 621.1

RAFAELA LOPES DA SILVA

**ESTUDO DE PÓRTICOS PLANOS NÃO-LINEARES  
CONSIDERANDO OS EFEITOS TÉRMICOS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, como requisito à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Daniel Nelson Maciel – Orientador

---

Prof. Dr. Marcelo Greco – Examinador Externo (UFMG)

---

Prof. Dr. João Carlos Arantes Costa Júnior – Examinador Externo (UFRN)

**Natal/RN, 24 de março de 2017.**

Dedico este trabalho ao meu pai José Jorge, às minhas mães Ana Lúcia e Maria Gorette, e aos meus irmãos Caio de Luca, Isabela Lopes, João Carlos, e Victória Lopes, pelo apoio e incentivo constante.

## AGRADECIMENTOS

À Jeová Deus primordialmente, por toda força e saúde para enfrentar esta jornada.

Ao meu pai José Jorge e às minhas mães Ana Lúcia e Maria Gorette, por todo amor, dedicação, paciência, compreensão, educação e incentivo dados em toda minha vida. Dos quais, sem os princípios a mim passados, eu não estaria conquistando esse aprimoramento profissional e moral.

Aos meus irmãos Caio de Luca, Isabela Lopes, João Carlos e Victória Lopes, pela amizade e incentivo.

Ao meu Orientador Prof. Dr. Daniel Nelson Maciel, não somente pela excelente orientação e paciência ao longo do trabalho, mas também pela amizade, dedicação, incentivo, ensinamentos e disponibilidade, sem os quais a realização deste trabalho não seria possível.

Ao colega do PEC João Paulo de Barros Cavalcante, por toda paciência e ajuda no desenvolver deste trabalho.

Aos amigos que fiz no curso do mestrado, Anderson Albino, Arthur Rebouças e Dário Morais, pelo companheirismo, parceria e momentos de descontração, que com certeza foram de extrema importância nessa longa caminhada. Agradeço principalmente aos amigos que fiz neste curso e levarei para toda vida, Bruno Freitas, Larissa Torquato e Tércio Pereira.

Aos laços de amizade que fiz na cidade de Natal, Ilana Gaspar, Sloany Medeiros e Suelen Camargo, pelos momentos de diversão e todo incentivo. Agradeço principalmente pelas valiosas amizades de Lucélia Araújo e Tamáris Brasileiro, por todos os momentos de esmorecimento em que me deram força e apoio para este trabalho e para a vida.

Às minhas amigas da Universidade Federal da Paraíba, Amanda Carneiro, Jéssica Vieira, Kamilla Mendonça, Vanessa Negreiros e Wênia Cristina, pela amizade e companheirismo.

Aos meus amigos Adilson Andrade, André Luiz, Bruno Ferreira, Carlos Henrique, Jankly Soares, Jéssica Jesse, Josette Cavalcanti, Márcio Gonçalves, Marília Zenaide, Rafaella Rodrigues e Simone Morena, pelos momentos de descontração que me deram fôlego para encarar essa caminhada. Principalmente pelas palavras dosadas de realidade a mim dadas por Adilson Andrade e Jankly Soares.

A todos os meus familiares que me ajudaram e incentivaram de alguma forma, principalmente à minha Vó Alice.

A todos meus professores, não somente do curso de mestrado, mas também da graduação e ensino médio, pela contribuição ética, moral e profissional em minha vida, em especial à Prof.<sup>a</sup> Iza Souza e ao Prof. Dr. Roberto Leal, cujos incentivos e ensinamentos me guiaram na vida profissional e pessoal.

A todo o quadro de funcionários do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRN, em especial às Secretárias Rafaella Kaline, Viviane Regina e Afra Dara, pela eficiência e empenho na execução do seu trabalho. Também agradeço à coordenadora do programa Prof.<sup>a</sup> Dra. Ada Cristina, pelo ótimo trabalho e palavras de incentivo dadas no início do curso.

Aos componentes da banca examinadora desta dissertação Prof. Dr. João Carlos Arantes Costa Júnior e Prof. Dr. Marcelo Greco, pela disponibilidade e pelas contribuições para melhoria deste estudo.

Por fim, a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo suporte financeiro.

*“A vaidade e o orgulho são coisas diferentes, embora as palavras sejam frequentemente usadas como sinônimos. Uma pessoa pode ser orgulhosa sem ser vaidosa. O orgulho relaciona-se mais com a opinião que temos de nós mesmos, e a vaidade, com o que desejaríamos que os outros pensassem de nós.”*

Jane Austen - Orgulho e Preconceito

# ESTUDO DE PÓRTICOS PLANOS NÃO-LINEARES CONSIDERANDO OS EFEITOS TÉRMICOS

Rafaela Lopes da Silva

Orientador: Prof. Dr. Daniel Nelson Maciel

## RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo sobre a influência dos efeitos térmicos no comportamento dinâmico de estruturas de pórtico plano não lineares físicos e geométricos, nas quais esforços de flexão e cisalhamento são predominantes. Uma formulação fundamentada na primeira e segunda leis da termodinâmica e energia livre de Helmholtz é apresentada neste trabalho para considerar os efeitos térmicos neste tipo de estrutura. Utiliza-se como ferramenta de análise estrutural o Método dos Elementos Finitos Posicional, que difere do método convencional pelo simples fato de adotar como incógnitas as posições nodais, ao invés dos deslocamentos nodais. O problema não linear dinâmico é solucionado diante da combinação do processo iterativo de Newton-Raphson com uma gama de algoritmos de integração temporal, explícitos e implícitos, sendo os resultados numéricos confrontados com exemplos encontrados na literatura especializada. Como também, apresenta-se uma descrição de uma técnica para solução de problemas de impacto.

**Palavras-chave:** Pórtico plano não linear. Análise termomecânica. Análise dinâmica. Formulação posicional. Integração temporal.

# A STUDY OF NONLINEAR 2D-FRAMES CONSIDERING THERMIC EFFECTS

Rafaela Lopes da Silva

Advisor: Prof. Dr. Daniel Nelson Maciel

## ABSTRACT

This work presents a study considering the thermal effects in the dynamic behaviour of nonlinear 2D-frame structures (physical and geometric), in which the effects of bending and shear are predominant. A formulation based on the first and second laws of thermodynamic and the Helmholtz free-energy is presented in this work to consider the thermic effects on this type of structure. The Finite Element Method based on nodal positions, rather than nodal displacements, is used as structural analysis tool. The solution of the nonlinear dynamic problem is given through the combination of Newton-Raphson iterative process with several explicit and implicit time integration methods, wherein the numerical results are compared with the ones found on specialized literature. As well, it is presented a description of one technique to solution of impact problems.

**Keywords:** Nonlinear 2D-Frame. Thermomechanical analysis. Dynamic analysis. Positional formulation. Time integration.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.1 – Diagrama de tensão-deformação para um aço dúctil submetido a ensaio de tração (sem escala).....	10
Figura 2.2 – Gráfico tensão x deformação .....	12
Figura 2.3 – Relação tensão x deformação para o modelo elastoplástico perfeito ...	13
Figura 2.4 - Modelo elastoplástico com encruamento isótropo .....	17
Figura 2.5 - Modelo elastoplástico com encruamento cinemático .....	20
Figura 4.1 – Discretização de um sólido genérico.....	44
Figura 4.2 – Elemento de pórtico plano com n nós .....	49
Figura 5.1 - Método de Newton-Raphson resolvendo a equação de equilíbrio.....	58
Figura 5.2 - Fluxograma da discretização temporal associada ao procedimento iterativo.....	74
Figura 5.3 – Condição de penetração nula .....	76
Figura 5.4 – Regiões de estabilidade para os parâmetros de Newmark $\beta$ e $\gamma$ .....	77
Figura 6.1 – Esquema de deformação de um corpo bidimensional.....	81
Figura 6.2 – Esquema da seção transversal do elemento .....	82
Figura 6.3 – Esquema de elemento de pórtico plano com ‘n’ nós.....	88
Figura 7.1 – Temperatura ao longo da barra.....	94
Figura 7.2 – Carregamento térmico cossenoide.....	95
Figura 7.3 – Temperatura da barra ao longo do tempo.....	96
Figura 7.4 - Esquema do sistema massa-mola com dados do problema.....	97
Figura 7.5 - Deslocamento do grau de liberdade analisado .....	98
Figura 7.6 – Deslocamento do grau de liberdade analisado comparando os modelos elastoplásticos.....	98

Figura 7.7 – Deslocamento do grau de liberdade analisado considerando os efeitos térmicos.....	99
Figura 7.8 – Esquema da viga treliçada .....	100
Figura 7.9 – Variação dos deslocamentos do ponto 2 .....	100
Figura 7.10 – Variação da temperatura no ponto 1 segundo a análise termoelástica .....	101
Figura 7.11 – Distribuição da temperatura e configuração deformada da viga treliçada segundo a análise termoelástica com $\theta_0 = 200^\circ\text{C}$ .....	102
Figura 7.12 - Variação da temperatura no ponto 3 segundo a análise termoelastoplástica .....	103
Figura 7.13 - Distribuição da temperatura e configuração deformada da viga treliçada segundo a análise termoelastoplástica com modelo elastoplástico misto ( $\theta_0 = 20^\circ\text{C}$ para $t = 0,1\text{s}$ ).....	104
Figura 7.14 - Distribuição da temperatura e configuração deformada da viga treliçada segundo a análise termoelastoplástica com modelo elastoplástico perfeito ( $\theta_0 = 20^\circ\text{C}$ para $t = 0,1\text{s}$ ).....	104
Figura 7.15 – Viga engastada e dados do problema.....	105
Figura 7.16 - Deslocamento U da viga engastada em função do tempo .....	105
Figura 7.17 - Deslocamento U da viga engastada em função do tempo com e sem amortecimento.....	106
Figura 7.18 - Mudanças de temperatura na viga engastada com e sem amortecimento .....	107
Figura 7.19 – Esquematisação do mecanismo flexível articulado e dados de entrada do problema .....	108
Figura 7.20 – Posição horizontal do bloco referente ao Carregamento I .....	109
Figura 7.21 - Posição horizontal do bloco referente ao Carregamento II .....	110
Figura 7.22 – Configurações do 1º ciclo do mecanismo articulado para a primeira situação de carregamento com massa do bloco desprezível .....	110

Figura 7.23 - Configurações do 2º ciclo do mecanismo articulado para a primeira situação de carregamento com massa do bloco desprezível .....	111
Figura 7.24 - Configurações do 1º ciclo do mecanismo articulado para a segunda situação de carregamento com massa do bloco desprezível .....	111
Figura 7.25 – Comparação dos resultados para a posição horizontal do bloco com massa de 15 e 30%.....	112
Figura 7.26 - Configurações do 1º Ciclo do mecanismo para o carregamento I com massa do bloco de 30% .....	113
Figura 7.27 - Configurações do 2º Ciclo do mecanismo para o carregamento I com massa do bloco de 30% .....	113
Figura 7.28 - Configurações do 1º Ciclo do mecanismo para o carregamento II com massa do bloco de 30% .....	114
Figura 7.29 – Comparação dos resultados para a posição horizontal do bloco referente ao Carregamento I para: (a) bloco com massa desprezível; (b) bloco com massa de 30% .....	114
Figura 7.30 - Comparação dos resultados para a posição horizontal do bloco referente ao Carregamento II para: (a) bloco com massa desprezível; (b) bloco com massa de 30% .....	115
Figura 7.31 - Comparação dos resultados com acoplamento termomecânico para a posição horizontal do bloco com massa desprezível .....	116
Figura 7.32 - Comparação dos resultados com acoplamento termomecânico para a posição horizontal do bloco com massa de 15%.....	116
Figura 7.33 - Comparação dos resultados com acoplamento termomecânico para a posição horizontal do bloco com massa de 30%.....	117
Figura 7.34 - Comparação das configurações do mecanismo articulado para análise mecânica e termomecânica com massa do bloco desprezível.....	117
Figura 7.35 – Mudanças da temperatura do mecanismo do bloco com massa desprezível .....	118
Figura 7.36 – Barra giratória flexível e dados do problema.....	119

Figura 7.37 – Deslocamentos relativos ao movimento de corpo rígido da barra giratória .....	120
Figura 7.38 – Comparação dos métodos de integração temporal para a barra giratória ( $\Delta t = 0.005$ ) .....	121
Figura 7.39 - Comparação dos métodos de integração temporal para a barra giratória ( $\Delta t = 0.0005$ ) .....	122
Figura 7.40 – Configurações da barra para determinados instantes .....	124
Figura 7.41 - Velocidade e aceleração angular do nó restrito para o método de Newmark, $\Delta t = 0,0005$ .....	124
Figura 7.42 - Deslocamentos relativos considerando a restrição de temperatura na base .....	126
Figura 7.43 – Evolução da temperatura da barra giratória flexível com temperatura prescrita .....	127
Figura 7.44 - Deslocamento relativo U1 com acoplamento termomecânico sem restrição da temperatura .....	128
Figura 7.45 – Esquema do impacto entre barra e anteparo rígido com dados do problema .....	129
Figura 7.46 – Gráficos comparativos dos resultados do problema de impacto .....	131
Figura 7.47 – Mudanças de temperatura da barra no problema de impacto .....	132

**LISTA DE TABELAS**

Tabela 4.1 – Valores para o parâmetro alfa de integração temporal.....	48
Tabela 5.1 - Métodos da família de Newmark.....	63
Tabela 7.1 – Valores dos deslocamentos relativos para $\Delta t = 0,005$ .....	123
Tabela 7.2 - Valores dos deslocamentos relativos para $\Delta t = 0,0005$ .....	123

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\Gamma$	Fronteira
$\Gamma_1$	Fronteira de Dirichlet ou essencial
$\Gamma_2$	Fronteira Neumann ou natural
$\bar{E}$	Trabalho Frio
$F_i$	Forças de corpo
$F_{cont}$	Forças de contato
$F_{ext}$	Forças externas
$F_{int}$	Forças internas
$H_{elast}$	Geração de calor associada as deformações elásticas
$H_{plast}$	Geração de calor associada as deformações plásticas
$H_{TF}$	Energia retida como trabalho frio
$K_a$	Perda de Energia Devido ao Amortecimento
$K_c$	Energia Cinética
$Q_t, R_t$	Contribuições do passado associadas aos esquemas de integração temporal
$R_m$	Fonte de calor mecânica
$T_\pi$	Período
$U_e$	Energia de deformação
$X_0$	Posição inicial
$X_i, \dot{X}_i$ e $\ddot{X}_i$	Posição, velocidade e aceleração nodal
$V_0$	Volume inicial
$J_0$	Determinante da Matriz Jacobiana
$c_e$	Calor Específico
$c_m$	Coeficiente de Amortecimento
$tol$	Tolerância de convergência do processo iterativo
$\dot{u}$	Taxa de mudança de energia interna
$u_e$	Energia específica de deformação elástica
$\rho_0$	Densidade do corpo no referencial lagrangiano
$\ddot{x}$	Aceleração

$\dot{x}$	Velocidade
$x$	Posições Nodais
$\bar{\alpha}$	Parâmetro de aproximação temporal
$\beta_c, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$	Parâmetros de dissipação numérica do método de Chung & Lee
$\delta_{ij}$	Delta de Kronecker
$\varepsilon, \varepsilon_t, \varepsilon_n$	Medida de deformações
$\varepsilon^e$	Deformações elásticas
$\varepsilon^p$	Deformações plásticas
$\varepsilon^\theta$	Deformações térmicas
$\lambda_t, \lambda_n$	Alongamentos ao longo das coordenadas adimensionais
$\gamma_{tn}$	Distorção
$\varepsilon_{kk}$	Traço do tensor de deformações
$\varepsilon_{ij}$	Tensor de deformações
$\theta_0$	Temperatura de referência
$\theta_w$	Parâmetro de integração temporal de Wilson- $\theta$
$\sigma_y$	Tensão de escoamento
$\sigma_r$	Tensão normal última
$\sigma_{rup}$	Tensão de ruptura
$\sigma_{lp}$	Tensão limite de proporcionalidade
$\omega_{m\acute{a}x}$	Máxima frequência natural
$p_m$	Ponto sobre a linha média do elemento finito
$x_m, y_m$	Coordenadas do ponto sobre a linha média do elemento finito
$\Delta Q$	Variação de Calor
$\Delta U$	Variação de Energia
$\Delta W$	Variação de Trabalho
$\Delta t$	Intervalo de integração temporal
$\Delta t_{crit}$	Intervalo de integração temporal crítico
$\Delta \lambda$	Magnitude da evolução das variáveis associadas a plastificação
$\Delta \varepsilon^p$	Variação de deformação plástica
$\Delta X$	Incremento de posição
$\nabla g(X_0)$	Matriz hessiana
$\Theta$	Gradiente de temperatura

$A$	Área; Tensores gradiente de mudanças de configuração auxiliar
$B_0, B_1$	Configurações relativas ao referencial lagrangiano
$C$	Matriz de capacitância de calor; Matriz de Amortecimento
$E$	Módulo de Elasticidade Longitudinal
$E_t$	Módulo plástico tangente
$F$	Vetor de forças externas; Vetor de carregamento térmico
$G$	Módulo de Elasticidade Transversal
$H$	Módulo plástico de encruamento cinemático, Matriz inversa do Jacobiano
$J$	Matriz Jacobiana
$K$	Matriz de condução de calor, Módulo plástico de encruamento isótropo
$L$	Comprimento do elemento
$M$	Matriz de Massa
$\vec{N}$ e $\vec{T}$	Vetores unitários referentes à seção transversal do elemento
$P$	Energia potencial das forças externas
$Q$	Calor Gerado pelo Sistema
$R$	Fonte de Calor Interna
$S$	Entropia
$T$	Temperatura Absoluta
$V$	Volume
$W$	Trabalho
$b$	Largura do elemento finito
$g$	Gravidade
$g(X)$	Vetor de forças residuais
$h$	Altura do elemento finito
$k$	Coefficiente de Condutividade Térmica
$m$	Massa
$n$	Normal a Superfície; Número de nós; Variável auxiliar para definir o passo anterior
$p$	Ponto qualquer na seção transversal do elemento finito; Vetor posição do elemento;

$\dot{p}, \ddot{p}$	Vetores velocidade e aceleração do elemento finito;
$q$	Fluxo de calor pela superfície; Deslocamento do intervalo elástico inicial no encruamento cinemático.
$t$	Variável tempo
$u$	Energia interna
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$v$	Velocidade
$z$	Altura em relação ao referencial do sistema
$\Lambda$	Dissipação interna
$\Pi$	Funcional de Energia Potencial
$\Phi$	Energia livre de Helmholtz
$\Psi$	Potencial elástico
$\Omega$	Domínio
$\alpha$	Coefficiente de expansão térmica; Ângulo de rotação dos vetores unitários da seção transversal do elemento finito;
$\alpha_1$	Coefficiente de expansão térmica
$\alpha_2$	Coefficiente de geração de calor
$\theta_r$	Ângulo global da seção transversal do elemento finito
$\beta, \gamma$	Constantes de integração temporal de Newmark
$\delta$	Distância entre Anteparo Rígido e Estrutura
$\theta$	Varição de temperatura
$\varpi$	Variável Interna Relativa ao Endurecimento
$\xi$	Variável adimensional relativa à direção longitudinal
$\eta$	Variável adimensional relativa à direção transversal
$\rho$	Densidade do material
$\sigma$	Tensor de Tensões; Tensão atuante
$\omega$	Variável Interna Associada ao Histórico das Deformações Plásticas
$\vartheta$	Trabalho plástico convertido em calor
$\phi$	Funções de Forma
$\lambda, \mu$	Constantes de Lamé

## SUMÁRIO

CAPÍTULO 1: Introdução.....	1
1.1 Justificativas .....	4
1.2 Objetivos.....	5
1.2.1 Objetivo geral.....	5
1.2.2 Objetivos específicos.....	5
1.3 Metodologia .....	6
1.4 Organização do trabalho .....	7
CAPÍTULO 2: Modelos elastoplásticos .....	8
2.1 Modelo elastoplástico perfeito .....	12
2.2 Modelo elastoplástico com encruamento linear positivo.....	16
2.2.1 Modelo elastoplástico com encruamento isotrópico .....	17
2.2.2 Modelo elastoplástico com encruamento cinemático.....	19
2.2.3 Modelo elastoplástico com encruamento misto .....	21
2.3 Algoritmo para implementação do modelo elastoplástico misto .....	22
CAPÍTULO 3: Modelos termomecânicos.....	24
3.1 Termodinâmica.....	25
3.1.1 Lei zero da termodinâmica .....	26
3.1.2 Primeira lei da termodinâmica .....	26
3.1.3 Segunda lei da termodinâmica .....	26
3.1.4 Lei de Fourier para condução de calor .....	27
3.2 Teoria da termoelasticidade desacoplada .....	28
3.3 Teoria clássica da termoelasticidade acoplada .....	29
3.3.1 Primeira lei da termodinâmica .....	30
3.3.2 Equação diferencial de condução de calor .....	31

3.3.3	Princípio da taxa de trabalho .....	33
3.3.4	Segunda Lei da termodinâmica .....	33
3.3.5	Energia Livre de Helmholtz.....	34
3.3.6	Potencial elástico.....	35
3.3.7	Equação de condução de calor termoelástica .....	36
3.3.8	Equação de equilíbrio termoelástica .....	37
3.4	Teoria da termoplasticidade .....	38
3.4.1	Primeira e segunda lei da termodinâmica.....	39
3.4.2	Teoria das variáveis internas.....	40
CAPÍTULO 4: Métodos dos elementos finitos aplicado à termodinâmica .....		44
4.1	Discretização do problema de condução de calor .....	45
4.2	Método dos resíduos ponderados .....	46
4.3	Integração temporal de equações parabólicas .....	47
4.4	Aplicação para o elemento de pórtico plano.....	48
CAPÍTULO 5: Formulação posicional empregada em problemas dinâmicos não lineares.....		52
5.1	Funcional de energia potencial total .....	53
5.1.1	Balanço de Energia .....	53
5.1.2	Energia total de deformação.....	56
5.1.3	Matriz de massa e de amortecimento.....	56
5.2	Método de Newton-Raphson .....	57
5.3	Métodos de integração temporal .....	59
5.3.1	Método de Newmark.....	62
5.3.2	Método de Houbolt .....	64
5.3.3	Método de Wilson- $\theta$ .....	65
5.3.4	Método das Diferenças Centrais.....	68

5.3.5	Método da Diferença Finita de Quarta Ordem (Souza & Moura, 1997)	70
5.3.6	Método de Chung & Lee (1994)	72
5.4	Implementação numérica do problema termoelastoplástico	73
5.5	Impacto de estruturas com anteparo rígido	75
5.5.1	Parâmetros de Newmark e regularização da solução de impacto	76
CAPÍTULO 6: Cinemática de Reissner para Pórticos Planos		79
6.1	Mapeamento da geometria	81
6.2	Medida de deformação	84
6.3	Energia potencial total	86
6.4	Equacionamento dinâmico	87
CAPÍTULO 7: Aplicações numéricas		92
7.1	Barra unidimensional com temperatura restrita	93
7.2	Barra submetida à um carregamento térmico	94
7.3	Sistema massa-mola plastificado	96
7.4	Sistema massa-mola com acoplamento termomecânico	99
7.5	Viga treliçada com acoplamento termomecânico	99
7.6	Viga engastada com amortecimento	104
7.7	Análise termomecânica de viga engastada amortecida	107
7.8	Mecanismo flexível articulado	108
7.9	Mecanismo articulado com acoplamento termomecânico	115
7.10	Barra giratória flexível com deslocamento aplicado	118
7.11	Barra giratória flexível com temperatura restrita	125
7.12	Impacto entre barra e anteparo rígido com acoplamento termomecânico	128
CAPÍTULO 8: Conclusões		133
Referências Bibliográficas		137
APÊNDICES		149

## CAPÍTULO 1

# Introdução

### 1 Considerações Iniciais

Tanto no âmbito acadêmico de ensino de engenharia quanto na indústria, o Método dos Elementos Finitos (MEF) é ferramenta indispensável na análise estrutural devido a sua diversidade e flexibilidade (Lewis *et al.*, 2004). Denominado como MEF Posicional, uma variação do MEF convencional foi introduzida por Coda (2003), que difere, principalmente, do método dos elementos finitos padrão para sólidos no seguinte aspecto: o método padrão tem como incógnitas os deslocamentos nodais, enquanto que no método posicional, as incógnitas são as posições nodais (CODA & GRECO, 2004). Este simples fato, acarreta em diversas outras diferenças na formulação do método, o qual utiliza-se neste trabalho.

Os avanços tecnológicos fomentam o desenvolvimento de projetos estruturais inovadores, tanto em se tratando da geometria, que a cada dia tende-se a utilizar uma quantidade menor de recursos naturais, tornando as estruturas mais esbeltas, quanto na utilização de novos materiais. Fatos estes, tendem a aumentar os efeitos oriundos das não linearidades da estrutura, consideradas uns dos diversos paradigmas que ocorrem na análise estrutural. De forma que em muitos casos, desconsiderar seus efeitos pode ocasionar em análises que não representem adequadamente o comportamento estrutural mais próximo do real.

Dentre outras, existem dois tipos básicos de não-linearidades que podem ocorrer. O primeiro tipo é chamado de não-linearidade física que está ligado diretamente ao material, e é causado por um comportamento elástico não linear, plástico ou viscoso do material que compõe a estrutura. Para sua consideração existem hoje na literatura, inúmeros modelos que visam simular tal comportamento, sendo os abordados neste trabalho os modelos elastoplásticos perfeito e com encruamento positivo.

O segundo tipo de não linearidade é denominada de geométrica, e ocorre quando deslocamentos ou deformações são suficientemente grandes para causar mudanças significativas na estrutura fazendo com que as equações de equilíbrio sejam formuladas na configuração deformada da mesma. Considerado uma das principais estratégias para solução do problema não linear geométrico e adotado para este estudo, o processo iterativo de Newton-Raphson se dá pela aproximação da trajetória de equilíbrio da estrutura por tangentes à mesma, até a condição de convergência (CAVALCANTE, 2016).

A consideração dos efeitos térmicos na análise de estruturas é uma área que possui grande notoriedade no âmbito acadêmico da engenharia, visto que em muitos casos, pode acarretar em redistribuição significativa dos esforços. A ciência que estuda tais efeitos é denominada de Termomecânica, e basicamente avalia o comportamento de corpos quando submetidos a carregamentos térmicos e mecânicos (CARRAZEDO, 2009). Os primeiros estudos acerca da termomecânica foram introduzidos por Duhamel (1837) e Neumann (1885), onde surge a teoria da termoelasticidade desacoplada. Duhamel diz que a temperatura participa na determinação da resposta mecânica do corpo. Segundo ele, existe um estado inicial para determinada temperatura em que não são apresentadas tensões iniciais nem deformações.

No entanto, em trabalhos posteriores e através de experimentos científicos, foi comprovado que havia certas incompatibilidades entre a teoria e as observações físicas. Em novos estudos, foi observado que a temperatura é influenciada pelo estado mecânico do corpo, ou seja, mudanças de forma e deformações. Sendo assim, Biot (1956) introduziu a teoria da termoelasticidade acoplada, em que a parte mecânica é acoplada a parte térmica em termos de deformação e fluxo de entropia.

Na tentativa de descrever o comportamento dos materiais de forma generalizada, considerando os efeitos dissipativos, foram incorporadas variáveis termodinâmicas adicionais na teoria da termoelasticidade (HOLZAPFEL, 2004), surgindo uma teoria mais generalizada, conhecida como termoplasticidade, para considerar a fração de trabalho plástico convertida em calor no sistema.

Ao longo dos anos, os procedimentos referentes aos problemas que envolvem forças inerciais, ou seja, problemas dinâmicos, vêm sendo aperfeiçoados, nos quais para a obtenção de repostas satisfatórias, vêm-se desenvolvendo inúmeros métodos de integração temporal, cada um com características próprias de robustez, precisão e estabilidade. Desta forma, analisa-se tais problemas diante de vários métodos de integração com marcha no tempo encontrados na literatura, sendo alguns ainda pouco difundidos.

Referente aos problemas de impacto, nos quais a estrutura está sujeita a mudanças rápidas de configuração, sua formulação vem sofrendo aperfeiçoamentos ao longo dos anos. Um dos problemas para sua formulação está em constatar, ou melhor, identificar a ocorrência do início do contato (GRECO, 2004). De acordo com Greco (2004), existem inúmeros métodos para considerar o impacto na formulação. Alguns mais simples se baseiam na área de influência do elemento alvo, outros mais complexos se fundamentam no balanço das forças de superfície na região de contato. No entanto, para considerar o contato na formulação, far-se-á uso de uma formulação extremamente simples, baseada na condição de penetração nula.

Neste trabalho, a ideia principal é o estudo da resposta termomecânica de pórticos estruturais planos dinâmicos considerando seu comportamento não linear geométrico e físico, através de uma formulação simples baseada no MEF posicional com cinemática de Reissner, seguindo o trabalho desenvolvido em Carrazedo (2009) e Cavalcante (2016). A cinemática adotada aqui é amplamente difundida no meio acadêmico, e se diferencia da Teoria Clássica de Vigas de Euler-Bernoulli pela simples consideração dos efeitos de cisalhamento, através da introdução do parâmetro de distorção.

Desta forma, o estudo consiste em desenvolver rotinas computacionais utilizando a linguagem Fortran, a partir de um código já existente, desenvolvido por Maciel (2008), implementando as formulações para modelos elastoplásticos, termoelasticidade, termoplasticidade e formulação para problemas de impacto, para avaliar estruturas aperticadas não lineares através do MEF posicional com cinemática de Reissner.

## 1.1 Justificativas

Um projeto estrutural almeja, principalmente, garantir que a estrutura final será capaz de suportar as cargas a qual espera-se como solicitação, em um determinado horizonte de projeto, com boas condições de serviço. E isso tudo vinculado a um custo razoável. A segurança e o desempenho de um sistema estrutural são, invariavelmente, os principais objetivos técnicos de um projeto de engenharia, isto é, cumprir a função para qual foi projetado, com durabilidade e atendimento às suas condições de utilização.

Assim, sendo as estruturas cada vez mais inovadoras, principalmente em se tratando de suas características geométricas e físicas, exige-se uma análise não linear para obter resultados mais realistas a fim de aproveitar o máximo possível dessas características. É então, necessária a realização de pesquisas que reflitam de forma mais exata os avanços dos métodos nesta área que cresce com o aumento dos recursos computacionais modernos.

Para problemas dinâmicos o acoplamento termomecânico pode influenciar fortemente nos resultados, visto que as tensões oriundas da variação de temperatura podem modificar a distribuição dos esforços (CARRAZEDO, 2009; CAVALCANTE, 2016).

Seguindo o trabalho de Carrazedo (2009) e Cavalcante (2016), nos quais o comportamento termomecânico de treliças foi investigado, os estudos de estruturas mais complexas, como as de pórtico, podem contribuir ainda mais para essa área de estudo.

Posto que não foram encontradas na literatura especializada referências sobre análise dinâmica de estruturas aporticadas considerando os efeitos térmicos, acredita-se por parte da autora, que este trabalho apresenta um estudo pioneiro acerca deste assunto, e contribuirá de forma significativa para a academia.

Sendo assim, investigar estruturas de pórtico considerando suas possíveis não linearidades, e incorporar o tratamento termomecânico, poderá contribuir bastante nos estudos deste tipo de estrutura, pois assim, é possível representar mais fielmente seu comportamento estrutural, além de simular situações reais levando em conta condições especiais relacionadas à temperatura.

## 1.2 Objetivos

### 1.2.1 Objetivo geral

O principal objetivo deste trabalho é desenvolver um código computacional fundamentado no Método dos Elementos Finitos Posicional para estruturas de pórtico plano considerando as não linearidades física e geométrica em problemas termomecânicos e comparar com os resultados encontrados na literatura. Ademais, pretende-se também implementar uma gama de algoritmos de integração temporal implícitos e explícitos com a finalidade de comparar suas performances diante de variadas aplicações numéricas.

### 1.2.2 Objetivos específicos

- A partir de um código computacional pré-existente na linguagem Fortran de análise dinâmica de pórticos planos não lineares geométricos, em que se emprega o MEF Posicional, desenvolver rotinas computacionais para implementar:
  - Análise não linear física fazendo uso dos modelos elastoplásticos perfeitos e com encruamento positivo;
  - Formulação termodinamicamente consistente baseada na primeira e segunda leis da Termodinâmica e Energia Livre de Helmholtz;
  - Formulação para problemas de impacto;
  - Diferentes métodos de integração com marcha no tempo;
- Validar as formulações aqui empregadas com exemplos da literatura:
  - Análise termomecânica em treliças;
  - Problemas com análise puramente térmicas;
  - Análise não linear física;
  - Problemas de impacto com acoplamento termomecânico;

- Fazer um estudo comparativo das análises mecânica e termomecânica em exemplos clássicos de pórticos planos encontrados na literatura, com o intuito de evidenciar os efeitos térmicos em estruturas nas quais predominam esforços de flexão e cisalhamento;
- Avaliar o desempenho dos algoritmos de integração temporal implementados no código computacional, diante de variadas aplicações numéricas.

### 1.3 Metodologia

A formulação posicional desenvolvida é descrita como lagrangiana total e, diferentemente do MEF convencional (baseado em deslocamentos), adota como parâmetros nodais suas coordenadas. Emprega-se o método iterativo de Newton-Raphson através da expansão de Taylor com vistas à solução do sistema não linear geométrico.

O tipo de estrutura aqui analisado é o pórtico plano, no qual pretende-se considerar suas não linearidades físicas e geométricas, sendo realizada análise termomecânica. Este trabalho é continuidade do desenvolvido em Carrazedo (2009) e Cavalcante (2016). As não linearidades envolvidas neste trabalho serão provenientes da mudança da geometria e das propriedades físicas do material (homogêneo e isótropo).

A fim de se comparar as respostas mediante diferentes algoritmos de integração temporal serão abordados seis métodos de integração temporal para solucionar o problema dinâmico: Newmark, Houbolt, Wilson- $\theta$ , Diferenças Centrais, Souza & Moura (1997) e Chung & Lee (1994).

Para os problemas de impacto com anteparo rígido será utilizada uma técnica abordada em Greco (2004), Marques (2006) e Maciel (2008) e consiste em limitar as posições dos nós que sofrem impacto através da condição de penetração nula.

Tendo o conhecimento dos parâmetros do problema, como as propriedades dos materiais, solicitações e sua geometria, pretende-se determinar as grandezas mecânicas ao longo do material, considerando suas não linearidades, através da formulação posicional.

A solução do problema se dá pelo desenvolvimento e implementação de rotinas computacionais em um código já existente, na linguagem Fortran, de análise de estruturas de pórtico plano, desenvolvido por Maciel (2008).

#### **1.4 Organização do trabalho**

O trabalho está categorizado em 8 capítulos, sendo o primeiro apenas introdutório, apresentando uma contextualização do tema, bem como justificativas e objetivos do estudo.

Apresenta-se no segundo capítulo uma formulação sucinta para os modelos elastoplásticos perfeito e com encruamento positivo para tratar das não linearidades físicas dos materiais componentes das estruturas analisadas.

Os modelos termomecânicos são abordados no terceiro capítulo deste trabalho, no qual apresenta-se uma breve contextualização histórica das teorias da termoelasticidade desacoplada e acoplada e da termoplasticidade, bem como a descrição das formulações fundamentadas na termodinâmica. Para utilizar-se de tais formulações na análise estrutural, o quarto capítulo aborda a discretização do problema térmico através do Método dos Elementos Finitos.

O quinto capítulo traz uma abordagem da formulação posicional desenvolvida por Coda (2003) e suas técnicas de resolução. Além das estratégias adotadas para solução do problema dinâmico e do processo iterativo de Newton-Raphson para tratar do problema não linear geométrico, apresenta-se também o equacionamento dos algoritmos de integração temporal, e o esquema para consideração do impacto neste capítulo.

Os conceitos e a descrição da Cinemática de Reissner aplicados a problemas dinâmicos são abordados no sexto capítulo. Já no sétimo capítulo são apresentadas variadas aplicações numéricas para validar a formulação empregada neste trabalho, juntamente com uma breve discussão dos resultados.

Por fim, o capítulo 8 apresenta as conclusões do estudo aqui desenvolvido, bem como sugestões para trabalhos futuros.

## CAPÍTULO 2

# Modelos elastoplásticos

### 2 Conceitos e contextualização histórica

Segundo Chen e Han (1988), em um projeto de engenharia duas etapas são consideradas: a primeira é a determinação dos esforços atuantes e análise da distribuição das tensões que ocorrem dentro dos elementos estruturais; e a segunda é a resposta do material submetida a estes esforços, e envolve um conhecimento das propriedades do material adotado. Em relação a esta, a idealização de um material perfeito é definida pela teoria da elasticidade, no qual a relação tensão-deformação é linear. No entanto, sabe-se que na prática não existe material perfeitamente elástico, o que caracteriza a não linearidade física do mesmo (NLF).

Consta-se que a descrição deste comportamento NLF é de extrema dificuldade, o que torna necessário a adoção de modelos simplificados que almejam reproduzir de forma mais aproximada o real comportamento das estruturas (CAVALCANTE, 2016). Os estudos pioneiros acerca do comportamento elastoplástico dos materiais foi conduzido e divulgado por Tresca numa série de artigos entre 1864 e 1872, de acordo com Chen e Han (1988).

No entanto, a formulação da teoria da plasticidade foi divulgada apenas em 1870 por Saint Venant, no qual introduziu as relações constitutivas básicas, com base em três suposições: não há variação no volume do material durante a deformação plástica; a direção das deformações principais coincide com a direção das tensões principais; e a tensão de cisalhamento máxima em cada ponto é igual a uma constante específica.

Bauschinger criou em 1879 um extensômetro capaz de medir alongamentos dos materiais ensaiados com a precisão de  $10^{-6}$ , o que se considera como um grande avanço para o estudo da resistência dos materiais. Este instrumento permitiu detectar o limite de proporcionalidade entre tensão e deformação (linearidade) de um material,

e percebeu-se que quando esse limite era superado surgiam deformações irreversíveis, ou seja, permanentes (RUBERT, 1993).

Mais tarde, em 1886, Bauschinger reportou um fenômeno no qual quando um material é carregado e descarregado uniaxialmente numa direção no regime plástico, e, prontamente, recarregado na direção inversa, pode ocorrer durante a recarga um nível de tensão menor que o valor obtido na situação de carregamento inicial, o que hoje é conhecido como Efeito Bauschinger (Yan, 1998).

Consolidou-se assim os fundamentos do estudo da não-linearidade física do material de forma que sua consideração, juntamente com a não-linearidade geométrica, é de extrema importância em projetos de estruturas esbeltas.

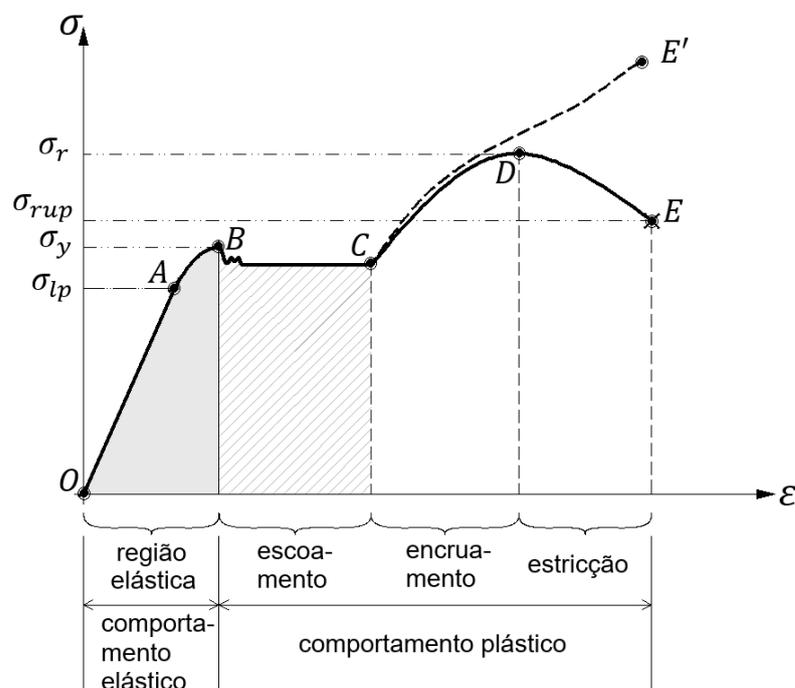
De acordo com Neto (1998) apud Cavalcante (2016), as deformações elástica e plástica são caracterizadas pela movimentação relativa dos átomos promovida por determinada solicitação. Quando um material trabalha além do regime elástico, é possível que ocorram dois fenômenos: a plasticidade que se caracteriza pela irreversibilidade das deformações; e o encruamento, caracterizando o aumento da resistência com o avanço das deformações (endurecimento). O comportamento elastoplástico também é caracterizado pela irreversibilidade por abordar um processo em que há dissipação de energia e não-viscosidade (REIS, 2012).

Para compreender melhor as diferentes fases do comportamento de um material elastoplástico, o diagrama tensão-deformação característico de um corpo-de-prova de aço dúctil é apresentado na Figura 2.1, mais especificamente referente ao ensaio de tração. Salientando-se que na prática, mesmo para ensaios adotando-se o mesmo material, os diagramas tensão-deformação não serão exatamente iguais, pois dependem de inúmeras variáveis, como por exemplo imperfeições microscópicas, modo de fabricação, taxa de aplicação da carga, dentre outras (HIBELLER, 2004).

No regime elástico do material, indicado pelo trecho  $OB$ , a relação tensão deformação é linear. Nesta fase de carregamento as deformações são completamente recuperáveis, ou seja, caso as solicitações cessem, o corpo retorna para a sua configuração inicial sem deformações residuais. No entanto, observa-se que neste regime o material apresenta dois comportamentos. De acordo com Gere (2003), inicialmente a relação tensão deformação além de linear apresenta certa

proporcionalidade (trecho  $OA$ ), que por sua vez não mais existe a partir do ponto  $A$ . Dessa forma, a tensão referente a este ponto, tensão  $\sigma_{lp}$ , caracteriza o limite de proporcionalidade.

Figura 2.1 – Diagrama de tensão-deformação para um aço dúctil submetido a ensaio de tração <sup>1,2</sup>



Quando a tensão excede  $\sigma_{lp}$  o material apresenta comportamento elástico não linear, de forma que a cada acréscimo de tensão a deformação aumenta em maior proporção até atingir o limite de elasticidade do material. Neste caso,  $\sigma_y$  corresponde à tensão limite do regime elástico, sendo que a partir do ponto  $B$ , inicia-se o processo de escoamento, no qual surgem as deformações plásticas, consideradas permanentes. A tensão  $\sigma_y$  também é conhecida como a tensão de escoamento.

Percebe-se, analisando o diagrama da Figura 2.1, que quando o limite de elasticidade é atingido, dando início ao escoamento, o corpo-de-prova deforma de forma considerável sem aumento significativo da carga aplicada, indicado pelo trecho  $BC$ , no qual neste intervalo o material é considerado perfeitamente plástico.

<sup>1</sup> Diagrama apresentado sem escala, pois as deformações provocadas pelo escoamento podem ser de 10 a 40 vezes maiores que as obtidas no regime elástico, de acordo com Hibeller (2004) e Gere (2003).

<sup>2</sup> De acordo com a NBR 14724/2011, ilustrações e tabelas devem ser identificadas na parte superior precedida da palavra designativa, seguida de seu número de ordem de ocorrência no texto, em algarismos arábicos, do respectivo título e/ou legenda explicativa de forma breve e clara, dispensando consulta ao texto, e da fonte.

Segundo Gere (2003), ao término do escoamento do material, o aço começa a se recuperar. No processo de recuperação há uma mudança na microestrutura do aço, no qual o rearranjo dos cristais resulta no aumento da resistência, caracterizando o endurecimento por deformação, também chamado de encruamento (trecho  $CD$ ). No encruamento a curva possui inclinação positiva, e eventualmente atinge-se a carga máxima que o corpo-de-prova é capaz de suportar (ponto  $D$ ). A tensão correspondente à este valor máximo, é chamada de tensão normal última ( $\sigma_r$ ), e caracteriza o limite de resistência do material.

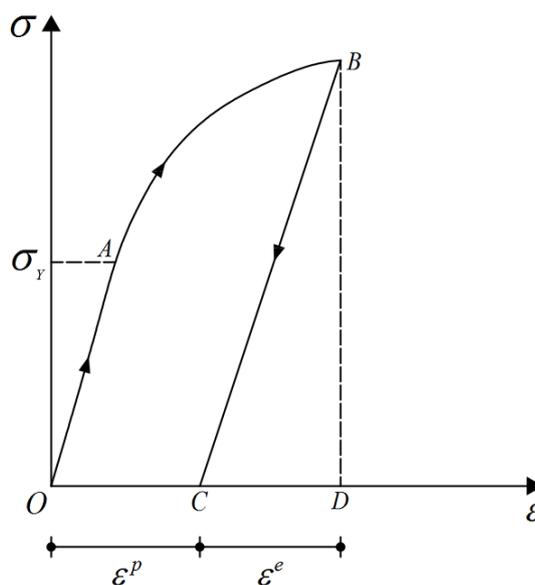
De acordo com Hibeller (2004), após atingir o limite de resistência inicia-se a estricção do aço. Neste fenômeno a área da seção transversal do corpo-de-prova reduz de forma gradativa numa região localizada, em vez de todo o seu comprimento. Como indicado pelo trecho  $DE$ , na região do corpo-de-prova onde ocorre a contração, a capacidade de resistência reduz em concordância com a decrescente área da seção transversal até alcançar a tensão de ruptura do aço ( $\sigma_{rup}$ ), onde ocorre a ruptura.

Gere (2003) afirma que se a área da seção transversal real na parte mais estreita da estricção for utilizada para o cálculo da tensão, a curva real de tensão deformação é obtida, dada pelo trecho  $CE'$ .

Para fins da prática da simulação deste trabalho, considera-se de forma bastante simplificada, que o comportamento típico de um material qualquer submetido a um esforço de tração crescente pode ser representado pela curva exposta no gráfico da Figura 2.2. Observa-se que as deformações plásticas surgem quando a tensão atuante excede a tensão de escoamento,  $\sigma_y$ , do material. Antes de alcançar este limite, a relação tensão-deformação é linear, o que caracteriza o regime elástico (trecho  $OA$ ), como mencionado anteriormente

Já o trecho  $AB$  representa o regime plástico do material, no qual a tensão atuante ultrapassa o limite da linearidade. Neste regime, as propriedades físicas do material modificam-se por consequência do rearranjo dos cristais que constituem o material (TORRES, 2003; CAVALCANTE, 2016). Percebe-se que ao longo do trecho  $AB$  (referente do regime plástico), o módulo de elasticidade do material, obtido inicialmente pela tangente do trecho linear, sofre redução gradativa. E por fim, o trecho  $BC$  caracteriza o descarregamento.

Figura 2.2 – Gráfico tensão x deformação



Fonte: Cavalcante (2016)

Para descrever o comportamento dos materiais de forma mais precisa, são empregados modelos matemáticos que englobam os regimes elástico e plástico (elastoplástico). A literatura apresenta vários modelos elastoplásticos para tal finalidade, no entanto será dado ênfase neste trabalho aos modelos elastoplásticos perfeito e elastoplástico com encruamento positivo, no qual o material tem a capacidade de resistir a uma tensão maior que a tensão de escoamento ( $\sigma_y$ ) de acordo com o modelo de encruamento utilizado (GRECO, 2004).

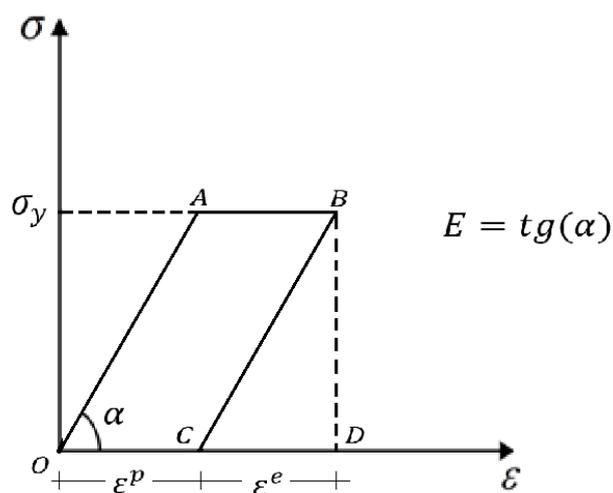
As formulações apresentadas nos itens a seguir, foram retiradas dos trabalhos de Cavalcante (2016), cujo autor se baseou nos trabalhos de Simo e Hughes (1998), Chen e Han (1988) e Dill (2007), e Reis (2012).

## 2.1 Modelo elastoplástico perfeito

No modelo elastoplástico perfeito considera-se que o corpo não é capaz de absorver tensões maiores que o limite de escoamento, portanto, a tensão solicitante não ultrapassa o  $\sigma_y$ . Ainda sobre este modelo, quando o material atinge o limite de escoamento não existe encruamento, e as deformações são apenas de caráter plástico, crescendo indefinidamente. A Figura 2.3 mostra a relação tensão-

deformação deste modelo, especificamente para o caso de tração uniaxial, por sua vez adotado por questões de simplicidade.

Figura 2.3 – Relação tensão x deformação para o modelo elastoplástico perfeito



Fonte: Adaptado de Cavalcante (2016)

De acordo com os postulados de Drucker, um corpo jamais liberará uma quantidade de energia maior do que a energia acumulada no início do processo. O que indica que a plastificação é resultado de processos unicamente dissipativos que se manifestam a nível microscópico na estrutura (PROENÇA, 1988).

Fazendo uma análise do ponto de vista energético da Figura 2.3, no processo de carregamento e descarregamento as deformações irreversíveis correspondem a energia dissipada ao longo do processo. Quando o carregamento está dentro dos limites do regime elástico a energia envolvida no processo equivale numericamente a área abaixo do trecho OA, por exemplo, e toda essa energia é recuperada na descarga do corpo, não ocorrendo dissipação, conseqüentemente sem deformações permanentes.

Em contrapartida, quando o carregamento atinge o nível de tensão de escoamento, a energia acumulada é igual ao valor da área compreendida abaixo do trecho OABD, por exemplo. Nesta fase, há dissipação de energia, isto é, quando o corpo é descarregado existirá apenas uma parcela da energia do processo que será recuperada, representada pelo trecho CBD.

Como pode ser observado na Figura 2.3, a deformação total quando o material está no regime elastoplástico é composta por duas parcelas: a elástica e a plástica. Obtém-se assim as seguintes relações:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (2.1)$$

$$\sigma = E \varepsilon^e = E(\varepsilon - \varepsilon^p) \quad (2.2)$$

Onde:  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon^e$  e  $\varepsilon^p$  são as deformações total, elástica e plástica, respectivamente;  $\sigma$  é a tensão; e  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal.

Conclui-se da Eq. (2.2) que a tensão é função da deformação total e da parcela de deformação plástica, e de acordo com Proença (1988) a presença desta confere um carácter não linear.

Para este modelo, observando o diagrama tensão deformação apresentado na Figura 2.3 e supondo que o material possua resposta simétrica na compressão, conclui-se que o módulo da tensão solicitante não pode ser maior que  $\sigma_y$ . Consequentemente, estados admissíveis de tensão devem respeitar a relação apresentada na Eq. (2.3).

$$f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y \leq 0 \quad (2.3)$$

Onde:  $f(\sigma)$  é uma função que define a condição de plastificação.

Em termos incrementais, as deformações irreversíveis surgem ou se alteram quando:

$$\Delta\varepsilon^p \neq 0 \quad (2.4)$$

Sendo a relação entre tensão e deformação dada pelas expressões abaixo:

$$\Delta\sigma = E\Delta\varepsilon^e \quad (2.5)$$

$$\Delta\sigma = E(\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^p) \quad (2.6)$$

A relação apresentada na Eq. (2.3) possibilita diferenciar os regimes elástico e plástico. No caso em que o estado de tensão for tal que  $f(\sigma) < 0$ , não há variação de deformação plástica, ou seja,  $\Delta\varepsilon^p = 0$ . No momento em que a tensão atinge o limite

de escoamento, isto é,  $f(\sigma) = 0$ , e o novo estado de tensão seja menor que zero,  $f(\sigma + \Delta\sigma) < 0$ , a resposta imediata não apresentará alteração na deformação plástica acumulada. Mas, na situação em que  $f(\sigma + \Delta\sigma) > 0$  começam a ocorrer deformações plásticas ( $\Delta\varepsilon^p \neq 0$ ).

Seja, portanto,  $\Delta\lambda$  o valor absoluto do incremento de deformação plástica, caso ocorra, e considerando que a deformação plástica pode dar-se tanto na compressão quanto na tração, tem-se:

$$\Delta\varepsilon^p = \Delta\lambda \geq 0 \quad \text{se} \quad \sigma = \sigma_y (> 0) \quad (2.7)$$

$$\Delta\varepsilon^p = -\Delta\lambda \leq 0 \quad \text{se} \quad \sigma = -\sigma_y (< 0) \quad (2.8)$$

Como o sinal de  $\Delta\lambda$  coincide com o de  $\sigma_y$  pode-se adotar um operador de sinal definido por  $sign(\cdot)$ , que é responsável por indicar o sinal da tensão. Desta forma, para englobar os casos de compressão e tração, pode-se escrever:

$$\Delta\varepsilon^p = \Delta\lambda sign(\sigma) \quad \text{se} \quad f(\sigma) = 0 \quad \text{com} \quad \Delta\lambda > 0 \quad (2.9)$$

Onde:

$$sign(\sigma) = -1, \quad \text{para} \quad \sigma < 0 \quad (2.10)$$

$$sign(\sigma) = +1, \quad \text{para} \quad \sigma > 0 \quad (2.11)$$

Ao se considerar o modelo elastoplástico perfeito, a condição da Eq. (2.9) é testada nos pontos simétricos em que  $\sigma = \pm\sigma_y$ . Logo pode-se definir a lei de evolução da deformação plástica por:

$$\Delta\varepsilon^p = \Delta\lambda sign(\sigma) \quad (2.12)$$

Observa-se que  $\Delta\lambda$  e  $f(\sigma) = 0$  verificam determinadas condições que se complementam em termos de sinal, ou seja,  $\Delta\lambda \geq 0$  e  $f(\sigma) \leq 0$ . Além disso, se  $\Delta\lambda \geq 0$  então  $f(\sigma) = 0$ , e caso  $f(\sigma) < 0$  logo  $\Delta\lambda = 0$ . O conjunto dessas possibilidades pode ser expressa por uma única relação apresentada na Eq. (2.13).

$$\Delta\lambda f(\sigma) = 0 \quad (2.13)$$

A condição de complementaridade expressada pela Eq. (2.13), expõe o comportamento simultâneo do critério de plastificação e do incremento de deformação plástica (CAVALCANTE, 2016). Esta condição implica que  $f(\sigma) = 0$  para acréscimos de deformação plástica. Portanto, novos estados de tensão,  $f(\sigma + \Delta\sigma)$ , também devem ser verificados e não ultrapassar o valor nulo, o que se denomina de condição de consistência. Isto garante que o carregamento de um estado plástico, irá conduzir a outro estado plástico, sendo que, enquanto o material permanecer em regime plástico, o critério de plastificação será atendido.

Sendo assim, as relações que expressam a forma incremental do modelo constitutivo elastoplástico perfeito são dadas por:

$$\Delta\sigma = E(\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^p) \quad (2.14)$$

$$f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y \leq 0 \rightarrow \text{critério de plastificação} \quad (2.15)$$

$$\Delta\varepsilon^p = \Delta\lambda \text{sign}(\sigma) \rightarrow \text{lei de plastificação} \quad (2.16)$$

$$\Delta\lambda f(\sigma) = 0 \text{ com } \Delta\lambda > 0 \text{ e } f < 0 \rightarrow \text{condição de complementaridade} \quad (2.17)$$

$$\Delta\lambda > 0 \text{ e } f(\sigma + \Delta\sigma) = 0 \rightarrow \text{condição de consistência} \quad (2.18)$$

É importante insistir em afirmar que para o modelo elastoplástico perfeito, a tensão de escoamento condiz com a tensão última, que acarreta no colapso do corpo, no qual ao se ultrapassar tais níveis de tensão, as deformações evoluem indefinidamente.

## 2.2 Modelo elastoplástico com encruamento linear positivo

A consideração do encruamento no modelo elastoplástico caracteriza a alteração do intervalo elástico inicial de tensões ocasionado pela evolução da deformação plástica (PROENÇA, 2007). Existem várias maneiras de se modelar o encruamento, seja em tamanho ou posição, definidos pelos encruamentos isotrópicos e cinemáticos, respectivamente, ou até mesmo na combinação de ambos, denominado de encruamento misto. Os itens a seguir descrevem os tipos de modelos elastoplásticos com encruamento linear positivo.

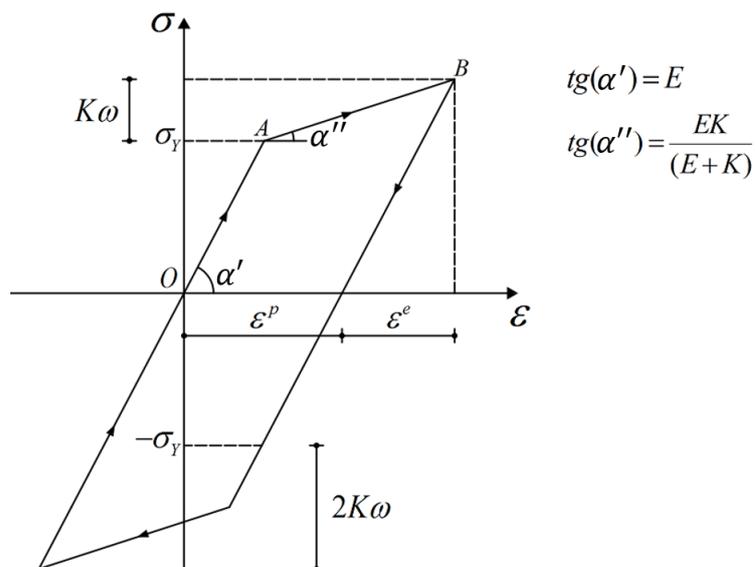
### 2.2.1 Modelo elastoplástico com encruamento isotrópico

A Figura 2.4 apresenta a relação tensão deformação para o modelo elastoplástico com encruamento isotrópico, no qual é possível verificar que o intervalo inicial de tensões, indicado no eixo das tensões por  $[-\sigma_y, \sigma_y]$ , é alterado em função da história de plastificação que ocorre no ciclo, para  $(-\sigma_y + K\omega)$  e  $(\sigma_y + K\omega)$ . O parâmetro  $K$  é denominado módulo plástico de encruamento e é expresso por:

$$K = \frac{E E_t}{E - E_t} \quad (2.19)$$

Sendo:  $E_t$  é o módulo elastoplástico tangente, expressado pela tangente do ângulo  $\theta$  indicado na Figura 2.4; e  $\omega$  é uma variável interna que registra o histórico das deformações plásticas.

Figura 2.4 - Modelo elastoplástico com encruamento isotrópico



Fonte: Cavalcante (2016)

Referente a relação entre tensão e deformação, a interação entre  $K$  e  $\omega$  define a inclinação da reta que representa o regime de endurecimento no trecho  $AB$ . Desta forma, para o modelo elastoplástico que considera o encruamento isotrópico, temos a seguinte relação:

$$f(\sigma, \omega) = |\sigma| - (\sigma_y + K\omega) \leq 0 \quad (2.20)$$

Para este modelo, as condições de complementaridade e consistência continuam sendo válidas e pertinentes. Logo, em conformidade com a Eq. (2.20) tem-se as seguintes relações:

$$\Delta\varepsilon^p = \Delta\lambda \geq 0 \quad \text{se} \quad \sigma = (\sigma_y + K\omega) \quad (> 0) \quad (2.21)$$

$$\Delta\varepsilon^p = -\Delta\lambda \leq 0 \quad \text{se} \quad \sigma = -(\sigma_y + K\omega) \quad (< 0) \quad (2.22)$$

Portanto, a Eq. (2.9) também é válida.

Torres (2003) diz que normalmente, presume-se que o encruamento seja função da deformação plástica acumulada. Ressalta-se que, por menor que seja, a existência de deformação plástica em determinado instante, independente do sinal, é mais do que o necessário para promover a expansão do intervalo inicial das tensões admissíveis.

Sendo assim, a lei de evolução do parâmetro  $\omega$  está diretamente vinculada com a lei de evolução das deformações plásticas, o que pode ser expresso pela Eq. (2.23).

$$\Delta\omega = |\Delta\varepsilon^p| \quad (2.23)$$

Observa-se da igualdade apresentada na expressão da Eq. (2.23) que, seja por tração ou compressão, a evolução das deformações plásticas ocasiona aumento do intervalo elástico inicial, ou seja, gera encruamento. Combinando a Eq. (2.23) com a (2.9), tem-se:

$$\Delta\omega = \Delta\lambda \quad (2.24)$$

Da condição de consistência, é possível estabelecer uma relação explícita para  $\Delta\lambda$ , visto que, a taxa de variação da função de tensão pode ser expressada pela Eq. (2.25).

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \Delta\sigma + \frac{\partial f}{\partial \omega} \Delta\omega \quad (2.25)$$

Considerando  $\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \text{sign}(\sigma)$  e relacionando as Eq. (2.6), (2.9) e (2.24), a expressão da Eq. (2.25) pode ser reescrita como:

$$\Delta f = \text{sign}(\sigma)E\Delta\varepsilon - \Delta\lambda(E + K) \leq 0 \quad (2.26)$$

Caso  $\Delta f = 0$  o incremento de plasticidade é maior que zero ( $\Delta\lambda > 0$ ), então:

$$\Delta\lambda = \frac{\text{sign}(\sigma)E\Delta\varepsilon}{(E + K)} \quad (2.27)$$

Relacionando as Eq. (2.6), (2.9) e (2.27), tem-se:

$$\Delta\varepsilon^p = \frac{E\Delta\varepsilon}{(E + K)} \quad (2.28)$$

$$\Delta\sigma = \frac{EK}{(E + K)}\Delta\varepsilon \quad \text{se } \Delta\lambda > 0 \quad (2.29)$$

Onde:  $EK/(E + K)$  caracteriza o módulo elastoplástico tangente, referente ao intervalo de encruamento.

De acordo com Cavalcante (2016), o significado físico do módulo plástico de encruamento pode ser obtido combinando as Eq. (2.28) e (2.29), resultando na expressão apresentada na Eq. (2.30).

$$\frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon^p} = K \quad (2.30)$$

### 2.2.2 Modelo elastoplástico com encruamento cinemático

Diferentemente do modelo com encruamento isotrópico, não há alteração no intervalo inicial de tensões no modelo com encruamento cinemático. Todavia, de acordo com o desenvolvimento do processo de plastificação, tal intervalo sofre mudança de posição no eixo das tensões (PROENÇA, 2007).

De acordo com Torres (2003), o encruamento é denominado cinemático quando o intervalo elástico inicial tem o tamanho mantido, mas sua origem no espaço é modificada pelo processo de plastificação, como é possível observar na Figura 2.5.

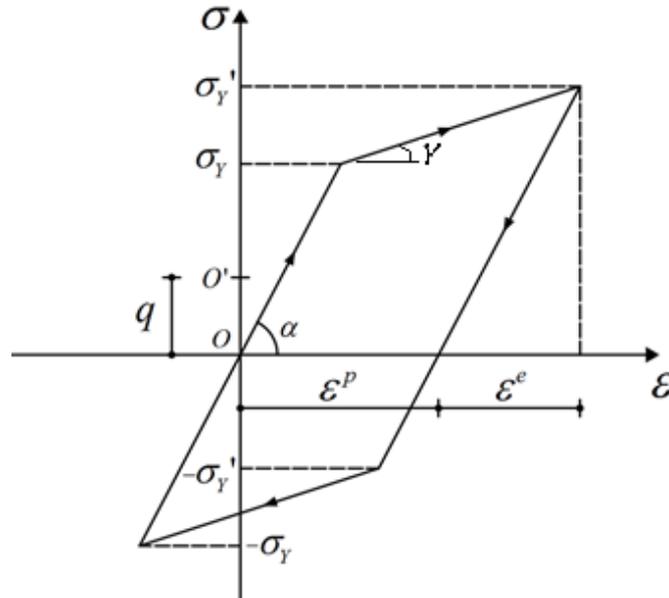
Sendo assim, a relação do critério de plastificação fica definida por:

$$f(\sigma, q) = |\sigma - q| - \sigma_y \leq 0 \quad (2.31)$$

Onde:  $q$  é a variável que caracteriza o deslocamento do intervalo no espaço.

É possível representar aqui o Efeito Baüschinger, posto que a plastificação oriunda dos esforços de tração modifica o limite elástico à tração para  $\sigma_y' = \sigma_y + q$  e reduz (em módulo) o limite elástico a compressão (Torres, 2003).

Figura 2.5 - Modelo elastoplástico com encruamento cinemático



Fonte: Cavalcante (2016)

A lei de evolução do parâmetro  $q$  é descrita por:

$$\Delta q = H \Delta \varepsilon^p \quad (2.32)$$

Onde:  $H$  é módulo plástico de encruamento cinemático.

Deve-se notar que o sentido da variação do parâmetro  $q$  é definido pelo sentido do fluxo plástico. Os incrementos de deformação plástica são definidos pelas seguintes condições, analogamente aos modelos elastoplásticos discutidos anteriormente:

$$\Delta \varepsilon^p = \Delta \lambda \geq 0 \quad \text{se} \quad \sigma - q = \sigma_y \quad (> 0) \quad (2.33)$$

$$\Delta \varepsilon^p = -\Delta \lambda \leq 0 \quad \text{se} \quad \sigma - q = -\sigma_y \quad (< 0) \quad (2.34)$$

Assim:

$$\Delta\varepsilon^p = \Delta\lambda \text{sign}(\sigma - q) \quad (2.35)$$

Assumindo as mesmas condições para os modelos anteriores:

$$\text{sign}(\sigma - q) = +1, \text{ para } (\sigma - q) > 0 \quad (2.36)$$

$$\text{sign}(\sigma - q) = -1, \text{ para } (\sigma - q) < 0 \quad (2.37)$$

Ao combinar as Eq. (2.32) e (2.35), tem-se:

$$\Delta q = \Delta\lambda H \text{sign}(\sigma - q) \quad (2.38)$$

### 2.2.3 Modelo elastoplástico com encruamento misto

A partir da combinação dos modelos elastoplásticos com encruamento isotrópico e cinemático obtém-se o modelo misto. Considerando as relações de critério de plastificação dos modelos anteriores, para o modelo misto, tem-se:

$$f(\sigma, q, \omega) = |\sigma - q| - (\sigma_y + K\omega) \leq 0 \quad (2.39)$$

Através da condição de consistência obtém-se uma expressão explícita para  $\Delta\lambda$ , obtida de modo análogo ao modelo com encruamento isotrópico:

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \Delta\sigma + \frac{\partial f}{\partial q} \Delta q + \frac{\partial f}{\partial \omega} \Delta\omega \quad (2.40)$$

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial |\sigma - q|} \frac{\partial |\sigma - q|}{\partial \sigma} \Delta\sigma + \frac{\partial f}{\partial |\sigma - q|} \frac{\partial |\sigma - q|}{\partial q} \Delta q + \frac{\partial f}{\partial \omega} \Delta\omega \quad (2.41)$$

Desta forma:

$$\Delta f = \text{sign}(\sigma - q) E \Delta\varepsilon - \Delta\lambda (E + H + K) \quad (2.42)$$

Caso  $\Delta f = 0$  tem-se  $\Delta\lambda > 0$ . Assim:

$$\Delta\lambda = \frac{\text{sign}(\sigma - q) E \Delta\varepsilon}{(E + H + K)} \quad (2.43)$$

$$\Delta\varepsilon^p = \frac{E\Delta\varepsilon}{(E + H + K)} \quad (2.44)$$

$$\Delta\sigma = \frac{E(H + K)}{(E + H + K)}\Delta\varepsilon \quad (2.45)$$

### 2.3 Algoritmo para implementação do modelo elastoplástico misto

Neste item será descrito o algoritmo para análise não linear incremental-iterativa encontrado no trabalho de Cavalcante (2016), no qual emprega-se o procedimento em passo finito para verificação do modelo constitutivo que engloba análise NLF. Considera-se aqui, não mais a formulação em forma infinitesimal, mas sim, como um passo finito ( $n + 1$ ).

É importante destacar que considerando a ocorrência da evolução do comportamento plástico, ainda quando  $f(\sigma) < 0$ , o início da deformação plástica, ou seja,  $\Delta\varepsilon^p \neq 0$ , não toma como condição  $f(\sigma) = 0$ . No entanto, as relações apresentadas anteriormente para os modelos elastoplásticos continuam sendo válidas.

O algoritmo caracteriza-se por duas etapas. A primeira tem caráter de verificação, no qual a partir da consideração que a deformação total  $\Delta\varepsilon_n$  é conhecida, determina-se os acréscimos  $\Delta\varepsilon_n^p$ ,  $\Delta\omega_n$  e  $\Delta\sigma_n$  para o passo atual  $n + 1$ , de forma que as relações que descrevem o modelo constitutivo sejam analisadas no novo estado (CAVALCANTE, 2016). Sendo as variáveis necessárias para a verificação dadas por:

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \Delta\varepsilon_n \quad (2.46)$$

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta\varepsilon_n^p \quad (2.47)$$

$$\omega_{n+1} = \omega_n + \Delta\alpha_n \quad (2.48)$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + \Delta\sigma_n \quad (2.49)$$

Verifica-se assim o critério de plastificação a partir das expressões abaixo:

$$\sigma_{n+1}^t = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p) \quad (2.50)$$

$$f_{n+1}^t = |\sigma_{n+1}^t - q_n| - [\sigma_y + K\omega_n] \quad (2.51)$$

Caso  $f_{n+1}^t \leq 0$  o passo está no regime elástico. Caso contrário, inicia-se a etapa de correção do algoritmo, visto que surgem deformações plásticas. Nesta etapa de correção os valores previstos são atualizados. Em resumo, o Quadro 2.1 apresenta o esquema para verificação em passos finitos para o modelo elastoplástico com encruamento misto.

Vale salientar que o modelo com encruamento misto pode simular o modelo elastoplástico perfeito ao se considerar  $K = H = 0$ .

Quadro 2.1 - Algoritmo para análise não linear incremental-iterativa para o modelo elastoplástico com encruamento misto

<p>A. Inicializações <math>\{\varepsilon_n^p, \omega_n, q_n\}</math></p> <p>B. Deformação total</p> $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \Delta\varepsilon_n$ <p>C. Cálculo da tensão elástica e verificação do carregamento plástico</p> $\sigma_{n+1}^t = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p)$ $f_{n+1}^t =  \sigma_{n+1}^t - q_n  - [\sigma_y + K\omega_n]$ <p>C.1 Se <math>f_{n+1}^t \leq 0</math> execute C.2, senão vá para C.3</p> <p>C.2 Passo Elástico:</p> $\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p$ $\sigma_{n+1} = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p)$ $\omega_{n+1} = \omega_n$ $q_{n+1} = q_n$ <p>C.3 Passo Plástico:</p> $\Delta\lambda_n = \frac{f_{n+1}^t}{E + K + H} > 0$ $\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^t - E\Delta\lambda_n \text{sign}(\sigma_{n+1}^t - q_n)$ $\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta\lambda_n$ $q_{n+1}^p = q_n^p + H\Delta\lambda_n \text{sign}(\sigma_{n+1}^t - q_n)$ $\omega_{n+1} = \omega_n + \Delta\lambda_n$ <p>D. Fim</p>
--

## CAPÍTULO 3

# Modelos termomecânicos

### 3 Conceitos e contextualização histórica

A termomecânica é a ciência que estuda a influência do estado térmico de um sólido em seu comportamento mecânico, bem como a influência da deformação nas mudanças de temperatura do mesmo. Segundo Sherief *et al.* (2004), o pioneiro nos estudos sobre termomecânica foi Duhamel (1837), que introduziu a Teoria da Termoelasticidade desacoplada, na qual a resposta mecânica de um corpo tem participação direta da variação de temperatura do mesmo.

No entanto, dois defeitos foram apontados nesta teoria. O primeiro diz respeito a reciprocidade dos efeitos. A primeira teoria diz que não existe influência do comportamento mecânico na resposta da temperatura. Algo que com o avanço dos estudos sobre termomecânica foi desacreditado, pois testes físicos comprovaram o contrário. E o segundo diz respeito à equação de calor apresentada na teoria, sendo parabólica, indicando que a velocidade de propagação da temperatura é infinita no corpo, que claramente não tem fundamento nas observações físicas (SHERIEF *et al.*, 2004).

Com o conhecimento das divergências e incompatibilidades apresentadas na teoria da elasticidade desacoplada, estudos foram conduzidos ao longo dos anos e Biot (1956) apresentou um tratamento unificado da termoelasticidade. No estudo apresentado por Biot, as equações de elasticidade e da condução de calor são acopladas, de forma a corrigir o defeito da não reciprocidade dos efeitos apresentada pela primeira teoria da termomecânica, introduzindo assim a teoria da termoelasticidade acoplada, no qual há a influência da mudança de forma de um corpo em sua temperatura. No entanto, a velocidade infinita de propagação de calor ainda perdura na teoria acoplada apresentada por Biot.

De acordo com Cavalcante (2016), Danilovskaya (1950) foi o primeiro pesquisador a tentar incluir os efeitos de inércia em problemas transientes termoelásticos, e considera-se como um passo importante para compreensão do processo de transmissão de tensões térmicas.

A velocidade infinita está relacionada a Lei de Condução de Calor de Fourier, no qual afirma que o fluxo de calor devido a condução térmica se apresenta proporcional a magnitude do gradiente de temperatura (CAVALCANTE, 2016). Na tentativa de resolver o problema da velocidade infinita uma alternativa a utilização da Lei de Fourier convencional é adotada na teoria generalizada da termoelasticidade com relaxamento de tempo para corpos isotrópicos introduzida por Lord e Shulman (1967). Esta teoria foi aprimorada por Sherief (1980) e Dhaliwal e Sherief (1980) apud Sherief *et al.* (2004), incluindo os casos anisotrópicos. A equação de calor associada com essa nova teoria é hiperbólica, o que elimina o problema da velocidade infinita de propagação de calor.

Todavia, as teorias da termoelasticidade não realizavam a completa descrição dos processos termomecânicos para sólidos elastoplásticos, mesmo quando a dissipação da energia era considerada. Desta forma, Dillon (1963) e Perzyna e Sawczuk (1973) foram os primeiros a apresentar a teoria da termoplasticidade dentro da estrutura da termodinâmica (CARRAZEDO, 2009).

Partindo desta breve introdução sobre conceitos da termomecânica, a seguir serão apresentados conceitos e formulações sobre termodinâmica, com a finalidade de compreender e apresentar as teorias da termoelasticidade acoplada e desacoplada e da termoplasticidade, com mais detalhes. A formulação apresentada na sequência deste capítulo é a mesma adotada em Parkus (1976) e pode ser vista também em Lewis *et al.* (2004), Carrazedo (2009) e Cavalcante (2016).

### **3.1 Termodinâmica**

A termodinâmica trata do ramo da física que estuda as relações entre o calor e as outras formas de energia consideradas, ou seja, a relação entre os fenômenos caloríficos e mecânicos. As observações da termodinâmica são todas em escala

macroscópica, e busca explicar os mecanismos de transferência de energia térmica a fim de que algum trabalho seja realizado.

É possível compreender melhor essa área da física pelas leis que foram elaboradas ao longo dos anos, após observações físicas que possibilitaram sua formulação matemática.

### **3.1.1 Lei zero da termodinâmica**

A lei zero rege a teoria do equilíbrio térmico entre corpos, ela estabelece como as trocas de calor entre os corpos ocorrem. A definição mais fiel à lei diz que quando dois corpos estiverem em equilíbrio térmico com um terceiro corpo, os dois primeiros estão em equilíbrio entre si.

### **3.1.2 Primeira lei da termodinâmica**

A primeira lei da termodinâmica trata do princípio da conservação da energia. Basicamente, a lei explica que um sistema não pode criar ou consumir energia, ele pode apenas transferi-la ou armazená-la ao meio em que se situa. A Eq. (3.1) apresenta o princípio regido pela lei, no qual tem-se que o calor recebido por um sistema é dado pela soma entre a variação da energia interna do sistema e o trabalho efetuado pelo mesmo.

$$\Delta Q = \Delta U + W \quad (3.1)$$

Segundo essa lei, o calor flui de forma espontânea de um corpo quente para um mais frio. Ainda, é possível retirar energia na forma de trabalho ou calor de um corpo mais frio e redirecioná-lo para outro mais quente sem que o sistema seja alterado, por exemplo, perante a realização de algum trabalho externo. Para esclarecimentos sobre este fenômeno, a segunda lei da termodinâmica foi criada, com o intuito de determinar a direção do fluxo de energia de um sistema.

### **3.1.3 Segunda lei da termodinâmica**

Um dos enunciados da segunda lei da termodinâmica diz que o calor não pode fluir, de forma espontânea, de um corpo com uma temperatura menor para outro com temperatura mais elevada. Para que o fluxo inverso ocorra, é necessário que algum agente externo realize trabalho sobre o sistema. Trata-se do enunciado de Clausius. A inequação do enunciado apresentada na Eq. (3.2), diz que para que trabalho seja gerado, é necessário existir uma diferença de temperatura entre dois corpos ou que um agente externo forneça energia (calorífica) que irá fluir do corpo com mais calor para o mais frio.

$$\int_m \dot{S} dm \geq \int_m \frac{R}{T} dm - \int_A \frac{q_i n_i}{T} dA \quad (3.2)$$

Onde:  $\dot{S}$  é a taxa de mudança da entropia;  $q$  é a taxa de transferência de calor;  $n$  é a normal à superfície considerada;  $R$  é a geração de calor interna; e  $T$  é a temperatura absoluta.

### 3.1.4 Lei de Fourier para condução de calor

O modelo mais conhecido para a consideração do fluxo de calor em problemas termodinâmicos é dado pela Lei de Fourier, no qual o fluxo  $q$  é dado pela Eq. (3.3).

$$q = -kA \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (3.3)$$

Onde:  $k$  é o coeficiente de condutividade térmica do material;  $A$  é a área da seção transversal do elemento linear; e  $\theta$  é a variação de temperatura.

A Eq. (3.3) afirma que o fluxo de calor devido a condução térmica é proporcional a magnitude do gradiente de temperatura, e o sinal negativo presente na equação refere-se ao fato da transferência de energia positiva ocorrer em direção da diminuição da temperatura. Esta se trata apenas de uma das equações constitutivas dentre os vários possíveis modelos para a termodinâmica.

De acordo com Carrazedo (2009), geralmente o coeficiente de condutividade térmica  $k$  é considerado constante e independente da temperatura, no entanto, esta consideração vale apenas para os casos em que o cálculo for realizado para pequenas

taxas de variação de temperatura, bem como, a constância depende do material. Por questões de simplicidade, para este trabalho  $k$  será considerado constante.

### 3.2 Teoria da termoelasticidade desacoplada

Nesta teoria, introduzida por Duhamel (1837), os diferenciais de temperatura geram esforços internos. Basicamente, isto diz que ao ser aplicada uma variação de temperatura  $\theta$  em um corpo com temperatura inicial  $\theta_0$ , o volume do corpo vai variar de forma proporcional ao seu coeficiente de expansão térmica. E quando a este corpo for aplicada uma tensão em uma direção, o corpo irá se deformar na direção de aplicação da tensão e contrair nas outras direções perpendiculares.

Sendo assim, de acordo com o enunciado da Lei de Hooke com a deformação volumétrica isotrópica (em consequência da variação de temperatura) a relação tensão-deformação é dada pela expressão:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left( \sigma_{ij} - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) + \alpha \theta \delta_{ij} \quad (3.4)$$

Onde:  $G$  é o módulo de elasticidade transversal;  $\nu$  é o coeficiente de Poisson; e  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker, definido como 1 quando  $i \neq j$  e 0 quando  $i = j$ .

Sendo a relação inversa da Eq. (3.4) dada por:

$$\sigma_{ij} = 2G \left( \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \theta \delta_{ij} \right) \quad (3.5)$$

Onde:  $\varepsilon_{kk}$  é o traço do tensor de deformações.

Em definição, tomando  $\sigma_{ij}$  como o tensor de deformações,  $F_i$  as forças de corpo e  $\ddot{x}_i$  como a aceleração, temos a equação de equilíbrio dinâmico local dada por:

$$\sigma_{i,j} + F_i - \rho \ddot{x}_i = 0 \quad (3.6)$$

Considerando a equação constitutiva de (3.5) e a equação de equilíbrio em (3.6), tem-se enfim:

$$\left[ 2G \left( \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \theta \delta_{ij} \right) \right]_{,j} + F_i - \rho \ddot{x}_i = 0 \quad (3.7)$$

### 3.3 Teoria clássica da termoelasticidade acoplada

A equações descritas na teoria clássica da termoelasticidade descrevem o comportamento elástico e térmico de meios elásticos e condutores de calor, e, particularmente, as ações recíprocas entre tensões elásticas e diferenças de temperatura (KHALIFA *et al.*, 2004). Nesta teoria há o acoplamento das equações de segunda ordem de elasticidade e da equação de calor e Biot (1956) foi o primeiro a introduzir estudos sobre esse novo sistema hiperbólico linear e não linear da termoelasticidade, denominado de padrão.

Inúmeros estudos foram desenvolvidos ao longo dos anos para contribuir para a generalização da teoria clássica (CARRAZEDO, 2009). Boley e Tolins (1962) utilizaram da transformada de Fourier com o intento de determinar a resposta mecânica e térmica de um elemento de barra semi-infinita, aplicadas condições de contorno transientes.

Segundo o artigo de Khalifa *et al.* (2004), Burns *et al.* (1993) provaram que a energia do sistema linear unidimensional da termoelasticidade com as condições de contorno naturais comumente utilizados decaiu de forma exponencial quando o gradiente de deslocamentos inicial, a velocidade inicial e da distribuição inicial de temperatura foram todas funções quadráticas.

A instabilidade que é provocada pela restrição da temperatura é tratada nos artigos de Scott (1996; 2001), no qual equações de campo em termos de entropia podem ser restringidas sem provocar instabilidades. Soler e Brull (1965) adotaram técnicas de perturbação no parâmetro de acoplamento, onde a convergência da solução em série é estabelecida e o resultado é uma forma de solução exata.

Em estudos mais recentes, Carrazedo (2009) desenvolveu um estudo em que trabalhou em um código computacional para analisar o impacto entre estruturas levando em consideração efeitos térmicos. Antes, uma formulação baseada em MEF para amortecimento termoelástico foi apresentada por Serra e Bonaldi (2008). Xia *et al.* (2014) desenvolveu seu trabalho objetivando a obtenção da resposta dinâmica termoelástica bidimensional para um corpo submetido a uma fonte de calor, sendo um corpo isotrópico e homogêneo. E mais recentemente, Cavalcante (2016) avaliou o

comportamento termomecânico de treliças não lineares através de uma formulação baseada no método dos elementos finitos posicional.

Nos itens a seguir serão descritas a formulação e conceitos da teoria da termoelasticidade acoplada com base nas leis da termodinâmica.

### 3.3.1 Primeira lei da termodinâmica

A primeira lei da termodinâmica que rege o princípio da conservação de energia diz que a integral cíclica do calor ( $Q$ ) tem proporcionalidade com a integral cíclica do trabalho ( $W$ ). Logo:

$$\oint Q = \oint W \quad (3.8)$$

Objetivando a obtenção de forma devida da lei da conservação de energia em termos do fluxo de calor, a mesma é reescrita na seguinte forma:

$$\dot{Q} = \frac{du}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d(mv^2)}{dt} + \frac{d(mgz)}{dt} + \dot{W} \quad (3.9)$$

Onde:  $\dot{Q}$  é o fluxo de calor;  $m$  é a massa do sistema;  $v$  é a velocidade;  $g$  é a aceleração da gravidade; e  $z$  é a altura em relação ao referencial do sistema.

A energia interna do sistema é representada pela primeira parcela da Eq. (3.9). Já a energia cinética tem representação na segunda parcela da Eq. (3.9), e a terceira parcela representa a energia potencial do mesmo.

A soma do fluxo de calor que entra ou sai pela superfície do corpo e pelo calor gerado internamente resulta no fluxo total de calor do sistema, como indicado pela Eq. (3.10).

$$\oint_A \dot{Q} dA = - \oint_A q_i n_i dA + \int_m R dm \quad (3.10)$$

Onde:  $R$  é o calor gerado;  $q$  é o fluxo de calor pela superfície do corpo; e  $n$  é um vetor unitário normal a superfície.

Substituindo a Eq. (3.9) com devida operação na Eq. (3.10), tem-se a consideração da energia potencial como parte das forças externas apresentada na Eq. (3.11).

$$\frac{d}{dt} \int_m u dm + \frac{d}{dt} \int_m \frac{1}{2} \dot{x}_i \dot{x}_i dm = \int_m R dm - \oint_A q_i n_i dA - \oint_A W dA \quad (3.11)$$

Em virtude da consideração do peso próprio nas equações das forças de corpo a taxa de trabalho é definida por:

$$\oint_A W dA = \int_m F_i \dot{x}_i dm + \oint_A f_i \dot{x}_i dA \quad (3.12)$$

Assim, tem-se a Eq. (3.13), que determina a lei de conservação de energia em sistemas termoelásticos.

$$\frac{d}{dt} \int_m u dm + \frac{d}{dt} \int_m \frac{1}{2} \dot{x}_i \dot{x}_i dm = \int_m R dm - \oint_A q_i n_i dA + \int_m F_i \dot{x}_i dm + \oint_A f_i \dot{x}_i dA \quad (3.13)$$

### 3.3.2 Equação diferencial de condução de calor

Ao se considerar apenas a variação calórica do sistema, o princípio de conservação de energia definido pela Eq. (3.1), pode ser reescrito como segue:

$$\Delta U = \Delta Q \quad (3.14)$$

Ou seja, a variação de energia vai ser igual a variação de calor do sistema.

Considerando o volume arbitrário  $V$  de um sistema onde não há troca de massa, a variação de energia pode ser escrita como:

$$\Delta U = \int_V \rho \frac{du}{dt} dV \quad (3.15)$$

Onde:  $\rho$  a densidade do material;  $u$  é a energia interna; e  $t$  é o tempo.

O calor específico consiste na quantidade de calor que é necessário fornecer à unidade de massa de uma substância para elevar a sua temperatura em um grau.

Pode ser definido como a variação da energia interna em relação à temperatura, ou seja,  $c_e = \frac{du}{dT}$ . Fazendo-se as devidas manipulações e substituindo a expressão que define o calor específico na Eq. (3.15), a variação de energia pode ser reescrita na forma:

$$\Delta U = \int_V \rho \frac{du}{dT} \frac{dT}{dt} dV = \int_V \rho c_e \frac{dT}{dt} dV \quad (3.16)$$

A variação de calor  $\Delta Q$  pode ser expressada pela Eq. (3.17), no qual a primeira parcela corresponde à taxa de calor através da superfície do corpo, e a segunda parcela à taxa de calor gerada no volume do corpo.

$$\Delta Q = - \int_A q_i n_i dA + \int_V \rho R dV \quad (3.17)$$

Onde:  $\rho R$  é a taxa de calor no domínio;  $q$  é o fluxo de calor pela superfície do corpo; e  $n$  é um vetor unitário normal à superfície.

Partindo da lei de Fourier e do teorema de Gauss, o fluxo de calor pela superfície pode ser reescrito como segue:

$$- \oint_A q_i n_i dA = \int_V k \nabla^2 T dV \quad (3.18)$$

Relacionando as Eq. (3.14), (3.16), (3.17) e (3.18) e aplicando o teorema da conservação de massa, obtém-se a equação de condução de calor transiente, expressada pela Eq. (3.19).

$$\int_V \left( \rho c_e \frac{dT}{dt} - k \nabla^2 T - \rho R \right) dV = 0 \quad (3.19)$$

Para o volume arbitrário considerado, a equação diferencial de condução de calor transiente fica na forma:

$$\rho c_e \frac{dT}{dt} - k \nabla^2 T - \rho R = 0 \quad (3.20)$$

### 3.3.3 Princípio da taxa de trabalho

A Eq. (3.21) define o princípio da taxa de trabalho, que diz que a taxa de mudança de energia cinética equivale a soma de todas as forças externas e internas.

$$\frac{d}{dt} \int_m \frac{1}{2} \dot{x}_i \dot{x}_i dm = \int_m F_i \dot{x}_i dm + \oint_A f_i \dot{x}_i dA - \int_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV \quad (3.21)$$

Onde:  $\varepsilon_{ij}$  é o tensor de deformações;  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  é o tensor de taxa de deformação; e  $\sigma_{ij}$  é o tensor de tensões.

Relacionando as equações (3.13) e (3.21), e aplicando o teorema de Gauss e da conservação de massa, tem-se:

$$\int_V (\dot{u} - R) \rho dV = \int_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV - \int_V q_{i,i} dV \quad (3.22)$$

### 3.3.4 Segunda Lei da termodinâmica

Observa-se da inequação apresentada na Eq. (3.2) que para um sistema fechado, a entropia se manterá constante e que, para qualquer meio em que haja dissipação de energia calórica, a entropia sofre aumento.

Aplicando o teorema de conservação de massa sobre as duas últimas parcelas da Eq. (3.2) e o teorema de Gauss na última parcela, a expressão conhecida como inequação de Clausius fica na forma:

$$\int_V \dot{S} \rho dV \geq \int_V \frac{R}{T} \rho dV - \int_V \left( \frac{q_i}{T} \right)_{,i} dV \quad (3.23)$$

Ao derivar a última parcela da Eq. (3.23) em relação a posição temos a inequação na forma apresentada na Eq.(3.24) .

$$\rho T \dot{S} \geq \rho R - q_{i,i} + \frac{q_i}{T} T_{,i} \quad (3.24)$$

A inequação apresentada na Eq. (3.24) combinada com a Eq. (3.22) resulta na expressão da Eq. (3.25), conhecida como inequação de Clausius-Duhem (HOLZAPFEL, 2004; SANTAOJA, 2004).

$$\rho(\dot{u} - T\dot{S}) \leq \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{q_i}{T}T_{,i} \quad (3.25)$$

Percebe-se que a inequação de Clausius-Duhem também contempla as mudanças de forma do corpo (através da energia interna de deformação), quando comparada com a inequação de Clausius (Eq. (3.23)).

### 3.3.5 Energia Livre de Helmholtz

A energia livre de Helmholtz é denominada como um potencial que é capaz de mensurar a quantidade de energia útil do sistema no qual pode se tornar trabalho, definida pelas Eq. (3.26) e (3.27).

$$\Phi(\varepsilon_{ij}, T) = U - TS \quad (3.26)$$

$$\dot{\Phi}(\varepsilon_{ij}, T) = \dot{U} - T\dot{S} - \dot{T}S = \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_{ij}}\dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial\Phi}{\partial T}\dot{T} \quad (3.27)$$

Fazendo a substituição da Eq. (3.27) em (3.22) e (3.25), tem-se respectivamente:

$$\left(\rho \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_{ij}} - \sigma_{ij}\right)\dot{\varepsilon}_{ij} + \rho\left(\frac{\partial\Phi}{\partial T} + S\right)\dot{T} + \rho(T\dot{S} - R) + q_{i,i} = 0 \quad (3.28)$$

$$\left(\rho \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_{ij}} - \sigma_{ij}\right)\dot{\varepsilon}_{ij} + \rho\left(\frac{\partial\Phi}{\partial T} + S\right)\dot{T} - \frac{q_i}{T}T_{,i} \leq 0 \quad (3.29)$$

Para quaisquer valores de  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  e  $\dot{T}$  as Eq. (3.28) e (3.29) tem que se manter. Sendo assim, as expressões que acompanham os parâmetros devem respeitar a igualdade. Chega-se às conclusões apresentadas nas Eq. de (3.30) a (3.33).

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_{ij}} \quad (3.30)$$

$$S = -\frac{\partial\Phi}{\partial T} \quad (3.31)$$

$$q_{i,i} = -\rho(T\dot{S} - R) \quad (3.32)$$

$$q_i T_{,i} \leq 0 \quad (3.33)$$

Combinando as Eq. (3.31), (3.32) e (3.27), tem-se outra forma da equação da condução de calor em função da energia livre de Helmholtz, apresentada na expressão da Eq. (3.34).

$$q_{i,i} = \rho T \left( \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_{ij}\partial T} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial T^2} \dot{T} \right) + \rho R \quad (3.34)$$

### 3.3.6 Potencial elástico

O conceito de potencial elástico ( $\Psi$ ) é uma forma de definir as propriedades elásticas inerentes a um corpo qualquer a partir de sua relação tensão-deformação, conforme a Eq.(3.35).

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial\Psi}{\partial\varepsilon_{ij}} \quad (3.35)$$

O potencial elástico possui relação com a energia livre de Helmholtz, e por essa razão é importante apresentar este conceito, dado pela Eq. (3.36).

$$\Psi = \rho\Phi \quad (3.36)$$

A partir da relação tensão-deformação apresentada na Eq. (3.5), no qual apresenta-se as tensões isoladas ( $\sigma$ ) em função das deformações ( $\varepsilon$ ), e da integração da Eq. (3.35), tem-se uma forma para o potencial elástico visto na Eq. (3.37).

$$\Psi = G \left( \varepsilon_{ij}^2 + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk}^2 - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \alpha\theta e \right) + f(\theta) \quad (3.37)$$

Vale ressaltar que para a obter o resultado da integração apresentada na Eq. (3.37) que a derivada do traço do tensor de deformações em relação às deformações é o delta de Kronecker. Como também, a consideração da função  $f(\theta)$  dependente

apenas da temperatura, que pode assumir qualquer grau, indicando possíveis características térmicas não lineares do material.

### 3.3.7 Equação de condução de calor termoelástica

Para apresentar a equação de condução de calor de forma mais conhecida, e facilitar sua aplicação, toma-se como partida as Eq. (3.31) e (3.34), apresentando a expressão da Eq. (3.39), no qual o calor específico é definido como a expressão da Eq. (3.38).

$$c_e = T \frac{\partial S}{\partial T} \quad (3.38)$$

$$kT_{,ii} = \rho \left( c_e \dot{T} - R - T \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T} \dot{\varepsilon}_{ij} \right) \quad (3.39)$$

Onde:  $k$  é o coeficiente de condutividade térmica;  $\rho$  é a densidade do material; e  $\Phi$  é a energia livre de Helmholtz.

A partir de algumas considerações a Eq. (3.39) pode ser reescrita em função da temperatura. A primeira consideração é que a temperatura absoluta é a soma da temperatura de referência,  $\theta_0$ , considerando-a constante, e a variação de temperatura  $\theta$ . Outra consideração é que o fator  $T$  pode ser tomado como a temperatura de referência, caso o acréscimo de temperatura seja pequeno. Resultando em:

$$k\theta_{,ii} = \rho \left( c_e \dot{\theta} - R - \theta_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \theta} \dot{\varepsilon}_{ij} \right) \quad (3.40)$$

Por fim, faz-se a substituição da Eq. (3.37) em (3.40), o que fornece:

$$k\theta_{,ii} = 2G \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} \alpha \theta_0 \dot{\varepsilon}_{kk} + \rho c_e \dot{\theta} - \rho R \quad (3.41)$$

É importante salientar que a função  $f(\theta)$  apresentada como termo da Eq. (3.37) é considerada constante em relação à temperatura.

Outra consideração relevante é a relação entre as taxas de deformação e a mudança de temperatura do corpo. De acordo com Carrazedo (2009), quando o corpo

apresentar taxas de deformação negativas, ou seja, tende a comprimir, a temperatura deste aumenta, há um aquecimento. Para o caso contrário, taxas de deformação positivas, há o resfriamento do sólido. Este é o chamado Efeito de Gough-Joule, comprovado pelo trabalho de Boulanger *et al.* (2004).

### 3.3.8 Equação de equilíbrio termoelástica

A equação de equilíbrio termoelástica define o comportamento elástico dinâmico do material, e para obtê-la é necessário considerar o princípio da taxa de trabalho. Da Eq. (3.21), o termo referente ao trabalho realizado pelas forças internas é integrado por partes e aplicado o teorema da divergência, resultando em:

$$\int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV = \int_V \sigma_{ij} \dot{\chi}_{i,j} dV = \int_V (\sigma_{ij} \dot{\chi}_i)_{,j} dV - \int_V \sigma_{ij,j} \dot{\chi}_i dV \quad (3.42)$$

$$\int_V \sigma_{ij} \dot{\chi}_{i,j} dV = \oint_A \sigma_{ij} \dot{\chi}_i n_j dA - \int_V \sigma_{ij,j} \dot{\chi}_i dV \quad (3.43)$$

Fazendo a substituição da Eq. (3.43) em (3.21) e reorganizando os termos, tem-se:

$$\int_V (\sigma_{ij,j} + F_i - \ddot{\chi}_i \rho) \dot{\chi}_i dV + \oint_A (f_i - \sigma_{ij} n_j) \dot{\chi}_i dA = 0 \quad \forall \dot{\chi}_i \quad (3.44)$$

Vale ressaltar que se considera na Eq. (3.44) que a força de corpo está em função do volume.

Para que a igualdade na Eq. (3.44) seja atendida para todo  $\dot{\chi}_i$ , tem-se que:

$$\sigma_{ij,j} + F_i - \ddot{\chi}_i \rho = 0 \quad \forall \dot{\chi}_i \in V \quad (3.45)$$

$$f_i = \sigma_{ij} n_j \quad \forall \dot{\chi}_i \in A \quad (3.46)$$

A expressão apresentada na Eq. (3.45) descreve a equação de movimento, e na Eq. (3.46) tem-se o tensor de tensões.

Substituindo a Eq. (3.5) em (3.45), tem-se a Eq. (3.47), no qual pode ser reescrita em função das constantes de Lamé ( $\lambda$  e  $\mu$ ) resultando na Eq. (3.48).

$$\left[ 2G \left( \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \theta \delta_{ij} \right) \right]_{,j} + F_i - \dot{x}_i \rho = 0 \quad (3.47)$$

$$(2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} - (3\lambda + 2\mu) \alpha \theta \delta_{ij})_{,j} + F_i - \dot{x}_i \rho = 0 \quad (3.48)$$

As principais equações da teoria da termo-elasticidade acoplada são descritas pelas Eq. (3.41) e (3.48), que descrevem o comportamento termomecânico de um corpo elástico e condutor de calor.

Ressalta-se aqui, que alguns autores consideram o valor de  $\alpha$  diferente para aplicar nas equações (3.41) e (3.48), posto que na primeira equação o parâmetro se refere ao coeficiente de expansão térmica, já na segunda ao coeficiente de geração de calor. Carrazedo (2009) comprovou que para alguns casos, considerar essa igualdade fornece valores irrealis. A partir disto, reescreve-se as Eq. (3.41) e (3.48) como segue:

$$k\theta_{,ii} = 2G \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha_1 \theta_0 \dot{\varepsilon}_{kk} + \rho c_e \dot{\theta} - \rho R \quad (3.49)$$

$$\left[ 2G \left( \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha_2 \theta \delta_{ij} \right) \right]_{,j} + F_i - \dot{x}_i \rho = 0 \quad (3.50)$$

Onde:  $\alpha_1$  é o coeficiente de expansão térmica; e  $\alpha_2$  é o coeficiente de geração de calor.

### 3.4 Teoria da termoplasticidade

A partir dos resultados de experimentos sobre o aquecimento provocado pelas deformações plásticas introduzidos primordialmente por Farren e Taylor (1925) e Taylor e Quinney (1934), percebeu-se a necessidade de desenvolver modelos constitutivos que pudessem representar de forma mais precisa o comportamento termomecânico de estruturas elastoplásticas. Sendo os primeiros trabalhos na tentativa de desenvolver estes modelos publicados por Dillon (1963) e Perzyna e Sawczuk (1973).

Mais tarde, estudos sobre o mesmo problema, porém lidando com grandes deformações, foram desenvolvidos em Lemonds e Needleman (1986), Simo e Miehe (1992) e Canadija e Brnic (2004), de acordo com Hakansson *et al.* (2005). A abordagem atual sobre tal tema, foi apresentada inicialmente por Simo e Miehe (1992), de acordo com Cavalcante (2016).

Simo e Miehe (1992) apresentaram uma formulação consistente do problema com acoplamento termomecânico, no qual através de uma gama de simulações numéricas abordaram de forma detalhada o desempenho e aspectos numéricos inerentes a implementação do método dos elementos finitos.

Uma descrição completa dos processos termomecânicos para sólidos elastoplásticos no contínuo, envolve os enunciados da primeira e segunda lei da termodinâmica, além de leis de equilíbrio e relações constitutivas, cujos objetivos são descrever a evolução da temperatura e a geração de calor em um corpo sujeito a deformações inelásticas (ROSAKIS *et al.*, 2000; CAVALCANTE, 2016).<sup>3</sup>

### 3.4.1 Primeira e segunda lei da termodinâmica

Assim como na teoria da termoelasticidade, para se descrever o comportamento termomecânico de sólidos elastoplásticos, a equação de calor se baseia na primeira e segunda leis da termodinâmica, que apresentada na forma da inequação de Clausius-Duhem, tem-se:

$$\rho\dot{u} - \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + q_{i,i} - \rho R = 0 \quad (3.51)$$

$$\rho\theta\dot{S} - \rho R + q_{i,i} - \frac{q_i}{\theta}\theta_{,i} \geq 0 \quad (3.52)$$

Onde:  $\dot{u}$  é a variação de energia interna;  $\sigma$  é o tensor de tensões;  $\dot{\varepsilon}$  é a taxa de deformações;  $q$  é o fluxo de calor;  $R$  é uma fonte de calor interna;  $\theta$  é a variação de temperatura; e  $S$  é a entropia.

---

<sup>3</sup> Este trabalho se baseia na teoria da termoplasticidade de variáveis internas, de acordo com os conceitos apresentados em Rosakis *et al.* (2000), Kamlah e Haupt (1997) e Holzapfel (2004). Tais conceitos também podem ser encontrados nos trabalhos de Carrazedo (2009) e Cavalcante (2016).

A partir do conceito de energia livre de Helmholtz dada pela Eq. (3.26), após considerar  $T = \theta$ , e combinando-se as Eq. (3.51) e (3.52), obtém-se:

$$\underbrace{-\rho\dot{\Phi} - \rho S\dot{\theta} + \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}}_{\Lambda} - \frac{q_i}{\theta}\theta_{,i} \geq 0 \quad (3.53)$$

Onde:  $\Lambda$  é a dissipação interna; e  $\frac{q_i}{\theta}\theta_{,i}$  é a dissipação térmica.

Reescrevendo a Eq. (3.53), tem-se a expressão da Eq. (3.54), que é a equação de conservação de energia em termos da dissipação interna.

$$\rho\dot{\theta}S = \Lambda - q_{i,i} + \rho R \quad (3.54)$$

### 3.4.2 Teoria das variáveis internas

De acordo com Rosakis *et al.* (2000), na teoria da termoplasticidade é estudada a resposta termomecânica de sólidos elastoplásticos e condutores de calor, considerando-se os termos geradores de calor relativos ao aquecimento provocado pelo acoplamento termomecânico e dissipação inelástica.

Com o intuito de se desenvolver a plasticidade, adiciona-se às relações constitutivas variáveis internas que representam a deformação plástica e/ou a superfície de escoamento. As variáveis em questão, inseridas para este caso, são a deformação plástica, definida por  $\varepsilon_{ij}^p$ , e a variável de endurecimento, definida por  $\varpi_i$ . Ressalta-se, que segundo a literatura, essa é a forma mais comum de se considerar a plasticidade (CARRAZEDO, 2009).

Desta forma, as leis constitutivas para o tensor de tensões, energia interna, entropia, fluxo de calor e energia livre de Helmholtz, bem como as leis de evolução da deformação plástica e superfície de escoamento, são expressas em função das variáveis de estado (ROSAKIS *et al.* 2000). Em resumo, para todo o processo termomecânico, as variáveis envolvidas são: deformação elástica  $\varepsilon_{ij}^e$ , variação de temperatura  $\theta$ , gradiente de temperatura  $\theta_{,i}$  e o vetor de parâmetros que define o endurecimento plástico  $\varpi_i$ . Para simplificação o gradiente de temperatura será considerado como  $\theta$ .

O tensor de deformação total, para este trabalho, é considerado como a soma dos tensores elástico e plástico. Logo:

$$\varepsilon_{ij}^e = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p \quad (3.55)$$

A partir de tal relação, a taxa da energia livre de Helmholtz pode ser expressa por:

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \dot{\varepsilon}_{ij}^p + \frac{\partial \Phi}{\partial \varpi_i} \dot{\varpi}_i + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \Phi}{\partial \Theta} \dot{\Theta} \quad (3.56)$$

Fazendo a substituição da Eq. (3.56) na Eq. (3.53), resulta em:

$$\left( \sigma_{ij} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \right) \dot{\varepsilon}_{ij} - \rho \left( S + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) \dot{\theta} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \Theta} \dot{\Theta} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \dot{\varepsilon}_{ij}^p - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \varpi_i} \dot{\varpi}_i - \frac{q_i}{\theta} \dot{\theta} \geq 0 \quad (3.57)$$

Como a inequação apresentada na Eq. (3.57) deve se manter para todo processo termomecânico, isto é, quaisquer sejam os valores de  $\dot{\varepsilon}_{ij}$ ,  $\dot{\theta}$  e  $\dot{\Theta}$ , logo os termos que os acompanham devem manter a igualdade. O que implica nas considerações:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \Theta} = 0 \rightarrow \Phi = \Phi(\varepsilon_{ij}^e, \varpi_i, \theta) \quad (3.58)$$

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \quad (3.59)$$

$$S = - \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \quad (3.60)$$

Desta forma, a inequação da Eq. (3.57) fica reduzida a:

$$\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \dot{\varepsilon}_{ij}^p - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \varpi_i} \dot{\varpi}_i - \frac{q_i}{\theta} \dot{\theta} \geq 0 \quad (3.61)$$

A partir das considerações das Eq. (3.58) a (3.60), e substituindo-se o termo que define a dissipação da energia interna da inequação apresentada na Eq. (3.61) na Eq. (3.54) obtém-se:

$$-\rho\theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \sigma_{ij} \partial \dot{\varepsilon}_{ij}^p - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \varpi_i} \dot{\varpi}_i - q_{i,i} + \rho R \quad (3.62)$$

Derivando o termo à esquerda da igualdade na Eq. (3.62) utilizando a regra da cadeia, tem-se:

$$-\rho\theta \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta \partial \varepsilon_{ij}^e} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta \partial \varpi_i} \dot{\varpi}_i + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \dot{\theta} \right) = \sigma_{ij} \partial \dot{\varepsilon}_{ij}^p - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \varpi_i} \dot{\varpi}_i - q_{i,i} + \rho R \quad (3.63)$$

Apesar de grande parte da energia mecânica de caráter plástico ser transformada em forma de calor durante o processo de plastificação, existe parte do trabalho plástico que é dissipado, devido a interação entre as interfaces das microestruturas que constituem o material (CAVALCANTE, 2016). Insere-se, portanto, o conceito de energia de trabalho frio, dado por:

$$\bar{E} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varpi_i} - \theta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta \partial \varpi_i} \quad (3.64)$$

Desta forma, com base na lei de Fourier e nas definições de calor específico e trabalho frio, pode-se reescrever a Eq. (3.63) da seguinte forma:

$$\rho c_e \dot{\theta} = k \theta_{,ii} + \rho R + \underbrace{\theta \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \theta} \dot{\varepsilon}_{ij}^e}_{H_{elast}} + \underbrace{\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p}_{H_{plast}} - \underbrace{\rho \frac{\partial \bar{E}}{\partial \varpi_i} (\varpi) \dot{\varpi}_i}_{H_{TF}} \quad (3.65)$$

Onde:  $H_{elast}$  é o termo referente a produção de calor devido as deformações elásticas;  $H_{plast}$  é o termo relacionado à dissipação de trabalho mecânico plástico em forma de calor; e  $H_{TF}$  é o termo relativo a energia retida como trabalho frio.

O trabalho frio vêm sendo alvo de estudo de diversos pesquisadores. Segundo Cavalcante (2016), destacam-se os trabalhos de Bever *et al.* (1973), Oliferuk *et al.* (1993), Rittel (1999), Rosakis *et al.* (2000), Mroz e Oliferuk (2002), Benzerga *et al.* (2005), Rittel *et al.* (2012) e Kolupaeva e Semenov (2015). Sendo dependente da temperatura, deformação plástica e taxa de deformação, o trabalho frio é uma forma de energia que é absorvida pelo corpo e não é dissipada. Desta forma, não pode ser considerada constante, posto que experimentos científicos comprovaram variações

(CARRAZEDO, 2009). Porém, a falta de estudos que relacionam de forma mais precisa o trabalho frio com suas variáveis, este termo pode ser considerado constante.

Partindo destas colocações, supõe-se que a relação entre o trabalho plástico e o trabalho frio é definida por um fator constante,  $\vartheta$ , o que resulta na seguinte simplificação:

$$\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^p - \rho \frac{\partial \bar{E}}{\partial \varpi_i}(\varpi)\dot{\varpi}_i = \vartheta \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (3.66)$$

Em geral, autores indicam a adoção de 80% a 100% de geração de calor devido as deformações plásticas, ou seja,  $0,8 < \vartheta < 1,0$  (SIMO & MIEHE, 1992; ZHOU *et al.*, 1996; KAPOOR & NEMAT-NASSER, 1998).

Por fim, a expressão geral que define a transferência de calor para problemas termoplásticos é obtida combinando as Eq. (3.65) e (3.66), resultado em:

$$\rho c_e \dot{\theta} = k\theta_{,ii} + \rho R + \theta \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \theta} \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \vartheta \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (3.67)$$

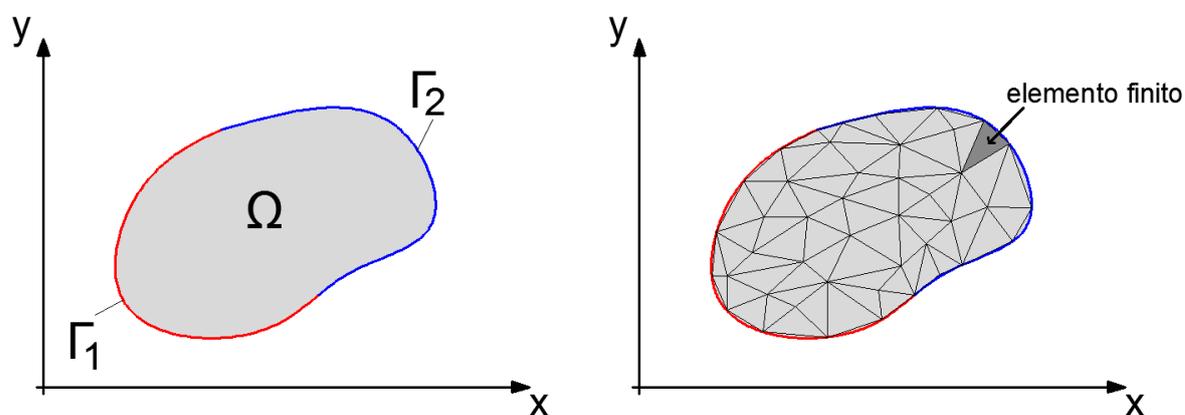
## CAPÍTULO 4

# Métodos dos elementos finitos aplicado à termodinâmica

### 4 Método dos elementos finitos

O domínio do método dos elementos finitos, ou seja, o contínuo delimitado por condições de contorno, é definido por um conjunto de subdomínios que apresentam comportamento análogo ao meio contínuo inteiro. Esses subdomínios são denominados de elementos e são conectados por nós. Um exemplo de sólido discretizado pode ser visto na Figura 4.1, no qual vale ressaltar que  $\Omega$  representa o domínio do sólido com contorno  $\Gamma$ , sendo  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  partes diferentes desse contorno, onde  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$  e  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ .

Figura 4.1 – Discretização de um sólido genérico



A aplicação do MEF na termodinâmica se dá pela elaboração de um sistema de equações algébricas que aproximam o problema de condução de calor. Autores como Bathe (1982) e Lewis *et al.* (1996) apresentam uma abordagem mais profunda sobre o método dos elementos finitos convencional, no entanto, é possível encontrar na literatura inúmeros trabalhos acerca do tema, por se tratar de um método fortemente difundido. Nos itens a seguir serão descritas questões importantes a serem

consideradas na aplicação do MEF à termodinâmica. Para mais detalhes o leitor é referido ao estudo de Vila Real (1988).

#### 4.1 Discretização do problema de condução de calor

Fazendo uso das Eq. (3.41) e (3.67), apresenta-se na Eq. (4.1) a definição da forma mais simples de transmissão de calor ao longo do tempo para um problema elastoplástico, que pode ser reescrita na forma apresentada na Eq. (4.2).

$$k\theta_{,ii} - \rho c_e \dot{\theta} + \rho R + 2G \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \theta_0 \dot{\epsilon}_{kk} - \vartheta \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p = 0 \quad (4.1)$$

$$k\theta_{,ii} - \rho c_e \dot{\theta} + \rho R + R_m = 0 \quad (4.2)$$

Onde:  $R_m$  define o calor gerado devido as deformações mecânicas, dado pela Eq. (4.3).

$$R_m = 2G \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \theta_0 \dot{\epsilon}_{kk} - \vartheta \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (4.3)$$

É importante destacar que o problema térmico é solucionado antes do problema mecânico, mais precisamente no passo de tempo ( $t$ ). Então, para o passo de tempo atual ( $t + \Delta t$ ), a Eq. (4.2) pode ser escrita na forma:

$$k\theta_{,ii} - \rho c_e \dot{\theta} + \rho R + R_m^t = 0 \quad (4.4)$$

A Eq. (4.1), que representa a equação diferencial da condução de calor, deve satisfazer as condições iniciais e as condições de contorno essencial e natural, dadas, respectivamente, por:

$$\theta = \theta_0(x_i) \quad \forall \quad x_i \in \Omega, t = 0 \quad (4.5)$$

$$\theta = \theta(x_i, t) \quad \forall \quad x_i \in \Gamma_1, t > 0 \quad (4.6)$$

$$q(x_i, t) = -k\theta_{,n} \quad \forall \quad x_i \in \Gamma_2, t > 0 \quad (4.7)$$

Onde:  $n$  é a normal à superfície  $\Gamma_2$ ;  $\theta_0(x_i)$  é a temperatura no domínio  $\Omega$ ;  $\theta(x_i, t)$  é a temperatura no contorno  $\Gamma_1$ ; e  $q(x_i, t)$  é o fluxo de calor em  $\Gamma_2$

Partindo da premissa apresentada anteriormente de que o corpo é analisado ao subdividi-lo em elementos finitos, a temperatura, que é a variável principal, pode ser aproximada por uma série de funções (Eq. (4.8)).

$$\theta = \Theta_i \phi_i \quad (4.8)$$

Onde:  $\Theta_i$  é a temperatura no nó  $i$  e  $\phi_i$  sua respectiva função de forma.

## 4.2 Método dos resíduos ponderados

A Eq. (4.1) pode ser aproximada, dentre outros, pelo método dos resíduos ponderados, neste caso o de Galerkin. A equação diferencial é ponderada em seu domínio, levando a:

$$\int_V k \Theta_{,ii} W dV - \int_V \rho c_e \dot{\Theta}_i W dV + \int_V \rho R W dV + \int_V R_m^t W dV = 0 \quad (4.9)$$

Sendo,

$$W = w_j \phi_j \quad (4.10)$$

Onde:  $\phi_j$  são as funções de ponderação; e  $w_j$  representa constantes arbitrárias em relação aos nós  $j$  dos elementos.

Relacionando as Eq. (4.8), (4.9) e (4.10), para qualquer valor de  $w_j$  e sendo  $\theta_i$  constante, tem-se:

$$\int_V k \Theta_i \phi_{i,kk} \phi_j dV - \int_V \rho c_e \dot{\Theta}_i \phi_i \phi_j dV + \int_V \rho R \phi_j dV + \int_V R_m^t \phi_j dV = 0 \quad (4.11)$$

Manipulando a Eq. (4.11) obtém-se uma expressão equivalente, definida por:

$$\begin{aligned} \int_V k \Theta_i \phi_{i,k} \phi_{j,k} dV - \int_V k \Theta_i (\phi_{i,k} \phi_j)_{,k} dV + \int_V \rho c_e \dot{\Theta}_i \phi_i \phi_j dV \\ + \int_V \rho R \phi_j dV + \int_V R_m^t \phi_j dV = 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Aplicando o teorema da divergência na terceira parcela da Eq. (4.12) tem-se a expressão para as forças termodinâmicas aplicadas no contorno, dada por:

$$\int_V k\Theta_i(\phi_{i,k}\phi_j)_{,k}dV = \int_A k\Theta_i\phi_{i,n}\phi_j dA \quad (4.13)$$

Onde:  $n$  representa a direção normal à superfície  $A$ .

Relacionando as Eq. (4.7), (4.12) e (4.13), resulta em:

$$\int_V k\Theta_i\phi_{i,k}\phi_{j,k}dV + \int_V \rho c_e \dot{\Theta}_i\phi_i\phi_j dV + \int_V \rho R\phi_j dV + \int_V R_m^t\phi_j dV - \int_A q\phi_j dA = 0 \quad (4.14)$$

A Eq. (4.14) pode ser reescrita na forma matricial para facilitar a notação:

$$C_{ij}\dot{\Theta}_i + K_{ij}\Theta_i = F_j \quad (4.15)$$

E:

$$C_{ij} = \int_V \rho c_e \phi_i\phi_j dV \quad (4.16)$$

$$K_{ij} = \int_V k\phi_{i,k}\phi_{j,k}dV \quad (4.17)$$

$$F_j = \int_V \rho R\phi_j dV + \int_V R_m^t\phi_j dV - \int_A q\phi_j dA \quad (4.18)$$

Onde:  $K_{ij}$  é a matriz de condução de calor;  $C_{ij}$  é a matriz de capacitância de calor; e  $F_j$  é o vetor de carregamento térmico.

### 4.3 Integração temporal de equações parabólicas

Dentre vários autores, Lewis *et al.* (2004) e Cavalcante (2016) utilizam o método alfa de integração temporal na resolução de sistemas de equações de condução de calor transiente (método HHT- $\alpha$ )<sup>4</sup>. Duas equações são utilizadas para aproximar a temperatura:

---

<sup>4</sup> Também apresentado no trabalho de Carrazedo (2009).

$$\dot{\theta}_i^{t+\Delta t-\bar{\alpha}} = \frac{(\theta_i^{t+\Delta t} - \theta_i^t)}{\Delta t} \quad (4.19)$$

$$\theta_i^{t+\Delta t-\bar{\alpha}} = (1 - \bar{\alpha})\theta_i^t + \bar{\alpha}\theta_i^{t+\Delta t} \quad (4.20)$$

Onde:  $\bar{\alpha}$  é um parâmetro da aproximação temporal, no qual os valores mais comuns estão apresentados na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Valores para o parâmetro alfa de integração temporal

Nome do método	$\bar{\alpha}$
Crank-Nicolson	1/2
Galerkin	2/3
Euler Backward	1

Fonte: Vila Real (1988)

Fazendo a substituição das Eq. (4.19) e (4.20) na Eq. (4.15) e reorganizando, tem-se como resultado o sistema de equações que define a variação de temperatura nodal, dado por:

$$[C_{ij} + \Delta t \bar{\alpha} K_{ij}] \theta_i^{t+\Delta t} = [C_{ij} + \Delta t (1 - \bar{\alpha}) K_{ij}] \theta_i^t + \Delta t [\bar{\alpha} F_j^{t+\Delta t} + (1 - \bar{\alpha}) F_j^t] \quad (4.21)$$

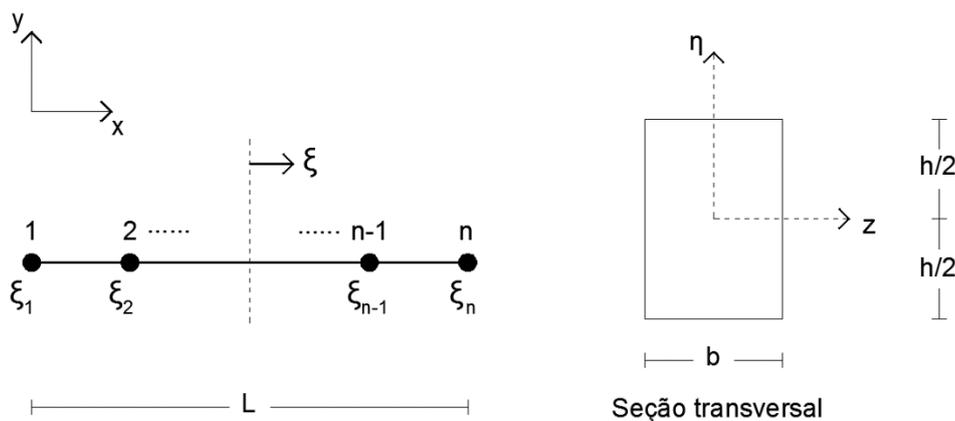
#### 4.4 Aplicação para o elemento de pórtico plano

A determinação dos valores nodais da temperatura é obtida a partir da elaboração do sistema de equações, partindo das definições do elemento de pórtico plano. A Figura 4.2 mostra um esquema de elemento de pórtico plano com  $n$  nós, comprimento  $L$ , altura  $h$  e largura  $b$ .

Em função das coordenadas adimensionais, para  $i$  variando de 1 até  $n$ :

$$x_i = X_i \phi_i(\xi) \quad (4.22)$$

Onde:  $x_i$  é uma aproximação para a posição nodal  $X_i$  através da função de forma  $\phi_i$ ; e  $\xi$  é a coordenada adimensional referente ao eixo longitudinal do elemento.

Figura 4.2 – Elemento de pórtico plano com  $n$  nós

Desta forma, as integrais expressadas nas Eq. (4.16), (4.17) e (4.18) ficam em função das coordenadas adimensionais, como indicado nas Eq. (4.23), (4.24) e (4.25).

$$C_{ij} = b \iint_{-1}^1 \rho c_e \phi_i \phi_j J_0 d\xi d\eta \quad (4.23)$$

$$K_{ij} = b \iint_{-1}^1 k \phi_{i,k} \phi_{j,k} J_0 d\xi d\eta \quad (4.24)$$

$$F_j = b \left[ \iint_{-1}^1 (\rho R + R_m^t) \phi_j J_0 d\xi d\eta - \iint_{-1}^1 q \phi_j J_0 d\xi d\eta \right] \quad (4.25)$$

Para reescrever as equações do sistema que define a variação de temperatura ao longo do tempo, sabe-se que  $R_m^t$  é constante para o domínio no passo de tempo  $t$ , e:

$$dV = b J_0 d\xi d\eta \quad (4.26)$$

Onde:  $b$  é a largura do elemento; e  $J_0$  é definido como o determinante da Matriz do Jacobiano de transformação de coordenadas globais para adimensionais, dado por:

$$J_0 = \det J = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Ainda, para a matriz de condução de calor expressada na Eq. (4.24), para um elemento de pórtico plano:

$$\phi_{i,k} = \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_k} + \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_k} \quad (4.28)$$

$$\phi_{j,k} = \frac{\partial \phi_j}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_k} + \frac{\partial \phi_j}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_k} \quad (4.29)$$

Onde:  $x_k$  é a variável que define a posição, sendo  $x$  e  $y$  para o elemento de pórtico plano.

Logo:

$$K_{ij} = b \iint_{-1}^1 k [\phi_{i,x} \phi_{j,x} + \phi_{i,y} \phi_{j,y}] J_0 d\xi d\eta \quad (4.30)$$

No qual:

$$\phi_{i,x} = \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (4.31)$$

$$\phi_{j,x} = \frac{\partial \phi_j}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \phi_j}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (4.32)$$

$$\phi_{i,y} = \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (4.33)$$

$$\phi_{j,y} = \frac{\partial \phi_j}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \phi_j}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (4.34)$$

Vale salientar que os argumentos presentes nas Eq. (4.31) à (4.34), que representam a derivada parcial de  $\xi$  em relação à  $x$  ou  $y$ , são obtidos através da inversa da Matriz do Jacobiano, denominada  $H$ , expressada na Eq. (4.35) (ASSAN, 1999).

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = inv J = \frac{1}{J_0} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial x}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Como  $\phi = \phi(\xi)$ , ou seja, as funções de forma variam apenas em relação a variável adimensional  $\xi$ , tem-se as seguintes simplificações:

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} = \frac{\partial \phi_j}{\partial \eta} = 0 \quad (4.36)$$

Logo, a expressão da matriz de condução de calor em função das coordenadas adimensionais, apresentada na Eq. (4.30), pode ser escrita de forma simplificada, como indicado na Eq. (4.37).

$$K_{ij} = b \iint_{-1}^1 k \left[ \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \right] J_0 d\xi d\eta \quad (4.37)$$

## CAPÍTULO 5

# Formulação posicional empregada em problemas dinâmicos não lineares

### 5 MEF posicional

O método dos elementos finitos posicional (MEFP) possui formulação baseada nas posições nodais, e não nos deslocamentos nodais como se baseia o MEF convencional. Esta variação do MEF foi introduzida por Coda (2003), e vêm sendo amplamente aplicado em vários estudos desde então, apesar de ser recente.

Coda (2003) e Coda e Greco (2004) realizaram análise de pórtico plano com cinemática de Euler-Bernoulli. Já nos trabalhos divulgados por Maciel *et. al.* (2004) Maciel e Coda (2005), considerou-se o efeito de cisalhamento no pórtico plano através da cinemática de Reissner ou teoria de vigas de Reissner (tratada no próximo capítulo).

Em um estudo desenvolvido por Greco (2004), foi avaliado o impacto nas duas direções entre estruturas reticuladas considerando as suas não linearidades. Marques (2006) utilizou do MEFP para estudar o comportamento dinâmico não linear geométrico de sólidos bidimensionais, dando ênfase a problemas de impacto.

Uma análise de placas e cascas que exibem grandes deformações sob cargas dinâmicas via MEFP pode ser vista em Coda e Paccola (2008). Em Maciel (2008) é realizada uma abordagem dos efeitos da não linearidade geométrica em problemas dinâmicos envolvendo pórticos planos e sólidos tridimensionais também baseada no MEFP.

Referente a problemas termomecânicos em Carrazedo (2009), Carrazedo e Coda (2010) e Cavalcante (2016), o MEFP foi adotado para uma abordagem de problemas térmicos considerando os efeitos da não linearidade física e geométrica. Tais estudos avaliaram o comportamento de treliças quando submetidas a impactos com anteparos rígidos. Lacerda (2014) também contribuiu para o estudo de treliças

não lineares utilizando o MEF posicional, apresentando o método do comprimento de arco usado para traçar caminhos de equilíbrio.

Destacam-se ainda, dentre outros trabalhos que empregam o método dos elementos finitos posicional, os estudos de Minski (2008), Morini (2009), Ferreira (2009), Rigobello *et al.* (2011), Sanches (2011), Reis (2012), Oliveira (2012), e Sampaio (2014). A seguir, serão descritos conceitos e formulação para o método dos elementos finitos posicional aplicada a problemas dinâmicos não lineares, baseada nos trabalhos de Maciel (2008), Lacerda (2014) e Cavalcante (2016).

## 5.1 Funcional de energia potencial total

### 5.1.1 Balanço de Energia

A formulação posicional é classificada como lagrangiana total, sendo que em sua descrição, as mudanças de configuração da estrutura são medidas a partir de um referencial fixo no espaço (LACERDA, 2014). O funcional de energia potencial total do sistema para problemas dinâmicos é dado por:

$$\Pi = U_e + K_c + K_a - P \quad (5.1)$$

Onde:  $U_e$  é o potencial de energia de deformação elástica;  $P$  é o potencial de energia das forças externas aplicadas;  $K_c$  é a energia cinética do corpo; e  $K_a$  é a perda de energia devido ao amortecimento.

O potencial de energia de deformação elástica é a integral da energia específica de deformação elástica ( $u_e$ ) ao longo do volume inicial ( $V_0$ ), dada por:

$$U_e = \int_{V_0} u_e dV_0 \quad (5.2)$$

A energia cinética também é obtida através da integral ao longo do volume inicial, como segue:

$$K_c = \int_{V_0} \rho_0 \frac{\dot{x}_i \dot{x}_i}{2} dV_0 \quad (5.3)$$

Onde:  $\rho_0$  é a densidade do corpo no referencial lagrangiano; e  $\dot{x}_i$  é a velocidade vetorial do ponto material, dada pelo diferencial do vetor de posição do ponto ( $x$ ) em relação ao tempo (Eq. (5.4)).

$$\dot{x}_i = \frac{d(x)}{dt} \quad (5.4)$$

Tem-se que para um sistema de forças conservativas, o potencial das forças externas é dado por:

$$P = F_i x_i \quad (5.5)$$

Onde:  $F_i$  é o vetor de forças externas; e  $x_i$  o vetor de posições das respectivas forças externas aplicadas.

Substituindo as Eq. (5.2), (5.3) e (5.5) em (5.1), tem-se:

$$\Pi = \int_{V_0} u_e dV_0 + \int_{V_0} \rho_0 \frac{\dot{x}_i \dot{x}_i}{2} dV_0 - F_i x_i + K_a \quad (5.6)$$

Percebe-se que tanto o potencial das forças externas quanto a energia cinética estão expressas em termos das posições do corpo, excetuando-se apenas a energia de deformação elástica. No entanto, conforme o próximo capítulo, será demonstrado como a energia de deformação elástica também pode ser escrita em função das posições nodais de acordo com a cinemática adotada.

A resolução do problema elástico abordado requer que o funcional de energia seja minimizado através do teorema da mínima energia potencial total, relativo a cada instante de tempo  $t$ . Leva-se em consideração, ao minimizar o funcional de energia, que a integral resultante da derivada do termo referente às perdas de energia devido ao amortecimento em relação às posições, é dada pela Eq. (5.7).

$$\frac{\partial K_a}{\partial x_i} = \int_{V_0} \frac{\partial k_a}{\partial x_i} dV_0 = \int_{V_0} c_m \rho_0 \dot{x}_i dV_0 \quad (5.7)$$

Onde:  $c_m$  é o coeficiente de amortecimento.

Minimizando o funcional de energia apresentado na Eq. (5.6) e fazendo a devida substituição da Eq. (5.7), tem-se a expressão que determina a posição de equilíbrio dinâmico, dada por:

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} \right|_t = \int_{V_0} \frac{\partial u_e}{\partial x_i} dV_0 + \int_{V_0} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \rho_0 \frac{\dot{x}_i \dot{x}_i}{2} \right) dV_0 - F_i + \int_{V_0} c_m \rho_0 \dot{x}_i dV_0 = 0 \quad (5.8)$$

Vale ressaltar que um corpo discretizado por elementos finitos pode apresentar suas variáveis aproximadas através de funções de forma, ou seja:

$$x_i = \phi_i X_i^j \quad (5.9)$$

$$\dot{x}_i = \phi_i \dot{X}_i^j \quad (5.10)$$

$$\ddot{x}_i = \phi_i \ddot{X}_i^j \quad (5.11)$$

Onde:  $X_i$ ,  $\dot{X}_i$  e  $\ddot{X}_i$  são os valores nodais para posição, velocidade e aceleração respectivamente; e  $\phi_i$  as funções de forma.

Desta forma, partindo das aproximações expressas nas Eq. (5.9) a (5.11), para o passo de tempo atual  $t + \Delta t$ , a equação de equilíbrio que descreve a resposta dinâmica é expressada por:

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial X} \right|_{t+\Delta t} = \left. \frac{\partial U_e}{\partial X} \right|_{t+\Delta t} + M \ddot{X}_{t+\Delta t} + C \dot{X}_{t+\Delta t} - F_{t+\Delta t} = 0 \quad (5.12)$$

Onde:  $C$  é a matriz de amortecimento; e  $M$  é a matriz de massa.

Como nota importante, na Eq. (5.12), a parcela  $M \ddot{X}_{t+\Delta t}$  define as forças inerciais, e as forças de amortecimento são representadas pela parcela  $C \dot{X}_{t+\Delta t}$ . Outro ponto que se vale ressaltar, é que o carregamento dinâmico, representado pela parcela  $F_{t+\Delta t}$ , pode variar no tempo, em sentido e módulo, como por exemplo:

$$F_{t+\Delta t} = F_0 [c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + c_4 t^3 + c_5 \text{sen}(c_6 t) + c_7 \cos(c_8 t) + c_9 e^{c_{10} t}] \quad (5.13)$$

Onde:  $c_1 \dots c_{10}$  são os coeficientes que definem a variação de  $F_0$  no tempo.

Vale salientar ainda, que para o caso estático (não abordado neste estudo), as parcelas de forças inerciais e amortecimento se anulam.

### 5.1.2 Energia total de deformação

Após as considerações feitas para o modelo termomecânico, que contempla sólidos elastoplásticos, sabe-se que a deformação total ( $\varepsilon$ ) é dada pela soma das parcelas elástica ( $\varepsilon^e$ ), plástica ( $\varepsilon^p$ ) e térmica ( $\varepsilon^\theta$ ), como expressado pela Eq. (5.14).

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p + \varepsilon^\theta \quad (5.14)$$

Desta forma, para contemplar o problema termoelastoplástico, a energia de deformação potencial é dada por:

$$U_e = \int_{V_0} \int_{\varepsilon} \sigma d\varepsilon dV_0 = \int_{V_0} \left( \int_{\varepsilon} E\varepsilon d\varepsilon - \int_{\varepsilon} E\varepsilon^p d\varepsilon - \int_{\varepsilon} E\varepsilon^\theta d\varepsilon \right) dV_0 \quad (5.15)$$

$$U_e = \int_{V_0} \left( \frac{1}{2} E\varepsilon^2 - E\varepsilon\varepsilon^p - E\varepsilon\varepsilon^\theta \right) dV_0 \quad (5.16)$$

### 5.1.3 Matriz de massa e de amortecimento

Como comentado anteriormente, a parcela que define as forças inerciais é expressada por  $M\ddot{X}_{t+\Delta t}$ . O que significa que o caráter dinâmico da formulação é relativo ao produto da matriz de massa e a aceleração do corpo.

A matriz de massa é um mecanismo utilizado para transferir a massa de cada elemento para seus respectivos nós (CAVALCANTE, 2016). Existem dois tipos de matriz de massa, a discreta e a consistente. A primeira é caracterizada por apenas apresentar elementos diagonais, sem termos relativos a rotação. Já a segunda, adotada neste trabalho, considera os termos relativos à rotação, sendo definida por:

$$M_{kj} = \int_{V_0} \rho_0 \phi_k \phi_j dV_0 \quad (5.17)$$

Recomenda-se que para problemas onde se utiliza de algoritmos explícitos de integração temporal (discutidos posteriormente), a matriz de massa discreta seja a adotada, por simples questões de economia e precisão (Cook *et al.*, 2002). Já para

problemas onde se utiliza algoritmos implícitos de integração temporal, indica-se a adoção de uma matriz de massa consistente, mesmo que o custo computacional seja maior.

A presença da parcela inerente às perdas de energia devido ao amortecimento na equação de movimento para o problema não linear, garante que o corpo partirá de um estado vibratório para um estado em repouso, definindo assim o amortecimento estrutural. Sendo a matriz de amortecimento proporcional a massa, como indicado na Eq. (5.18), facilmente verificado na Eq. (5.8).

$$C = 2c_m M \quad (5.18)$$

## 5.2 Método de Newton-Raphson

A solução de problemas de natureza não linear, requer a adoção de estratégias numéricas para a obtenção da resposta, pois obter diretamente uma solução precisa é uma tarefa muito árdua (MARQUES, 2006).

Para solucionar a Eq. (5.12), adota-se aqui uma das principais estratégias de resolução de problemas não lineares, o processo iterativo de Newton-Raphson, apresentado inicialmente por Riks (1972). Como também, combina-se o procedimento iterativo com os esquemas de integração temporal.

Segundo Cavalcante (2016), o processo iterativo se dá pela aproximação da trajetória de equilíbrio da estrutura por tangentes à mesma, até a condição de convergência, como indicado na Figura 5.1.

Em notação compacta, a Eq. (5.12) pode ser escrita na forma:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial X_i} = g_i(X) = f_i(X) - F_i \quad (5.19)$$

Onde:  $X$  é o parâmetro generalizado, no caso as posições nodais; e  $g(X)$  é o vetor de resíduos, no qual pode ser expressado na forma vetorial (Eq.(5.20)).

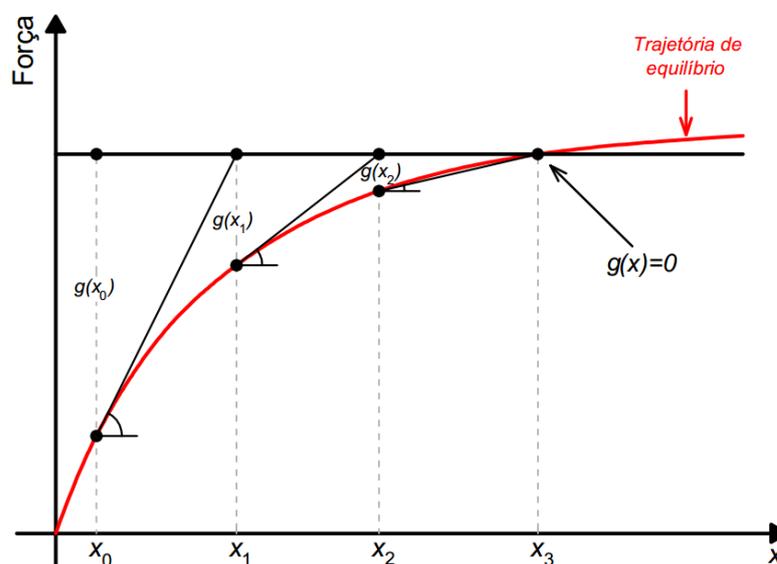
$$g(X, F) = 0 \quad (5.20)$$

O vetor de resíduos é não linear em relação à posição e às forças externas. Sabe-se que as cargas externas independem das forças residuais, logo a configuração de equilíbrio da Eq. (5.12) é dada pela expressão apresentada na Eq. (5.21), em que, faz-se uma quantidade  $\Delta X$ , em uma expansão da série de Taylor truncada em seu termo linear (MORINI, 2009).

$$g(X) = 0 \cong g(X_0) + \nabla g(X_0)\Delta X \quad (5.21)$$

Onde:  $X$  é o vetor posição incógnito; e  $X_0$  é o vetor posição de tentativa, geralmente definido no passo anterior.

Figura 5.1 - Método de Newton-Raphson resolvendo a equação de equilíbrio



Fonte: Cavalcante (2016)

O termo  $\nabla g(X_0)$  presente na Eq. (5.21) é denominado de Matriz Hessiana, e sua determinação é feita a partir da derivação de segunda ordem do funcional de energia potencial total em relação as posições nodais, como segue na Eq. (5.22), e de acordo com a Figura 5.1 são as inclinações da trajetória de equilíbrio.

$$\nabla g(X_0) = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial X^2} \quad (5.22)$$

Como comentado anteriormente, o processo iterativo é realizado até que as forças residuais sejam suficientemente pequenas, como indicado na Figura 5.1. Para tanto, é avaliado o incremento de posição  $\Delta X$ , dado pela relação inversa da Eq. (5.21), resultando em:

$$\Delta X = -[\nabla g(X_0)]^{-1}g(X_0) \quad (5.23)$$

O critério de convergência é verificado até que o  $\Delta X$  seja suficientemente pequeno para garantir a verdade da inequação apresentada na Eq. (5.24).

$$nor \leq tol \quad (5.24)$$

Sendo:

$$nor = \frac{\Delta X}{X_0} \quad (5.25)$$

Caso o critério de convergência expressado na Eq. (5.24) seja satisfeito, tem-se:

$$X = X_0 + \Delta X \quad (5.26)$$

Quando não, deve-se fazer  $X_0 = X$  e repetir o processo até que a norma de convergência seja atendida.

Em nota adicional, existem casos em que é necessário dividir o carregamento em níveis de aplicação, de forma que o equilíbrio da estrutura seja alcançado para cada passo de carga até a configuração final, na qual a estrutura está submetida ao carregamento total. Vale ressaltar também, que a abordagem para verificação de convergência da solução ao final de cada iteração adotada neste trabalho, está dentre várias outras existentes. Outra abordagem pode ser vista em Greco (2004) e Cavalcante (2016), dentre outros.

### 5.3 Métodos de integração temporal

Para solucionar o problema dinâmico é necessário fazer uso de métodos de integração temporal. A aplicação deste método numérico consiste em substituir as derivadas parciais no tempo e espaço, que estão presentes na equação de equilíbrio dinâmico (Eq. (5.12)), por expressões finitas e aproximadas que buscam a partir do conhecimento dos deslocamentos e suas derivadas em um determinado instante  $t$  da

história da estrutura, prever os valores subsequentes, atendendo ao equilíbrio nestes instantes futuros, distanciados de um passo de tempo  $\Delta t$  (BOTTURA, 1997).

A facilidade de implementação da integração numérica do tempo, juntamente com sua pronta usabilidade em estudos não-lineares impulsionou a popularidade dessas abordagens (CHUNG & LEE, 1994). Em relação às variáveis envolvidas no processo, os métodos de integração temporal, são classificados em dois grupos, os algoritmos explícitos e os implícitos. Define-se como algoritmo explícito, os quais as variáveis para o passo de tempo atual são calculadas a partir apenas das variáveis obtidas nos passos de tempo passados, isto é:

$$X_{t+\Delta t} = f(X_t, \dot{X}_t, \ddot{X}_t, X_{t-\Delta t}, \dot{X}_{t-\Delta t}, \ddot{X}_{t-\Delta t}, \dots) \quad (5.27)$$

Já os algoritmos implícitos, para o passo de tempo atual, os valores das incógnitas alvo dependem não somente das variáveis do passado, mas também dos próprios valores. Resumidamente, a resposta do passo atual  $t + \Delta t$  é obtida além da história da estrutura dos tempos passados e envolvem os valores atuais, como expressado pela Eq. (5.28).

$$X_{t+\Delta t} = f(\dot{X}_{t+\Delta t}, \ddot{X}_{t+\Delta t}, X_t, \dot{X}_t, \ddot{X}_t, \dots) \quad (5.28)$$

Um algoritmo de integração temporal ainda pode ser definido pela sua estabilidade, nos quais são classificados pela sua condição a ser estável. Desta forma, pode-se dizer que um algoritmo é condicional ou incondicionalmente estável. Os métodos estáveis são aqueles que convergem, enquanto que os métodos instáveis apresentam crescente propagação de erros ao longo do tempo (CAVALCANTE, 2016).

Segundo Silveira (2001), todo algoritmo explícito é condicionalmente estável. A condição da estabilidade do algoritmo (garantida a problemas lineares) apresenta uma restrição ao valor do incremento de tempo máximo adotado em casa análise (VIEIRA, 2004). Isto pode acarretar na necessidade em se adotar uma discretização temporal com um incremento muito pequeno, ocasionando num custo computacional elevado para a determinação da resposta de problemas consideravelmente simples, quando comparado com o desempenho de algoritmos implícitos.

Isto ocorre, porque o valor crítico para  $\Delta t$  é inversamente proporcional à máxima frequência natural do sistema, independentemente do tipo de sollicitação a qual o sólido está submetido. Consequentemente, em problemas de dinâmica estrutural, em que as frequências de excitação são da ordem de grandeza das frequências naturais mais baixas da estrutura, os métodos explícitos tornam-se pouco eficazes já que o valor do incremento de tempo crítico é bem menor que o necessário para uma integração razoavelmente precisa dos modos solicitados (VIEIRA, 2004). Logo, os procedimentos explícitos são mais adequados para resolução de problemas de propagação de onda, enquanto que os esquemas implícitos são mais eficazes para problemas inerciais (estáticos e de dinâmica estrutural), de acordo com Cook *et al.* 1989.

Segundo autores como Silveira (2001), Vieira (2004) e Cavalcante (2016), dentre outros, a escolha do incremento de tempo para obtenção de resposta adequada pode ser uma tarefa pouco cômoda, visto que possivelmente seriam necessários alguns testes para conveniente seleção. Outro ponto importante a se considerar quando se tratando de algoritmos explícitos, é que malhas heterogêneas, ou seja, discretização do sólido em elementos com grande discrepância do tamanho dos mesmos, ou até mesmo com diferentes materiais, pode elevar o custo computacional de forma considerável, visto que o  $\Delta t$  é adotado como único para toda malha (SILVEIRA, 2001). Tal observação também pode ser vista no estudo de Dokainish e Subbaraj (1989).

Em se tratando dos métodos implícitos, normalmente são incondicionalmente estáveis. Isto implica na falta de restrição quanto ao tamanho do incremento de tempo, sendo a prescrição do  $\Delta t$  imposta apenas pela precisão da resposta, a qual se deseja obter, e não pela estabilidade do algoritmo (CAVALCANTE, 2016). Porém, tradicionalmente, o uso de algoritmos implícitos demanda mais memória para armazenamento de dados durante a análise, visto que é necessário a montagem das matrizes globais do sistema estrutural. Desta forma, a implementação de algoritmos implícitos é, de certa forma, menos simples quando comparado com os explícitos.

A partir das premissas apresentadas acima, conclui-se que a escolha do algoritmo de integração no tempo ideal para o problema estudado, tem sua dificuldade relacionada à conciliação da robustez, precisão e estabilidade, segundo trabalhos de

Tamma *et al.* (2000) e Cavalcante (2016). A robustez do algoritmo está associada à capacidade do mesmo em gerar soluções que minimizam o erro numérico inerente ao processo de integração das equações.

Este estudo fará uso de seis algoritmos de integração temporal. São eles: Newmark, Houbolt, Wilson- $\theta$ , Souza & Moura (1997), Diferenças Centrais e Chung & Lee (1994). Vale salientar que os algoritmos serão descritos de forma a adaptar-se à formulação posicional, ou seja, em função das posições nodais.

Os algoritmos se diferenciam pela particularidade da atualização dos vetores posição, velocidade e aceleração, o que implica em mudanças na equação de equilíbrio dinâmico. O modo como as leis de variação destas variáveis é considerado influência na convergência e qualidade das respostas (MARTINS, 2004). Os algoritmos de Newmark, Wilson- $\theta$  e Chung & Lee (1994), dependem da adoção de valores adequados para os parâmetros associados a cada método, como discutido posteriormente nas respectivas sessões.

As formulações apresentadas a seguir também podem ser vistas em Cavalcante (2016). Para mais detalhes dos algoritmos de integração temporal o leitor é referido ao trabalho de Tamma *et al.* (2000), no qual uma visão ampla da integração com marcha no tempo é abordada. Dentre outros trabalhos com uma abordagem mais profunda sobre algoritmos de integração temporal pode-se citar: Bathe (1996), Cook (2001), Silveira (2001), Martins (2004), Vieira (2004) e Loureiro (2007).

### **5.3.1 Método de Newmark**

O método de Newmark é um dos mais difundidos da literatura, e tem ampla aplicação em se tratando de problemas estruturais. No entanto, o algoritmo não é dissipativo, isto é, não possui capacidade de amortecer frequências mais altas, mantendo precisão de segunda ordem, sendo dissipativo apenas quando sua precisão for de primeira ordem (LOUREIRO, 2007).

O método foi divulgado em 1959 por Newmark, no qual apresentou o método de passo simples como indicado nas expressões das Eq. (5.29) e (5.30). Consiste basicamente em expressar as velocidades e deslocamentos segundo aproximações

por diferenças finitas no domínio do tempo, no qual baseiam-se na simplificação da variável aceleração nos intervalos de tempo. Detalhes sobre a dedução destas equações podem ser vistos em Greco (2004).

$$X_{t+\Delta t} = X_t + \Delta t \dot{X}_t + \Delta t^2 \left[ \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{X}_t + \beta \ddot{X}_{t+\Delta t} \right] \quad (5.29)$$

$$\dot{X}_{t+\Delta t} = \dot{X}_t + \Delta t(1 - \gamma) \ddot{X}_t + \gamma \Delta t \ddot{X}_{t+\Delta t} \quad (5.30)$$

Onde:  $\beta$  e  $\gamma$  são as constantes referentes ao método de Newmark.

Os parâmetros  $\beta$  e  $\gamma$  determinam as propriedades de estabilidade, precisão e amortecimento dos métodos (COOK *et al.*, 1989). Bottura (1997), afirma que estes parâmetros ponderam o quanto implícito o método se apresenta, posto que tomado nulos o algoritmo apresenta processo explícito. Segundo Hughes (2000), o método de Newmark é incondicionalmente estável para  $1/2 \leq \gamma \leq 2\beta$  e condicionalmente estável para  $\gamma \leq 1/2$  e  $\beta \leq \gamma/2$ . Algumas particularizações do método são apresentadas na Tabela 5.1, e para mais detalhes sobre as variações do método de Newmark o leitor é referido aos trabalhos de Hughes (1987), Cook *et al.* (1989) e Bathe (1996), entre outros.

Tabela 5.1 - Métodos da família de Newmark

Método	Tipo	$\beta$	$\gamma$	Condição de Estabilidade	Ordem de Precisão
<b>Aceleração Média (Regra Trapezoidal)</b>	Implícito	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	Incondicional	2
<b>Aceleração Média</b>	Implícito	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	Condicional	2
<b>Fox-Goodwin</b>	Implícito	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$	Condicional	2
<b>Diferença Central</b>	Explícito	0	$\frac{1}{2}$	Condicional	2

Fonte: Vieira (2004)

Sendo a aceleração a variável independente do processo, a partir da manipulação da Eq. (5.29), tem-se:

$$\ddot{X}_{t+\Delta t} = \frac{X_{t+\Delta t} - X_t}{\beta \Delta t^2} - \frac{\dot{X}_t}{\beta \Delta t} - \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{X}_t \quad (5.31)$$

Substituindo-se as Eq. (5.30) e (5.31), que expressam velocidade e aceleração, respectivamente, na Eq. (5.12), resulta em:

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial X} \right|_{t+\Delta t} = \left. \frac{\partial U_e}{\partial X} \right|_{t+\Delta t} - F_{t+\Delta t} + \frac{M}{\beta \Delta t^2} X_{t+\Delta t} - M Q_t + \frac{\gamma C}{\beta \Delta t} X_{t+\Delta t} + C R_t - \gamma \Delta t C Q_t = 0 \quad (5.32)$$

A contribuição dinâmica das variáveis do passado, ou seja, no passo  $t$ , são dadas por  $Q_t$  e  $R_t$ , e são expressadas por:

$$Q_t = \frac{X_t}{\beta \Delta t^2} + \frac{\dot{X}_t}{\beta \Delta t} + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{X}_t \quad (5.33)$$

$$R_t = \dot{X}_t + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{X}_t \quad (5.34)$$

Desta forma, as Eq. (5.30) e (5.31) podem ser reescritas em função de  $Q_t$  e  $R_t$ , como segue:

$$\dot{X}_{t+\Delta t} = R_t + \gamma \Delta t \ddot{X}_{t+\Delta t} \quad (5.35)$$

$$\ddot{X}_{t+\Delta t} = \frac{X_{t+\Delta t}}{\beta \Delta t^2} - Q_t \quad (5.36)$$

Ao derivar a Eq. (5.32) em relação às posições nodais, para o passo atual, é obtida a Matriz Hessiana para o problema dinâmico, dada por:

$$\left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial X^2} \right|_{t+\Delta t} = \nabla g(X_0) = \left. \frac{\partial^2 U_e}{\partial X^2} \right|_{t+\Delta t} + \frac{M}{\beta \Delta t^2} + \frac{\gamma C}{\beta \Delta t} \quad (5.37)$$

### 5.3.2 Método de Houbolt

Houbolt (1950) introduziu este método de integração no tempo, que consiste no emprego de expressões em diferenças finitas descendentes para aproximar os valores de velocidade e aceleração, constituindo um método multipasso (BOTTURA, 1997). Segundo Bathe (1996), obtém-se o algoritmo de Houbolt a partir da derivação de segunda ordem de polinômios cúbicos de Lagrange em relação ao tempo.

As variáveis de aceleração e velocidade são aproximadas de acordo com as expressões das Eq. (5.38) e (5.39), respectivamente.

$$\ddot{X}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\Delta t^2} (2X_{t+\Delta t} - 5X_t + 4X_{t-\Delta t} - X_{t-2\Delta t}) \quad (5.38)$$

$$\dot{X}_{t+\Delta t} = \frac{1}{6\Delta t} (11X_{t+\Delta t} - 18X_t + 9X_{t-\Delta t} - 2X_{t-2\Delta t}) \quad (5.39)$$

Da mesma forma, como para o método de Newmark, substitui-se as Eq. (5.38) e (5.39) na equação que define o equilíbrio dinâmico do sistema para o instante atual ( $t + \Delta t$ ), fornecendo:

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial X} \right|_{t+\Delta t} = \left. \frac{\partial U_e}{\partial X} \right|_{t+\Delta t} - F_{t+\Delta t} + \frac{2M}{\Delta t^2} X_{t+\Delta t} + M Q_t + \frac{11C}{6\Delta t} X_{t+\Delta t} + C R_t = 0 \quad (5.40)$$

As variáveis de contribuição dinâmica do passado  $Q_t$  e  $R_t$  são expressadas por:

$$Q_t = \frac{1}{\Delta t^2} (-5X_t + 4X_{t-\Delta t} - X_{t-2\Delta t}) \quad (5.41)$$

$$R_t = \frac{1}{6\Delta t} (-18X_t + 9X_{t-\Delta t} - 2X_{t-2\Delta t}) \quad (5.42)$$

Reescrevendo as Eq. (5.38) e (5.39) em função das contribuições dinâmicas do passo anterior,  $Q_t$  e  $R_t$ , tem-se:

$$\ddot{X}_{t+\Delta t} = \frac{2X_{t+\Delta t}}{\Delta t^2} + Q_t \quad (5.43)$$

$$\dot{X}_{t+\Delta t} = \frac{11X_{t+\Delta t}}{6\Delta t} + R_t \quad (5.44)$$

E a Matriz Hessiana, obtida de forma análoga ao método de Newmark, fica:

$$\left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial X^2} \right|_{t+\Delta t} = \nabla g(X_0) = \left. \frac{\partial^2 U_e}{\partial X^2} \right|_{t+\Delta t} + \frac{2M}{\Delta t^2} + \frac{11C}{6\Delta t} \quad (5.45)$$

### 5.3.3 Método de Wilson- $\theta$

Em 1973, Wilson e Bathe (1973) apresentaram uma modificação para o método geral de Newmark, no qual foi tornado incondicionalmente estável através da

introdução de um fator  $\theta_w$ . Sendo o motivo da introdução do mesmo ocasionado pela observação de que uma solução instável tende a oscilar em torno da verdadeira solução (WILSON, 2002).

Isso pode ser alcançado através da simples consideração de que a equação de equilíbrio dinâmico é discretizada com um incremento  $\Delta t' = \theta_w \Delta t$ . Desta forma, a solução do problema é calculada para um passo  $t + \theta_w \Delta t$ . É importante destacar que o método de Wilson- $\theta$  é uma expansão do método da aceleração linear, em que  $\gamma = 1/2$  e  $\beta = 1/6$ .

Relativo à escolha do fator  $\theta_w$ , sabe-se que o mesmo deve ser sempre superior a 1, cujos casos em que  $\theta_w = 1$ , não há modificação do método de Newmark. De acordo com Craig Jr. (1981), o valor ótimo para  $\theta_w$  é 1,420815, no entanto, diversos autores adotam o valor de 1,4. Destaca-se ainda, que para valores acima de 1,37 o método de torna incondicionalmente convergente (CAVALCANTE, 2016).

Para o intervalo de tempo entre  $t$  e  $t + \theta_w \Delta t$ , a aceleração é dada por:

$$\ddot{X}_{t+\tau} = \ddot{X}_t + \frac{\tau}{\theta_w \Delta t} (\ddot{X}_{t+\theta_w \Delta t} - \ddot{X}_t) \quad (5.46)$$

Onde:  $\tau$  é um incremento no tempo variando como:

$$0 \leq \tau \leq \theta_w \Delta t \quad (5.47)$$

A determinação das velocidade e posição, é obtida a partir da integração da Eq. (5.46) e aplicação das devidas condições iniciais, resultando em:

$$\dot{X}_{t+\tau} = \dot{X}_t + \ddot{X}_t \tau + \frac{\tau^2}{2\theta_w \Delta t} (\ddot{X}_{t+\theta_w \Delta t} - \ddot{X}_t) \quad (5.48)$$

$$X_{t+\tau} = X_t + \dot{X}_t \tau + \frac{\ddot{X}_t \tau^2}{2} + \frac{\tau^3}{6\theta_w \Delta t} (\ddot{X}_{t+\theta_w \Delta t} - \ddot{X}_t) \quad (5.49)$$

Assumindo  $\tau = \theta_w \Delta t$ , as Eq. (5.48) e (5.49) podem ser reescritas como:

$$\dot{X}_{t+\theta_w \Delta t} = \dot{X}_t + \frac{\theta_w \Delta t}{2} (\ddot{X}_{t+\theta_w \Delta t} + \ddot{X}_t) \quad (5.50)$$

$$X_{t+\theta_w\Delta t} = X_t + \theta_w\Delta t\dot{X}_t + \frac{\theta_w^2\Delta t^2}{6}(\ddot{X}_{t+\theta_w\Delta t} + 2\ddot{X}_t) \quad (5.51)$$

Fazendo a resolução das Eq. (5.50) e (5.51), para  $\dot{X}_{t+\theta_w\Delta t}$  e  $\ddot{X}_{t+\theta_w\Delta t}$  em termos de  $X_{t+\theta_w\Delta t}$ , tem-se:

$$\ddot{X}_{t+\theta_w\Delta t} = \frac{6}{\theta_w^2\Delta t^2}(X_{t+\theta_w\Delta t} - X_t) - \frac{6}{\theta_w\Delta t}\dot{X}_t - 2\ddot{X}_t \quad (5.52)$$

$$\dot{X}_{t+\theta_w\Delta t} = \frac{3}{\theta_w\Delta t}(X_{t+\theta_w\Delta t} - X_t) - 2\dot{X}_t - \frac{\theta_w\Delta t}{2}\ddot{X}_t \quad (5.53)$$

As variáveis relacionadas ao instante  $t + \Delta t$  (posição, velocidade e aceleração), são determinadas através do equilíbrio no instante  $t + \theta_w\Delta t$ . Logo, estima-se o vetor de forças externas para o passo  $t + \theta_w\Delta t$ , expressado por:

$$F_{t+\theta_w\Delta t} = F_t + \theta_w(F_{t+\Delta t} - F_t) \quad (5.54)$$

Desta forma, reescreve-se a Eq. (5.12) fazendo a substituição das Eq. (5.52) e (5.53).

$$\frac{\partial \Pi}{\partial X}\Big|_{t+\theta_w\Delta t} = \frac{\partial U_e}{\partial X}\Big|_{t+\theta_w\Delta t} - F_{t+\theta_w\Delta t} + \frac{6M}{\theta_w^2\Delta t^2}X_{t+\theta_w\Delta t} + MQ_t + \frac{3C}{\theta_w\Delta t}X_{t+\theta_w\Delta t} + CR_t = 0 \quad (5.55)$$

No qual as contribuições dinâmicas do passado são:

$$Q_t = -\left(\frac{6}{\theta_w^2\Delta t^2}X_t + \frac{6}{\theta_w\Delta t}\dot{X}_t + 2\ddot{X}_t\right) \quad (5.56)$$

$$R_t = -\left(\frac{3}{\theta_w\Delta t}X_t + 2\dot{X}_t + \frac{\theta_w\Delta t}{2}\ddot{X}_t\right) \quad (5.57)$$

A Matriz Hessiana do problema dinâmico, obtida ao derivar a Eq. (5.55) em relação as posições nodais, é dada por:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial X^2}\Big|_{t+\theta_w\Delta t} = \nabla g(X_0) = \frac{\partial^2 U_e}{\partial X^2}\Big|_{t+\theta_w\Delta t} + \frac{6M}{\theta_w^2\Delta t^2} + \frac{3C}{\theta_w\Delta t} \quad (5.58)$$

A partir das expressões apresentadas nas Eq. (5.46), (5.48) e (5.49), assumindo  $\tau = \Delta t$  e resolvendo as equações, pode-se atualizar as variáveis para o instante  $t + \Delta t$ , no qual as aceleração, velocidade e posição, são dadas respectivamente por:

$$\ddot{X}_{t+\Delta t} = \ddot{X}_t + \frac{1}{\theta_w} (\ddot{X}_{t+\theta_w\Delta t} - \ddot{X}_t) \quad (5.59)$$

$$\dot{X}_{t+\Delta t} = \dot{X}_t + \Delta t \ddot{X}_t + \frac{\Delta t}{2\theta_w} (\ddot{X}_{t+\theta_w\Delta t} - \ddot{X}_t) \quad (5.60)$$

$$X_{t+\Delta t} = X_t + \Delta t \dot{X}_t + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{X}_t + \frac{\Delta t^2}{6\theta_w} (\ddot{X}_{t+\theta_w\Delta t} - \ddot{X}_t) \quad (5.61)$$

Segundo Wilson (2002), em problemas onde os modos mais altos do sistema são relevantes, não é recomendado o método Wilson- $\theta$ , visto que o parâmetro  $\theta_w$  tende a introduzir um amortecimento nestes modos. Bem como, a equação de equilíbrio dinâmico não é satisfeita no instante  $t + \Delta t$ .

### 5.3.4 Método das Diferenças Centrais

Como mostrado na Tabela 5.1, o Método das Diferenças Centrais é uma particularização do Método de Newmark para  $\beta = 0$  e apresenta precisão de segunda ordem. Considerando que se trata de um método explícito, conseqüentemente é condicionalmente estável. Como comentado anteriormente isto acarreta na necessidade em se adotar incrementos de tempo relativamente pequenos.

Bathe (1996) e Bottura (1997) mostram que para este método, o valor crítico para o intervalo de tempo não pode ser ultrapassado, sendo dado por:

$$\Delta t_{crit} = \frac{T_\pi}{\pi} \quad (5.62)$$

Onde:  $T_\pi$  é o menor período do sistema de elementos finitos, dado pela Eq. (5.63)

$$T_\pi = \frac{2\pi}{\omega_{max}} \quad (5.63)$$

Onde:  $\omega_{max}$  a maior frequência natural.

De acordo com Vieira (2004), o Método das Diferenças Centrais está entre os mais difundidos algoritmos explícitos adotados na mecânica computacional. Sua formulação é baseada em aproximações por diferenças centrais para as velocidades e acelerações (COOK *et al.*, 1989).

Considere agora os valores da posição anterior e posterior ao valor de referência do passo  $t$ , dados respectivamente por  $X_{t-\Delta t}$  e  $X_{t+\Delta t}$ , por séries de Taylor centradas em  $X_t$ , assim:

$$X_{t-\Delta t} = X_t - \Delta t \dot{X}_t + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{X}_t - \dots \quad (5.64)$$

$$X_{t+\Delta t} = X_t + \Delta t \dot{X}_t + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{X}_t + \dots \quad (5.65)$$

Cuja soma truncada nos termos em segunda ordem, como indica Warburton (1976) apud Bottura (1997), produz:

$$\ddot{X}_t = \frac{1}{\Delta t^2} (X_{t+\Delta t} - 2X_t + X_{t-\Delta t}) \quad (5.66)$$

De maneira análoga, da diferença entre as Eq. (5.64) e (5.65) sob as mesmas condições e evidenciando-se o termo na primeira derivada:

$$\dot{X}_t = \frac{1}{2\Delta t} (X_{t+\Delta t} - X_{t-\Delta t}) \quad (5.67)$$

Aplicando as Eq. (5.66) e (5.67) na Eq. (5.12), que define a equação de equilíbrio dinâmico, para o passo de tempo de referência  $t$ , é possível obter as variáveis em relação ao passo de tempo  $t + \Delta t$ . Tem-se, desta forma:

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial X} \right|_{t+\Delta t} = \left. \frac{\partial U_e}{\partial X} \right|_{t+\Delta t} - F_{t+\Delta t} + \frac{M}{\Delta t^2} X_{t+\Delta t} + M Q_t + \frac{C}{2\Delta t} X_{t+\Delta t} + C R_t = 0 \quad (5.68)$$

As variáveis de contribuição dinâmicas são dadas por:

$$Q_t = \frac{1}{\Delta t^2} (-2X_t + X_{t-\Delta t}) \quad (5.69)$$

$$R_t = \frac{1}{2\Delta t} (-X_{t-\Delta t}) \quad (5.70)$$

É possível reescrever as Eq. (5.66) e (5.67) em função de  $Q_t$  e  $R_t$ , como segue:

$$\ddot{X}_t = \frac{X_{t+\Delta t}}{\Delta t^2} + Q_t \quad (5.71)$$

$$\dot{X}_t = \frac{X_{t+\Delta t}}{2\Delta t} + R_t \quad (5.72)$$

Analogamente aos métodos anteriores, derivando a Eq. (5.68), tem-se a Matriz Hessiana, dada por:

$$\left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial X^2} \right|_{t+\Delta t} = \nabla g(X_0) = \left. \frac{\partial^2 U_e}{\partial X^2} \right|_{t+\Delta t} + \frac{M}{\Delta t^2} + \frac{C}{2\Delta t} \quad (5.73)$$

### 5.3.5 Método da Diferença Finita de Quarta Ordem (Souza & Moura, 1997)

Divulgado por Souza & Moura (1997), o método da Diferença Finita de Quarta Ordem foi proposto como forma de atenuar os possíveis erros que são obtidos pelo método das Diferenças Centrais, principalmente quando se adota um incremento de tempo perto do valor crítico. Segundo Souza & Moura (1997), este método conserva as vantagens do método explícito (redução da memória de processamento e a dispensa da montagem e solução do sistema global), como também, praticamente elimina as oscilações numéricas espúrias.

Para se formular um algoritmo de alta precisão no domínio do tempo, a ideia principal é escrever a posição (variável de interesse neste trabalho) como um polinômio de Lagrange de quarto grau, passando pelos pontos relativos aos instantes  $t + \Delta t$ ,  $t$ ,  $t - \Delta t$ ,  $t - 2\Delta t$  e  $t - 3\Delta t$ . Desta forma, a velocidade e aceleração nodais são dadas por:

$$\dot{X}_{t+\Delta t} = \frac{1}{2\Delta t} (X_{t+\Delta t} - X_{t-\Delta t}) - \frac{1}{12\Delta t} (X_{t-3\Delta t} - 6X_{t-2\Delta t} + 12X_{t-\Delta t} - 10X_t + 3X_{t+\Delta t}) \quad (5.74)$$

$$\ddot{X}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\Delta t^2} (X_{t+\Delta t} - 2X_t + X_{t-\Delta t}) - \frac{1}{12\Delta t^2} (X_{t+\Delta t} - 4X_t + 6X_{t-\Delta t} - 4X_{t-2\Delta t} + X_{t-3\Delta t}) \quad (5.75)$$

Fazendo a substituição das Eq. (5.74) e (5.75) na Eq. (5.12), tem-se:

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial X} \right|_{t+\Delta t} = \left. \frac{\partial U_e}{\partial X} \right|_{t+\Delta t} - F_{t+\Delta t} + \frac{11M}{12\Delta t^2} X_{t+\Delta t} + MQ_t + \frac{C}{4\Delta t} X_{t+\Delta t} + CR_t = 0 \quad (5.76)$$

Onde:

$$Q_t = \frac{1}{12\Delta t^2} (-20X_t + 6X_{t-\Delta t} + 4X_{t-2\Delta t} - X_{t-3\Delta t}) \quad (5.77)$$

$$R_t = \frac{1}{12\Delta t} (10X_t - 18X_{t-\Delta t} + 6X_{t-2\Delta t} - X_{t-3\Delta t}) \quad (5.78)$$

Reescreve-se a velocidade e aceleração expressadas nas Eq. (5.74) e (5.75) em função de  $Q_t$  e  $R_t$ , resultando em:

$$\dot{X}_{t+\Delta t} = \frac{3}{12\Delta t} X_{t+\Delta t} - R_t \quad (5.79)$$

$$\ddot{X}_{t+\Delta t} = \frac{11}{12\Delta t^2} X_{t+\Delta t} + Q_t \quad (5.80)$$

A Matriz Hessiana é dada por:

$$\left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial X^2} \right|_{t+\Delta t} = \nabla g(X_0) = \left. \frac{\partial^2 U_e}{\partial X^2} \right|_{t+\Delta t} + \frac{11M}{12\Delta t^2} + \frac{C}{4\Delta t} \quad (5.81)$$

Segundo observações feitas por Souza & Moura (1997), o incremento de tempo não deve ultrapassar um valor crítico, sendo dado por:

$$\Delta t_{crit} = \frac{2}{\omega_{max}} \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (5.82)$$

Onde:  $\omega_{max}$  é a maior frequência natural do problema.

Para mais detalhes sobre implementação e aplicação do método, o leitor é referido ao trabalho de Souza & Moura (1997).

### 5.3.6 Método de Chung & Lee (1994)

Uma nova família de métodos de integração temporal com dissipação de altas frequências para resolução de problemas dinâmicos lineares e não-lineares foi apresentada por Chung & Lee (1994). O método, com precisão de segunda ordem, apresenta posição e velocidade aproximadas por:

$$X_{t+\Delta t} = X_t + \Delta t \dot{X}_t + \beta_1 \ddot{X}_t + \beta_2 \ddot{X}_{t+\Delta t} \quad (5.83)$$

$$\dot{X}_{t+\Delta t} = \dot{X}_t + \Delta t \ddot{X}_t + \gamma_1 \ddot{X}_t + \gamma_2 \ddot{X}_{t+\Delta t} \quad (5.84)$$

Onde:

$$\beta_1 = \Delta t^2 \left( \frac{1}{2} - \beta_c \right) \quad (5.85)$$

$$\beta_2 = \Delta t^2 \beta_c \quad (5.86)$$

$$\gamma_1 = -\frac{1}{2} \Delta t \quad (5.87)$$

$$\gamma_2 = \frac{3}{2} \Delta t \quad (5.88)$$

Percebe-se a partir das Eq. (5.85) a (5.88), que  $\beta_c$  é o único parâmetro livre, no qual, após um estudo de convergência foi constatado que o intervalo útil para o parâmetro  $\beta_c$  é dado pela Eq. (5.89). Para mais detalhes sobre o estudo vide Chung & Lee (1994).

$$1 \leq \beta_c \leq 28/27 \quad (5.89)$$

A partir da Eq. (5.83), é possível obter a aceleração nodal do sistema para o passo de tempo  $t + \Delta t$ , isolando o termo referente à mesma. Tem-se, desta forma:

$$\ddot{X}_{t+\Delta t} = \frac{(X_{t+\Delta t} - X_t)}{\beta_2} - \frac{\Delta t \dot{X}_t}{\beta_2} - \frac{\beta_1 \ddot{X}_t}{\beta_2} \quad (5.90)$$

Substituindo a velocidade e aceleração nodal expressadas pelas Eq. (5.84) e (5.90), respectivamente, na Eq. (5.12) de equilíbrio dinâmico, tem-se:

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial X} \right|_{t+\Delta t} = \left. \frac{\partial U_e}{\partial X} \right|_{t+\Delta t} - F_{t+\Delta t} + \frac{M}{\beta_2} X_{t+\Delta t} + M Q_t + \frac{\gamma_2 C}{\beta_2} X_{t+\Delta t} + C R_t \quad (5.91)$$

Sendo as contribuições dinâmicas do passado, dadas por:

$$Q_t = -\frac{X_t}{\beta_2} - \frac{\Delta t \dot{X}_t}{\beta_2} - \frac{\beta_1 \ddot{X}_t}{\beta_2} \quad (5.92)$$

$$R_t = \dot{X}_t + \Delta t \ddot{X}_t + \gamma_1 \dot{X}_t + \gamma_2 Q_t \quad (5.93)$$

Pode-se reescrever a velocidade e aceleração em função das Eq. (5.92) e (5.93), como segue:

$$\dot{X}_{t+\Delta t} = \gamma_2 \ddot{X}_{t+\Delta t} + R_t - \gamma_2 Q_t \quad (5.94)$$

$$\ddot{X}_{t+\Delta t} = \frac{X_{t+\Delta t}}{\beta_2} + Q_t \quad (5.95)$$

Sendo a Matriz Hessiana, dada por:

$$\left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial X^2} \right|_{t+\Delta t} = \nabla g(X_0) = \left. \frac{\partial^2 U_e}{\partial X^2} \right|_{t+\Delta t} + \frac{M}{\beta_2} + \frac{\gamma_2 C}{\beta_2} \quad (5.96)$$

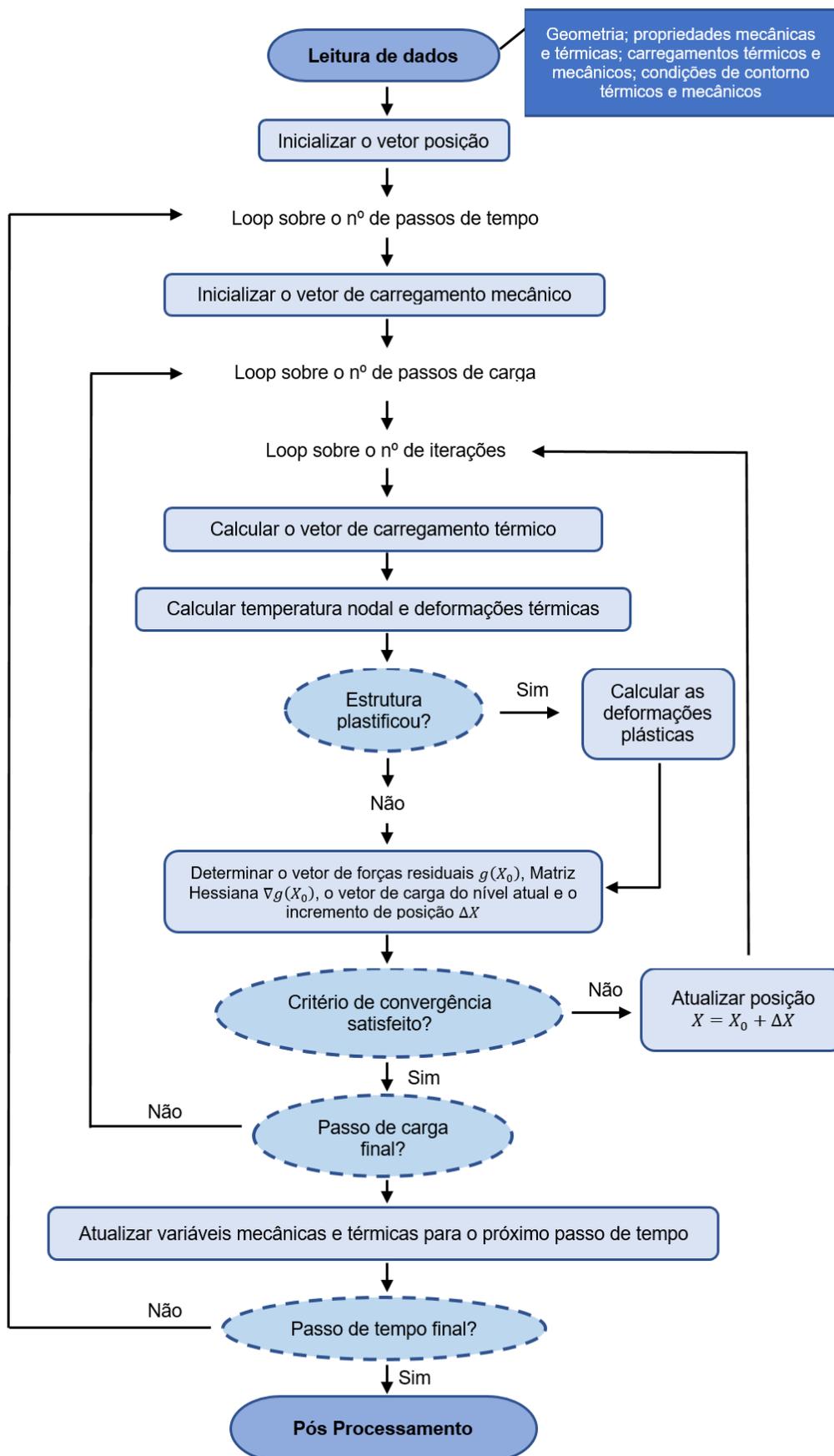
Vale salientar, que quando  $\beta_c = 1$ , o método se apresenta bastante semelhante ao método das Diferenças Centrais. Já para  $\beta_c = 28/27$ , o método apresenta máxima dissipação numérica (CHUNG & LEE, 1994).

#### 5.4 Implementação numérica do problema termoelastoplástico

O Fluxograma apresentado na Figura 5.2 esboça o esquema de resolução de problemas dinâmicos não lineares, físicos e geométricos com acoplamento termomecânico, associando o método de integração temporal ao procedimento iterativo de Newton-Raphson.

O procedimento para considerar os efeitos térmicos na análise da estrutura, apresentado no fluxograma da Figura 5.2, consiste na divisão do problema acoplado em duas partes, sendo uma térmica e outra mecânica.

Figura 5.2 - Fluxograma da discretização temporal associada ao procedimento iterativo



Para ambas partições se mantém constante a fase não analisada, ou seja, a configuração e temperatura do corpo permanecem inalteradas na solução da fase térmica e mecânica, respectivamente. De acordo com Carrazedo (2009), denomina-se esta estratégia de solução como escalonada, cujas equações são resolvidas sequencialmente.

Como já mencionado anteriormente, o problema térmico é solucionado primeiro, portanto, sua solução para o passo atual é dada com base na configuração do sólido do passo anterior. Este acoplamento é denominado de fraco, mas também, devidamente classificado como explícito. Ressalta-se que no estudo de Carrazedo (2009) também se encontram análises termomecânicas com acoplamento forte, ou implícito. No entanto, o próprio autor não recomenda a adoção desta estratégia de solução, haja vista o maior tempo de análise e diferenças pouco significativas mediante comparação com a solução adotando-se acoplamento fraco.

## 5.5 Impacto de estruturas com anteparo rígido

Neste item será descrita a técnica implementada no código computacional deste trabalho para aplicação em problemas de impacto. O processo aqui apresentado, também adotado por Simo *et al.* (1986), Greco (2004), Marques (2006), Maciel (2008) e Cavalcante (2016) dentre outros, consiste na limitação das posições dos nós que sofrem impacto através da condição de penetração nula, como expressado pela Eq. (5.97).

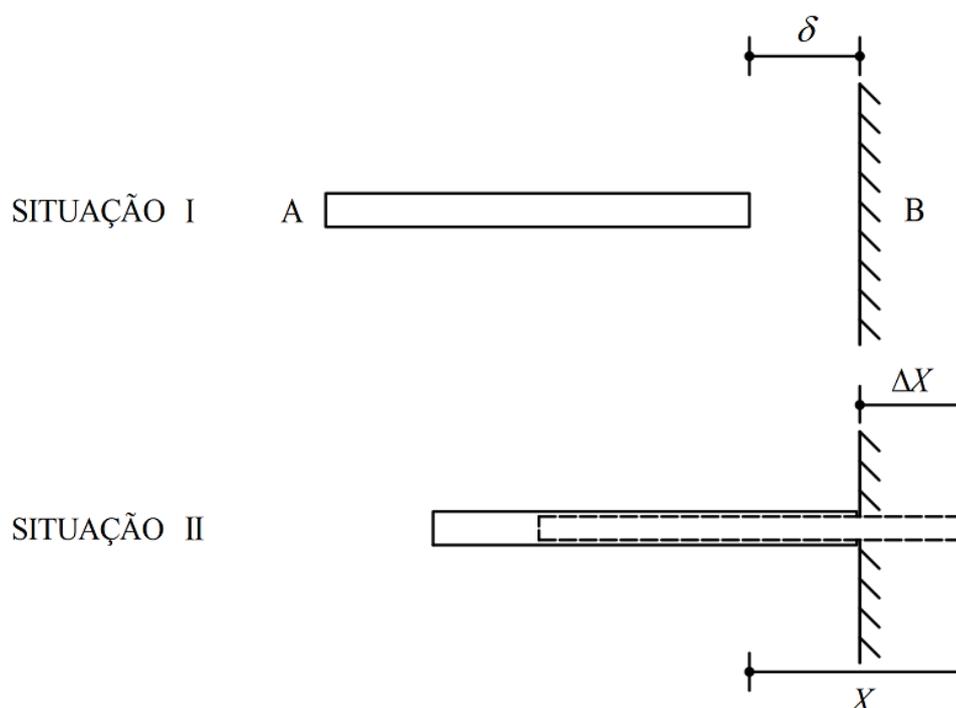
$$X - \delta \geq 0 \quad (5.97)$$

Conforme ilustrado pela Figura 5.3,  $\delta$  é a mínima distância entre o corpo e o anteparo rígido. Observa-se ainda desta ilustração, duas situações de configuração da estrutura nos instantes antes e início do impacto, Situação I e II, respectivamente.

Ainda de acordo com a Figura 5.3, referente a Situação II, para que o impacto ocorra e a Eq. (5.97) seja satisfeita, é necessário limitar as posições nodais do corpo, igualando-as com as posições do anteparo rígido, como expressa a Eq.(5.98).

$$X_{Nó} = X_{Anteparo} \quad (5.98)$$

Figura 5.3 – Condição de penetração nula



Nestas situações de impacto, para garantir a força de retorno, necessita-se determinar o vetor de forças internas  $F_{int} \neq 0$ , que por sua vez, contribui diretamente no vetor de resíduos (MACIEL, 2008). Desta forma:

$$g = F_{cont} = F_{ext} - F_{int} \quad (5.99)$$

Vale salientar que neste trabalho desconsidera-se o atrito na formulação de impacto, sendo o leitor referido ao trabalho de Greco (2004) para um estudo contemplativo de tal consideração.

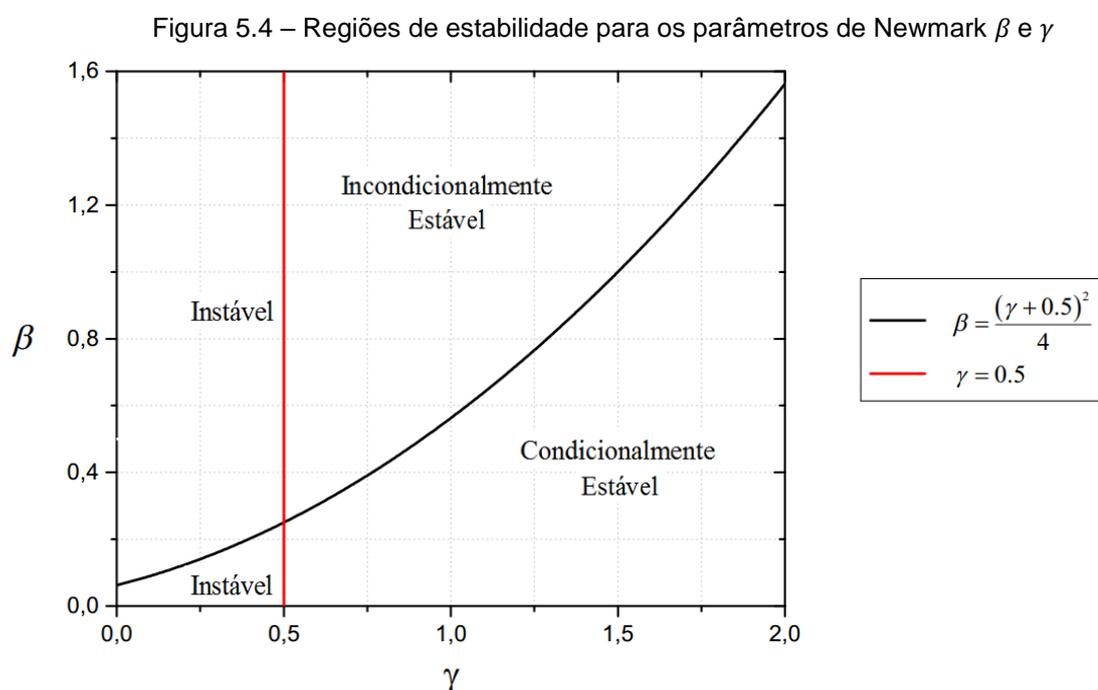
### 5.5.1 Parâmetros de Newmark e regularização da solução de impacto

Como mencionado anteriormente, a família de algoritmos de Newmark apresenta alguns métodos que se diferenciam pela adoção dos valores dos parâmetros  $\beta$  e  $\gamma$ , que por sua vez definem as propriedades desses. Em problemas simples, nos quais o impacto não é considerado, geralmente adota-se o Método da Aceleração Média (ou da Regra Trapezoidal), por se tratar de um método bastante eficiente na obtenção da resposta dinâmica estrutural (MARQUES, 2006).

O método supracitado se apresenta ineficiente para aplicação em problemas de impacto, nos quais comumente são verificadas altas frequências (CARPENTER *et al*, 1991; TAYLOR & PAPADOPOULOS, 1993; SOLBERG & PAPADOPOULOS, 1998).

De acordo com Greco (2004), Marques (2006) e Maciel (2008), uma possível solução para corrigir a instabilidade numérica que ocorre em problemas de impacto é apresentada por Hu (1997). Neste estudo, propõe-se um algoritmo que se enquadra na Família de Newmark, tendo como base hipóteses relacionadas com as acelerações que se desenvolvem na região do contato no processo do impacto (MARQUES, 2006). Conforme determinado em Greco (2004) o algoritmo corresponde ao clássico, adotando-se  $\beta = 1,0$  e  $\gamma = 1,5$ .

As regiões de estabilidade dos integradores temporais da família de Newmark em função dos parâmetros  $\beta$  e  $\gamma$  são apresentadas na Figura 5.4, em que se observa a adequabilidade do algoritmo proposto por Hu (1997) em se tratando de sua estabilidade numérica, visto que seus parâmetros se encontram no limite da região incondicionalmente estável sobre a curva  $\beta$ .



Fonte: Cavalcante (2016)

É importante destacar aqui, que os parâmetros clássicos para o método de Newmark ( $\beta = 0,25$  e  $\gamma = 0,5$ ) equivalem ao ponto referente à interseção da reta  $\gamma$  e da curva  $\beta$ , também gerando um algoritmo estável. Bathe e Chaudhary (1985) apud Greco (2004), propõem  $\beta = 0,5$  e  $\gamma = 0,5$ , também estando na região de estabilidade sobre a curva  $\gamma$ , sendo estes também adotados neste trabalho.

## CAPÍTULO 6

# Cinemática de Reissner para Pórticos Planos

### 6 Cinemática de Reissner

De acordo com Lee *et al.* (2011), teorias de viga não lineares têm sido propostas desde 1970, sendo o trabalho mais significativo feito por Reissner (1972), no qual tratava apenas do problema plano. Ainda de acordo com os autores, uma teoria de vigas tridimensional foi proposta por Simo e Vu Quoc (1986), e depois disso muitos outros implementos para analisar geometricamente estruturas de viga não linear foram realizados.

No que diz respeito à Cinemática de Reissner, proposta por Reissner (1972), sua principal diferença da teoria clássica de vigas de Euler-Bernoulli, é a consideração dos efeitos de cisalhamento, sendo esta cinemática amplamente aplicada à problemas estruturais desde a sua introdução no estudo da resistência dos materiais.

É importante enfatizar que a cinemática de Reissner leva em consideração as deformações provocadas pelas tensões de cisalhamento, significando que a seção pode não permanecer perpendicular à linha média da peça, mesmo que a mesma permaneça reta. Consideração esta não feita na teoria de Euler Bernoulli para vigas (MACIEL, 2008).

Uma simples busca em bancos de dados acadêmicos fornece uma gama de trabalhos, nos quais considera-se os efeitos de cisalhamento na formulação, seja ela dinâmica ou estática. Citando alguns exemplos, Coda e Greco (2004) analisaram estruturas unidimensionais através do MEF posicional para avaliar pequenas e grandes deformações. Em Maciel *et al.* (2004) e Maciel e Coda (2005) também é possível ver a formulação posicional combinada com a cinemática de Reissner.

Coda e Paccola (2008) e Pascon (2008) aplicaram a formulação posicional para a análise geométrica não linear de cascas. Já em Coda (2009) também se emprega o MEF posicional, mas para analisar pórticos não homogêneos tridimensionais não

lineares geométricos, adotando elementos de sólidos. Todos trabalhos adotando a cinemática de Reissner.

Em Maciel (2008), é realizada uma análise não linear geométrica dinâmica de pórticos e sólidos tridimensionais, no qual a cinemática de Reissner foi a adotada na análise dos pórticos planos. Também é possível ver neste trabalho análise estática de estruturas de pórtico plano. Ramos *et al.* (2009) realizou um estudo para aprimorar a formulação do método dos elementos finitos para barra geral laminada tridimensional de seção qualquer através da consideração da cinemática de empenamento, seguindo a cinemática de Reissner-Timoshenko generalizada.

No estudo desenvolvido por Morini (2009), foram avaliados os chamados *risers*, que são estruturas cilíndricas e esbeltas utilizadas na indústria *offshore* para transportar produtos desde o fundo do mar até a plataforma. Foi investigado o comportamento estrutural estático via MEF posicional. As mesmas estruturas também foram investigadas em Sánchez e Coda (2011), também adotando a cinemática de Reissner e o MEF posicional, no entanto, o objetivo era obter a resposta dinâmica não-linear de *risers* em 2D utilizando elementos de viga.

Em Lee *et al.* (2011), a cinemática de Reissner foi adotada para uma análise tridimensional de vigas esbeltas. Rigobello *et al.* (2011) avaliou o comportamento de estruturas de pórtico em aço para situações de incêndio através do MEF posicional e cinemática de Reissner considerando suas não linearidades físicas e geométricas.

Pascon (2012) também considerou os efeitos cisalhantes na formulação, apresentando um estudo sobre modelos constitutivos não lineares para materiais com gradação funcional exibindo grandes deformações, adotando, para tanto, elementos de sólidos. E Rigobello *et al.* (2014), trata de estruturas de aço sob altas temperaturas via MEF posicional e cinemática de Reissner.

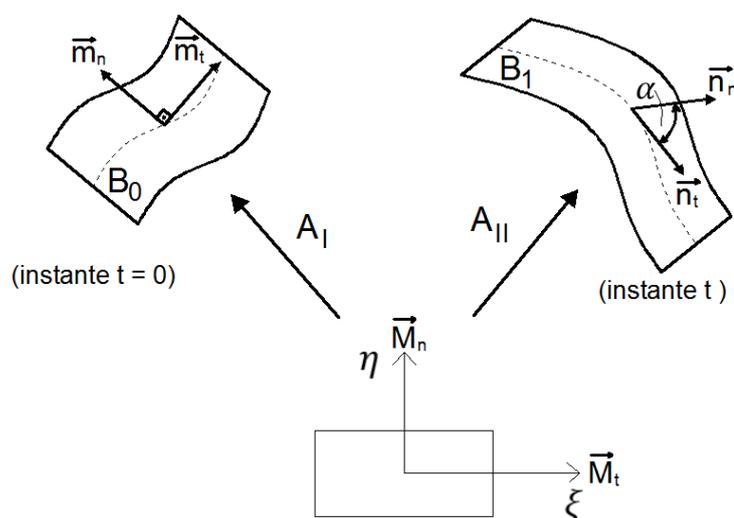
Ressalta-se que foram apenas citados aqui, alguns exemplos de estudos recentes desenvolvidos em que os efeitos de cisalhamento são considerados. Segue nos próximos itens conceitos e descrição da formulação adotando a cinemática de Reissner, baseados nos trabalhos de Coda e Greco (2004), Maciel *et al.*, (2004), Maciel e Coda (2005), Maciel (2008), Pascon (2008) e Morini (2009).

## 6.1 Mapeamento da geometria

Para ser possível equacionar o equilíbrio de forças na posição atual, é preciso descrever o movimento ocorrido entre as configurações inicial e atual. Para tanto é necessário mapear a geometria do corpo e a partir disto, determinar as medidas de deformação empregadas na formulação (MACIEL, 2008).

Como dito anteriormente, um corpo na configuração inicial de referência ( $B_0$ ) possui descrição lagrangiana total. Agora, suponha que este, abandona sua posição e forma original, e assume uma nova configuração  $B_1$ , no qual o espaço adimensional faz a ligação entre estas, como ilustra a Figura 6.1.

Figura 6.1 – Esquema de deformação de um corpo bidimensional



Fonte: Adaptado de Maciel (2008)

As incógnitas  $A_I$  e  $A_{II}$  presentes na Figura 6.1, representam os tensores gradiente de mudança de configuração auxiliar da configuração adimensional para a de referência e atual, respectivamente, e servem para analisar a mudança de forma de um corpo.

Segundo Holzapfel (2000), a hipótese mais importante para a cinemática das estruturas é admitir que o corpo é um meio contínuo, ou seja, não se considera o fato de todo material ser constituído de moléculas e átomos. Desta forma, para o corpo, sua massa, posição e volume são expressas por funções contínuas.

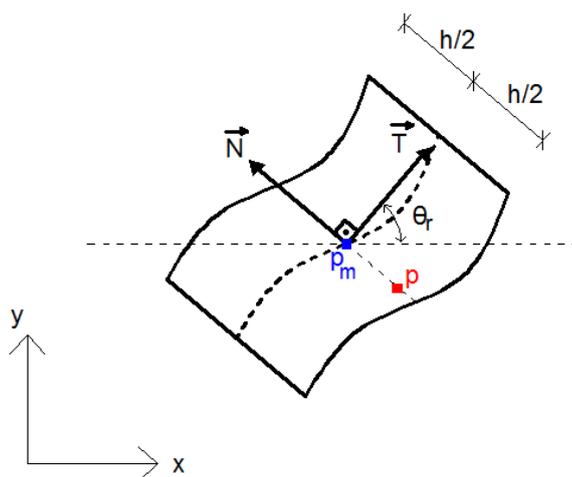
A grandeza posição é um campo vetorial que associa pontos materiais às suas respectivas posições ou coordenadas no espaço (Holzapfel, 2004). Sendo assim referente a seção transversal, admita um ponto genérico do corpo  $p(x, y)$ , indicado na Figura 6.2, que por sua vez pode ser escrito em função das coordenadas adimensionais  $(\xi, \eta)$  e posições nodais (iniciais ou atuais), na forma:

$$p^0(\xi, \eta) = p_m^0(\xi) + \frac{h}{2}\eta\vec{N}^0(\xi) \quad (6.1)$$

$$p^1(\xi, \eta) = p_m^1(\xi) + \frac{h}{2}\eta\vec{N}^1(\xi) \quad (6.2)$$

Onde:  $p_m^i = (x_m^i, y_m^i)$  é um ponto pertencente à linha média;  $h$  é a altura do elemento;  $\vec{N}^i$  é um vetor unitário que define a posição da seção transversal; e o índice “ $i$ ” representa a configuração inicial e atual (Figura 6.1).

Figura 6.2 – Esquema da seção transversal do elemento



Fonte: Adaptado de Maciel (2008)

Pode-se observar na Figura 6.2 que os vetores unitários  $\vec{N}$  e  $\vec{T}$  não dependem da posição do corpo, isto é, quer seja a configuração inicial ou final, e, portanto, podem ser escritos em função do ângulo global da seção transversal genérica  $\theta_r$ , como segue:

$$\vec{T} = [\cos \theta_r, \sin \theta_r] \quad (6.3)$$

$$\vec{N} = [-\sin \theta_r, \cos \theta_r] \quad (6.4)$$

Condensando as Eq. (6.1) e (6.2) e substituindo a Eq. (6.4), tem-se, reescrevendo em termos das coordenadas cartesianas:

$$\left(x^i(\xi, \eta), y^i(\xi, \eta)\right) = \left(x_m^i(\xi), y_m^i(\xi)\right) + \frac{h}{2}\eta[-\text{sen}\theta_r^i(\xi), \cos\theta_r^i(\xi)] \quad (6.5)$$

Sendo, da Eq. (6.5):

$$x^i(\xi, \eta) = x_m^i(\xi) - \frac{h}{2}\eta\text{sen}\theta_r^i(\xi) \quad (6.6)$$

$$y^i(\xi, \eta) = y_m^i(\xi) + \frac{h}{2}\eta\cos\theta_r^i(\xi) \quad (6.7)$$

Onde:  $i = 0$  ou  $i = 1$  para a configuração inicial e final, respectivamente.

Relativo aos tensores gradientes,  $A_I$  depende apenas da forma inicial e cinemática adotada, enquanto que  $A_{II}$  varia de acordo com a posição atual ou final do corpo (MACIEL, 2008). Sendo estes definidos a partir das derivadas das Eq. (6.6) e (6.7), como segue:

$$A_i = \begin{bmatrix} A_{11}^i & A_{12}^i \\ A_{21}^i & A_{22}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dx^i}{d\xi} & \frac{dx^i}{d\eta} \\ \frac{dy^i}{d\xi} & \frac{dy^i}{d\eta} \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

De forma que o índice  $i$  denota I e II para o tensor gradiente da mudança do espaço adimensional para a configuração de referência  $B_0$  e  $B_1$ , respectivamente. Sendo os elementos da matriz  $A_i$ , dados por:

$$A_{11}^i = \frac{dx_m}{d\xi} - \frac{h}{2}\eta\frac{d\theta_r}{d\xi}\cos\theta_r \quad (6.9)$$

$$A_{12}^i = -\frac{h}{2}\eta\text{sen}\theta_r \quad (6.10)$$

$$A_{21}^i = \frac{dy_m}{d\xi} - \frac{h}{2}\eta\frac{d\theta_r}{d\xi}\text{sen}\theta_r \quad (6.11)$$

$$A_{22}^i = \frac{h}{2}\eta\cos\theta_r \quad (6.12)$$

O gradiente acima deve satisfazer a chamada condição de preservação da orientação (COIMBRA, 1981), no qual o determinante da matriz  $A_i$  deve ser positivo, como indicado na Eq. (6.13).

$$J_0 = \det(A_i) > 0 \quad (6.13)$$

Onde:  $J_0$  é o campo escalar denominado de Jacobiano.

De acordo com Pascon (2008), o Jacobiano também representa a relação entre volumes infinitesimais:

$$J_0 = \frac{dv}{dV_0} \quad (6.14)$$

Onde:  $dV_0$  é o volume infinitesimal, referente a posição inicial, que se transforma, devido à mudança de configuração no volume infinitesimal  $dv$ , referente a posição atual.

De acordo com Ogden (1984), a interpretação física da Eq. (6.14) diz respeito à impossibilidade de o material ser aniquilado ( $dv = 0$ ), ou sofrer inversão ( $dv < 0$ ).

## 6.2 Medida de deformação

Segundo Ogden (1984), a quantificação e análise da mudança de configuração de um sólido submetido a um carregamento qualquer, requer que a medida de deformação adotada seja objetiva, isto é, deve além de fornecer valores nulos para o movimento de corpo rígido, apresentar os mesmos valores quando medidos a partir de diferentes referenciais.

Dentre as várias medidas de deformação existentes, a de engenharia, adotada neste trabalho, se apresenta como bastante útil, visto que possui aparente significado físico (PASCON, 2008). A partir das definições e expressões dos tensores gradiente obtidos no item anterior, é possível calcular os alongamentos ao longo das direções de referência adimensionais  $\xi$  e  $\eta$ , dados por:

$$\lambda_t^i = \lambda(\vec{M}_t) = \left| A^i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right| = \sqrt{(A_{11}^i)^2 + (A_{21}^i)^2} \quad (6.15)$$

$$\lambda_n^i = \lambda(\vec{M}_n) = \left| A^i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right| = 1 \quad (6.16)$$

Onde:  $\vec{M}_t$  e  $\vec{M}_n$  definem os vetores unitários referentes às coordenadas adimensionais  $\xi$  e  $\eta$ , respectivamente, dados pela Eq. (6.17) e (6.18), conforme indicado na Figura 6.1.

$$\vec{M}_t = [1,0]^T \quad (6.17)$$

$$\vec{M}_n = [0,1]^T \quad (6.18)$$

O ângulo  $\alpha$ , indicado na Figura 6.1, que define a rotação entre os vetores unitários  $\vec{n}_t$  e  $\vec{n}_n$  após a condição deformada, é dado por:

$$\alpha = \arccos \left\{ \frac{[1 \ 0] [A_{II}^T A_{II}] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{\lambda_t^{II} \lambda_n^{II}} \right\} = \arccos \left\{ \frac{A_{11}^{II} A_{12}^{II} + A_{21}^{II} A_{22}^{II}}{\sqrt{(A_{11}^{II})^2 + (A_{21}^{II})^2}} \right\} \quad (6.19)$$

Desta forma, é possível se obter a distorção relativa à configuração de referência  $B_0$  a partir do ângulo  $\alpha$ , como segue:

$$\gamma_{tn} = \alpha - \frac{\pi}{2} = \arccos \left\{ \frac{A_{11}^{II} A_{12}^{II} + A_{21}^{II} A_{22}^{II}}{\sqrt{(A_{11}^{II})^2 + (A_{21}^{II})^2}} \right\} - \frac{\pi}{2} \quad (6.20)$$

Os alongamentos relativos também obtidos em relação à configuração de referência  $B_0$ , são dados por:

$$\lambda_t = \frac{\lambda_t^{II}}{\lambda_t^I} = \frac{\sqrt{(A_{11}^{II})^2 + (A_{21}^{II})^2}}{\sqrt{(A_{11}^I)^2 + (A_{21}^I)^2}} \quad (6.21)$$

$$\lambda_n = \frac{\lambda_n^{II}}{\lambda_n^I} = 1 \quad (6.22)$$

Por fim, as deformações não lineares de engenharia relativas à configuração de referência, respectivas às direções  $\vec{T}$  e  $\vec{N}$ , são dadas por:

$$\varepsilon_t = \lambda_t - 1 = \frac{\sqrt{(A_{11}^{II})^2 + (A_{21}^{II})^2}}{\sqrt{(A_{11}^I)^2 + (A_{21}^I)^2}} - 1 \quad (6.23)$$

$$\varepsilon_n = \lambda_n - 1 \quad (6.24)$$

Ressalta-se que para esta formulação não existe o efeito de Poisson, ou seja, a segunda e terceira direções são consideradas indeformáveis, logo:

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 0 \quad (6.25)$$

### 6.3 Energia potencial total

De acordo com a Eq. (5.1) o funcional de energia potencial total para o problema dinâmico é dado pela soma do potencial de energia de deformação elástica ( $U_e$ ), potencial de energia das forças externas ( $P$ ), energia cinética do corpo ( $K_c$ ) e à perda de energia devido ao amortecimento ( $K_a$ ). E como mostrado anteriormente,  $U_e$  é dado pela integral ao longo do volume da energia específica de deformação elástica:

$$U_e = \int_{V_0} u_e dV_0 \quad (6.26)$$

De acordo com a Lei de Hooke, a energia específica de deformação elástica para uma lei constitutiva linear que contempla os sólidos elastoplásticos e problemas térmicos é dado pela Eq. (6.27).

$$u_e = \int \sigma d\varepsilon = \frac{1}{2} E \left( \varepsilon_t^2 + \frac{\gamma_{tn}^2}{2} \right) - E \varepsilon_t \varepsilon^p - E \varepsilon_t \varepsilon^\theta \quad (6.27)$$

Onde:  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal;  $\varepsilon^\theta$  é a deformação devido a temperatura e descreve o comportamento térmico; e  $\varepsilon^p$  é a deformação plástica que descreve o comportamento plástico do elemento.

Logo:

$$U_e = \int_{V_0} \left[ \frac{1}{2} E \left( \varepsilon_t^2 + \frac{\gamma_{tn}^2}{2} \right) - E \varepsilon_t \varepsilon^p - E \varepsilon_t \varepsilon^\theta \right] dV_0 \quad (6.28)$$

Observa-se que na Eq. (6.28), existe, além das parcelas que definem um comportamento termoplástico, também a consideração do cisalhamento através do termo referente à distorção  $\gamma_{tn}$ . Desta forma, substituindo a Eq. (6.28) na Eq. (5.1), tem-se o funcional de energia potencial total para problemas termoelastoplásticos adotando a cinemática de Reissner para o pórtico bidimensional, dado por:

$$\Pi = \int_{V_0} \left[ \frac{1}{2} E \left( \varepsilon_t^2 + \frac{\gamma_{tn}^2}{2} \right) - E \varepsilon_t \varepsilon^p - E \varepsilon_t \varepsilon^\theta \right] dV_0 + \int_{V_0} \rho_0 \frac{\dot{x}_i \dot{x}_i}{2} dV_0 - F_i x_i + K_a \quad (6.29)$$

Segue no próximo item, o equacionamento para o problema dinâmico e estratégia de minimização desse funcional.

#### 6.4 Equacionamento dinâmico

A solução via método dos elementos finitos, seja o convencional ou o posicional, requer a discretização do corpo em elementos conectados por nós, como comentado anteriormente. Desta forma, segue o exemplo de um elemento de pórtico plano com 'n' nós ilustrado na Figura 6.3, no qual as variáveis referentes a linha média do elemento podem ser aproximadas pelas funções de forma, dados nas Eq. (6.30), a (6.32).

$$x_m(\xi, \eta) = \phi_i X_i \quad (6.30)$$

$$y_m(\xi, \eta) = \phi_i Y_i \quad (6.31)$$

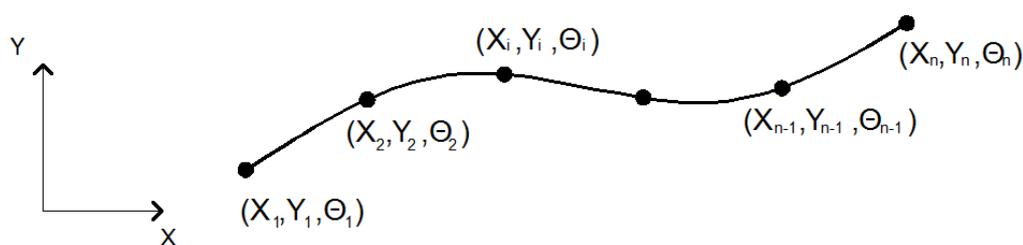
$$\theta_r(\xi, \eta) = \phi_i \Theta_i \quad (6.32)$$

Onde:  $X$ ,  $Y$  e  $\Theta$  são as variáveis nodais do elemento, como indica a Figura 6.3; e o vetor  $\phi$  é o conjunto de funções de forma ou aproximadoras da família de polinômios de Lagrange (ASSAN, 1999), como determinado no APÊNDICE A.

Vale salientar aqui, que este estudo adota uma aproximação polinomial genérica para as funções de forma, ou seja, o grau de aproximação polinomial para tais, pode ser qualquer, seja linear, quadrática, cúbica, etc. Com isso, é possível realizar um estudo de convergência apenas variando o número de nós por elemento.

Enfatiza-se que o elemento apresentado na Figura 6.3, de 'n' nós, apresenta aproximação 'n - 1', e que a rotação nodal,  $\theta_r$ , é aproximada de forma independente, como as demais variáveis do problema, diferentemente da teoria clássica de vigas Euler-Bernoulli, em que a rotação é dada pela derivada de primeira ordem do deslocamento transversal da viga ou pórtico.

Figura 6.3 – Esquema de elemento de pórtico plano com 'n' nós



Fonte: Adaptado de Maciel (2008)

Fazendo a substituição das aproximações expressadas nas Eq. (6.30) a (6.32), nas Eq. (6.6) e (6.7), tem-se:

$$x^i = (\phi_k X_k)^i - \frac{h}{2} \eta \text{sen}(\phi_k \Theta_k)^i \quad (6.33)$$

$$y^i = (\phi_k Y_k)^i + \frac{h}{2} \eta \text{cos}(\phi_k \Theta_k)^i \quad (6.34)$$

Da mesma forma, faz-se a substituições das Eq. (6.30) a (6.32) nas Eq. (6.9) e (6.12), no qual  $\beta_j = \frac{d\phi_j}{d\xi}$ , resultando em:

$$A_{11}^i = \beta_j X_j^i - \frac{h}{2} \eta (\beta_j \Theta_j^i) \text{cos}(\phi_k \Theta_k)^i \quad (6.35)$$

$$A_{12}^i = -\frac{h}{2} \eta \text{sen}(\phi_k \Theta_k)^i \quad (6.36)$$

$$A_{21}^i = \beta_j Y_j^i - \frac{h}{2} \eta (\beta_j \Theta_j^i) \text{sen}(\phi_k \Theta_k)^i \quad (6.37)$$

$$A_{22}^i = \frac{h}{2} \eta \text{cos}(\phi_k \Theta_k)^i \quad (6.38)$$

A partir deste ponto, assume-se que o vetor posição do elemento será chamado de  $\mathbf{p}$ , e de forma geral pode ser dado por:

$$\begin{aligned}\mathbf{p} &= (X_1, Y_1, \Theta_1, \dots, X_i, Y_i, \Theta_i, \dots, X_n, Y_n, \Theta_n) \\ &= (p_1, p_2, p_3, \dots, p_{3i-2}, p_{3i-1}, p_{3i}, \dots, p_{3n-2}, p_{3n-1}, p_{3n})\end{aligned}\quad (6.39)$$

Onde:  $n$  é o número de nós por elemento e consequentemente o número de graus de liberdade é  $3n$ .

A existência das forças inerciais, acarreta na necessidade de se considerar a velocidade e aceleração do ponto material. Sendo o ponto genérico pertencente à linha média do elemento, como indicado na Figura 6.2, a velocidade e aceleração são dados por:

$$\dot{\mathbf{p}}_m^i = (\dot{x}_m^i, \dot{y}_m^i) \quad (6.40)$$

$$\ddot{\mathbf{p}}_m^i = (\ddot{x}_m^i, \ddot{y}_m^i) \quad (6.41)$$

É possível aproximar as velocidade e aceleração ao longo do tempo como segue:

$$\dot{x}_m(\xi, \eta, t) = \phi_i \dot{X}_i \quad (6.42)$$

$$\dot{y}_m(\xi, \eta, t) = \phi_i \dot{Y}_i \quad (6.43)$$

$$\dot{\theta}_r(\xi, \eta, t) = \phi_i \dot{\Theta}_i \quad (6.44)$$

$$\ddot{x}_m(\xi, \eta, t) = \phi_i \ddot{X}_i \quad (6.45)$$

$$\ddot{y}_m(\xi, \eta, t) = \phi_i \ddot{Y}_i \quad (6.46)$$

$$\ddot{\theta}_r(\xi, \eta, t) = \phi_i \ddot{\Theta}_i \quad (6.47)$$

Desta forma, o vetor velocidade e aceleração do elemento é dado de forma geral por:

$$\dot{\mathbf{p}}_i = (\dot{X}_1, \dot{Y}_1, \dot{\Theta}_1, \dots, \dot{X}_i, \dot{Y}_i, \dot{\Theta}_i, \dots, \dot{X}_n, \dot{Y}_n, \dot{\Theta}_n) \quad (6.48)$$

$$\ddot{\mathbf{p}}_i = (\ddot{X}_1, \ddot{Y}_1, \ddot{\Theta}_1, \dots, \ddot{X}_i, \ddot{Y}_i, \ddot{\Theta}_i, \dots, \ddot{X}_n, \ddot{Y}_n, \ddot{\Theta}_n) \quad (6.49)$$

No qual, podem ser escritas de forma compacta como nas Eq. (6.50) e (6.51).

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \phi_k \dot{p}_i^k \quad (6.50)$$

$$\ddot{\mathbf{p}}_i = \phi_k \ddot{p}_i^k \quad (6.51)$$

Onde:  $i = 1,2,3$  , definem os graus de liberdade de um nó genérico de pórtico plano.

O termo referente a energia cinética do funcional de energia potencial total pode ser expressado em função dos valores nodais, como segue:

$$K_c = \int_{V_0} \frac{\rho_0}{2} \dot{\mathbf{p}} \dot{\mathbf{p}} dV_0 \quad (6.52)$$

$$K_{jk} = \int_{V_0} \frac{\rho_0}{2} \phi_j \dot{p}_i^j \phi_k \dot{p}_i^k dV_0 \quad (6.53)$$

Sendo assim, o funcional de energia potencial total após devida substituição da energia cinética (Eq. (6.53)) na Eq. (6.29), é dado por:

$$\Pi = \int_{V_0} \left[ \frac{1}{2} E \left( \varepsilon_t^2 + \frac{\gamma_{tn}^2}{2} \right) - E \varepsilon_t \varepsilon^p - E \varepsilon_t \varepsilon^\theta \right] dV_0 + \int_{V_0} \frac{\rho_0}{2} \phi_j \dot{p}_i^j \phi_k \dot{p}_i^k dV_0 - F_i x_i + K_a \quad (6.54)$$

De forma estratégica, minimiza-se o funcional de energia da Eq. (6.54) em relação às posições nodais, com o objetivo de encontrar a posição de equilíbrio da estrutura. Logo, a condição de estacionariedade potencial total no instante  $t + \Delta t$  pode ser indicada pela Eq. (6.55).

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Pi}{\partial p_i} \right|_{t+\Delta t} &= \frac{1}{2} \int_{V_0} E \frac{\partial}{\partial p_i} \left( \varepsilon_t^2 + \frac{\gamma_{tn}^2}{2} - \varepsilon_t \varepsilon^p - \varepsilon_t \varepsilon^\theta \right) dV_0 \Big|_{t+\Delta t} \\ &+ \frac{1}{2} \int_{V_0} \frac{\partial}{\partial p_i} (\rho_0 \dot{\mathbf{p}} \dot{\mathbf{p}}) dV_0 \Big|_{t+\Delta t} + \int_{V_0} c_m \rho_0 \dot{\mathbf{p}} dV_0 - F_i \Big|_{t+\Delta t} = 0 \end{aligned} \quad (6.55)$$

Onde:

$$\frac{\partial K_a}{\partial p_i} = \int_{V_0} \frac{\partial k_a}{\partial p_i} dV_0 = \int_{V_0} c_m \rho_0 \dot{\mathbf{p}} dV_0 \quad (6.56)$$

Condensando de maneira análoga a Eq. (5.12), tem-se a equação de equilíbrio dinâmico em função da matriz de massa e de amortecimento, dado por:

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial p} \right|_{t+\Delta t} = \left. \frac{\partial U_e}{\partial p} \right|_{t+\Delta t} + M\ddot{X}_{t+\Delta t} + C\dot{X}_{t+\Delta t} - F_{t+\Delta t} = 0 \quad (6.57)$$

Onde:

$$M_{jk} = \frac{A}{h} \int_{S_0} \rho_0 \phi_j \phi_k dS_0 \quad (6.58)$$

Percebe-se da Eq. (6.58) que a altura ( $h$ ) e área ( $A$ ) do elemento finito são tomados como constantes, e a matriz de massa é obtida através da integral de linha ao longo do eixo médio do elemento na configuração de referência, não mais pelo volume inicial.

Outro ponto importante a se observar é a diferença fundamental entre a descrição da cinemática de Reissner e a de Timoshenko, que basicamente consiste na correção das aproximações adotadas na cinemática de Euler-Bernoulli considerando os efeitos do cisalhamento ao introduzir a distorção.

Vale salientar ainda, que o código computacional deste estudo, não considera as grandezas de velocidade e aceleração angulares (Eq. (6.44) e (6.47), respectivamente), fazendo com que a matriz de massa do problema não apresente efeitos de inércia rotacional.

## CAPÍTULO 7

# Aplicações numéricas

### 7 Análises numéricas

Este capítulo tem por finalidade apresentar exemplos numéricos nos quais emprega-se a formulação posicional de pórticos planos com cinemática de Reissner à problemas dinâmicos não lineares. Serão avaliados exemplos presentes na literatura especializada com o intuito de validar e discutir a formulação empregada neste trabalho.

Há uma preocupação em variar o grau de aproximação das funções de forma, com o intuito de comparar com os resultados presentes na literatura em que uma resposta satisfatória foi obtida com um número elevado de elementos finitos (EF).

Para análise do desempenho dos métodos de integração temporal foram abordados exemplos nos quais apresentam-se grandes rotações, e quando não mencionado o contrário, admitem-se os seguintes parâmetros para os exemplos deste capítulo:

$$\beta = 0,25 \quad \theta_w = 1,420815$$

$$\gamma = 0,5 \quad \beta_c = 1,03$$

Quando se tratar de problemas de impacto, reafirma-se que para o método de Newmark adota-se  $\gamma = 1,5$  e  $\beta = 1,0$ , como recomendado por Hu (1997), como também, a desconsideração do atrito na formulação apresentada no código computacional deste estudo.

Concernente aos problemas térmicos, admite-se que para um corpo, existe um estado inicial no qual ele está submetido a uma determinada temperatura positiva e invariável ao longo do tempo, em que não se constata tensões, nem deformações (DUHAMEL, 1837). Esta temperatura inicial, será definida aqui como de referência.

De acordo com Carrazedo (2009), geralmente adota-se em problemas de engenharia o método de Crank-Nicolson para aproximar a taxa de temperatura de forma constante e igual a média entre  $t$  e  $t + \Delta t$ . Vila Real (1988) afirma que quanto maior for o valor de  $\bar{\alpha}$  menores serão as oscilações na determinação da temperatura, porém os resultados tendem a ser superestimados. Portanto, quando se tratar de um problema térmico ou termomecânico, adota-se o parâmetro alfa de integração temporal igual a 0,5, inerente ao método supracitado.

Quando não comentado, as análises considerando os efeitos térmicos possuem acoplamento termomecânico, ou seja, há a reciprocidade dos efeitos térmicos e mecânicos. De forma que, nas análises puramente térmicas as mudanças de corpo não provocam mudanças na temperatura.

Além do mais, como mencionado anteriormente, o problema térmico é solucionado antes do problema mecânico, o que implica na obtenção das fontes de calor baseadas nas taxas de deformação do passo anterior (Vide fluxograma da Figura 5.2).

## 7.1 Barra unidimensional com temperatura restrita

Neste exemplo, também visto em Cavalcante (2016), avalia-se uma barra indeformável unidimensional submetida a uma temperatura constante em seus extremos. Adota-se, para tanto, 600 passos de  $0,0001h$  e o comprimento da barra equivale a  $1m$ .<sup>5</sup>

Os resultados aqui obtidos são confrontados com o estudo de Chen *et al.* (1987), em que se assume por simplicidade os seguintes parâmetros e condições de contorno térmicos:

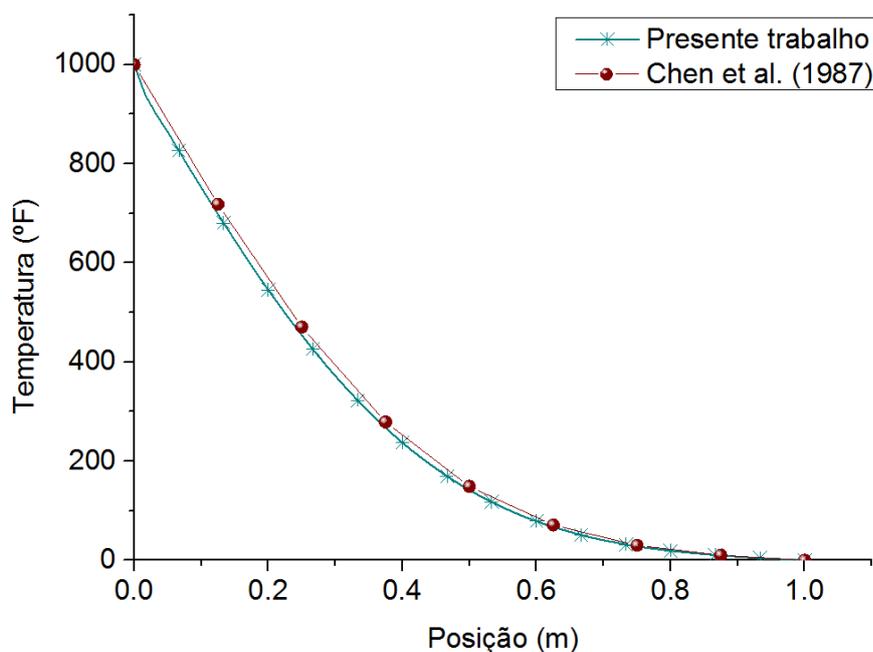
$$\begin{aligned} k &= 1 \text{ BTU}/(h \text{ m } ^\circ F) & \rho c_e &= 1 \text{ BTU}/(m^3 \text{ } ^\circ F) \\ \theta(0, t) &= 1000 \text{ } ^\circ F & \theta(1, t) &= 0 \text{ } ^\circ F \end{aligned}$$

---

<sup>5</sup> Ressalta-se que por fins de comparação adotaram-se as mesmas unidades que a referência para este exemplo numérico.

A Figura 7.1 apresenta os resultados para o instante de  $0,6h$ , e percebe-se que os valores obtidos estão de acordo com o estudo da referência. Salienta-se que a obtenção destes resultados é relativa a uma discretização de 20 elementos finitos com aproximação cúbica, suficientes para apresentar uma resposta satisfatória.

Figura 7.1 – Temperatura ao longo da barra



## 7.2 Barra submetida à um carregamento térmico

Este exemplo, apresentado por Copetti (1999; 2002) e também encontrado em Carrazedo (2009) e Cavalcante (2016), se trata da análise térmica de uma barra unidimensional de comprimento unitário submetida a um carregamento térmico cossenoide expressado na Eq. (7.1).

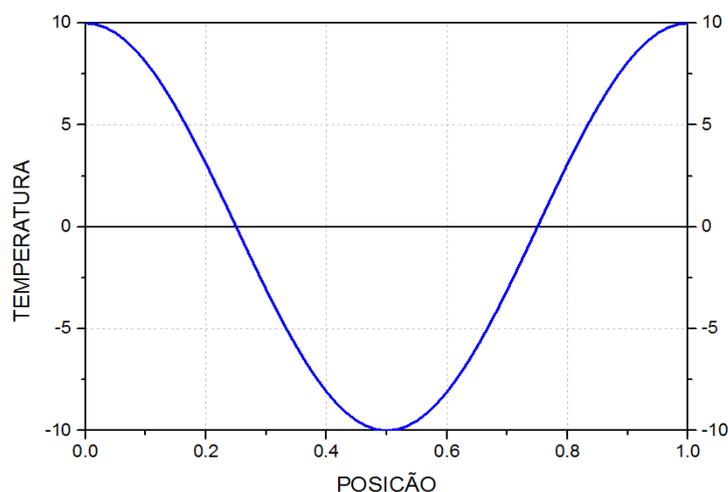
$$p(x) = 10 \cos(2\pi x) \quad (7.1)$$

O carregamento térmico descrito na Eq. (7.1) está esboçado no gráfico da Figura 7.2, definindo a temperatura da barra no instante  $t = 0$ .

A fins de comparação com as respostas obtidas por Carrazedo (2009) e Cavalcante (2016), nos quais os autores dividiram a barra em 100 elementos finitos, adotou-se uma discretização da barra com 20 elementos finitos de aproximação

cúbica. A resposta foi obtida com 40000 passos de tempo de 0,0001 e tolerância de convergência de  $10^{-7}$ .

Figura 7.2 – Carregamento térmico cossenoide



Assim como nas referências, adota-se por simplicidade valores unitários para a massa específica, coeficiente de condução térmica e calor específico. Outra consideração importante feita pelos autores, são as condições de contorno iniciais, expressadas pelas Eq. (7.2) e (7.3).

$$\theta(0, t) = 10 \quad (7.2)$$

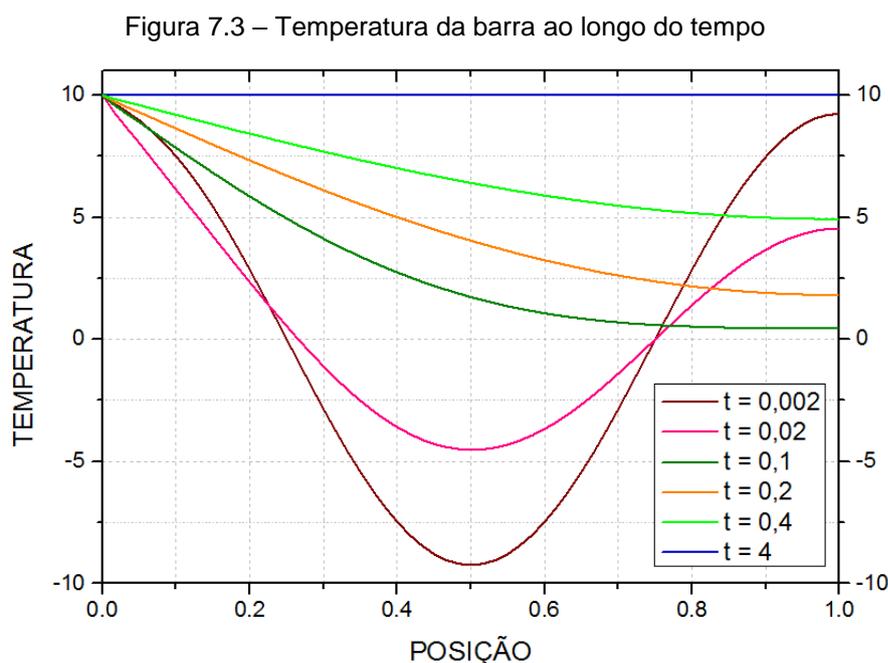
$$u(0, t) = 0 \quad (7.3)$$

O gráfico da Figura 7.3 apresenta a temperatura da barra em alguns instantes de tempo. Os resultados obtidos aqui foram bastantes satisfatórios quando comparados com as referências. Salienta-se que apenas 20 elementos finitos de aproximação cúbica foram capazes de reproduzir uma boa resposta, reduzindo assim o custo computacional.

Assim como os autores, constata-se que a restrição da temperatura na posição  $x = 0$  conduz o corpo a entrar em equilíbrio em determinado instante, mais precisamente em torno de  $t = 4$ , como também, a dissipação do carregamento dentre os nós da barra.

Salienta-se que a adoção de uma discretização temporal menos refinada, ou seja,  $\Delta t$  maior, acarreta em instabilidades numéricas na resposta. Outro ponto a se

ressaltar, diz respeito à desconsideração do termo de acoplamento termomecânico (análise puramente térmica). Mesmo levando em conta o acoplamento termomecânico, ou seja, as taxas de deformação influenciam nas mudanças de temperatura, não existem diferenças perceptíveis, posto a inexistência de um carregamento mecânico.

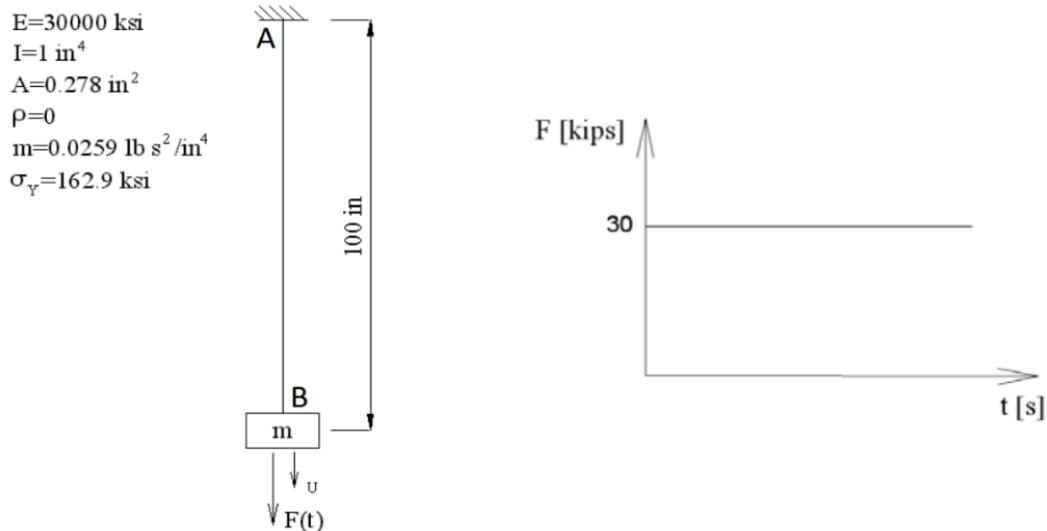


### 7.3 Sistema massa-mola plastificado

Este exemplo tem por objetivo validar a formulação não linear física implementada no código computacional deste trabalho, a partir da análise da resposta dinâmica de uma barra  $\overline{AB}$  com massa desprezível (mola), submetida a um carregamento axial aplicado em uma massa concentrada unida à extremidade livre da barra (ponto  $B$ ), como ilustra a Figura 7.4. Compara-se os resultados aqui obtidos com os encontrados em Greco (2004) e com a resposta analítica apresentada em Biggs (1964).

Assim como em Greco (2004), para a discretização da barra admite-se apenas um elemento finito e a integração temporal faz uso do método de Newmark. A aproximação dos elementos finitos é cúbica, e considera-se 400 passos de tempo de 0,001s com tolerância de convergência de  $10^{-4}$ .

Figura 7.4 - Esquema do sistema massa-mola com dados do problema



Fonte: Adaptado de Greco (2004)

De acordo com Greco (2004), a solução analítica apresentada por Biggs (1964) para este tipo de problema é dado pelas Eq. (7.4) à (7.6), sendo  $t_p = 0.0371s$ ,  $t_{lm} = 0.0298s$  e  $t_{U_{max}} = 0.0669s$ , alusivo a este exemplo específico.

$$U = 0.36(1 - \cos(56.8t)), \quad \text{para } t \leq t_p \quad (7.4)$$

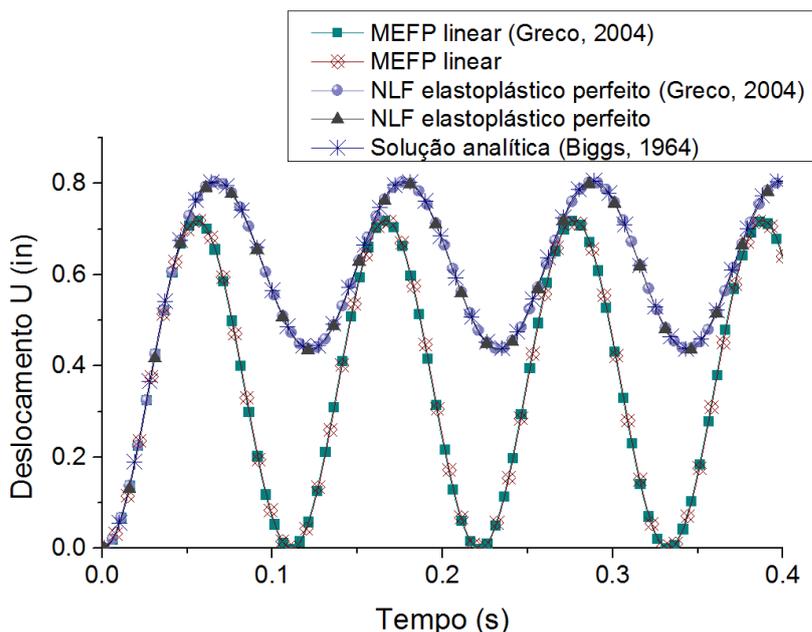
$$U = -295(t - t_p)^2 + 17.6(t - t_p) + 0.543, \quad \text{para } t_p < t \leq t_{U_{max}} \quad (7.5)$$

$$U = 0.622 + 0.184 \cos(56.8(t - t_{lm} - t_p)), \quad \text{para } t > t_{U_{max}} \quad (7.6)$$

A resposta dinâmica do sistema massa-mola submetido ao carregamento  $F(t)$  está ilustrado na Figura 7.5, na qual apresenta-se o deslocamento  $U$  em função do tempo (indicado na Figura 7.4) para a solução linear e não linear física, comparando com os resultados das referências. Vale destacar que, assim como Greco (2004), adotou-se o modelo elastoplástico perfeito.

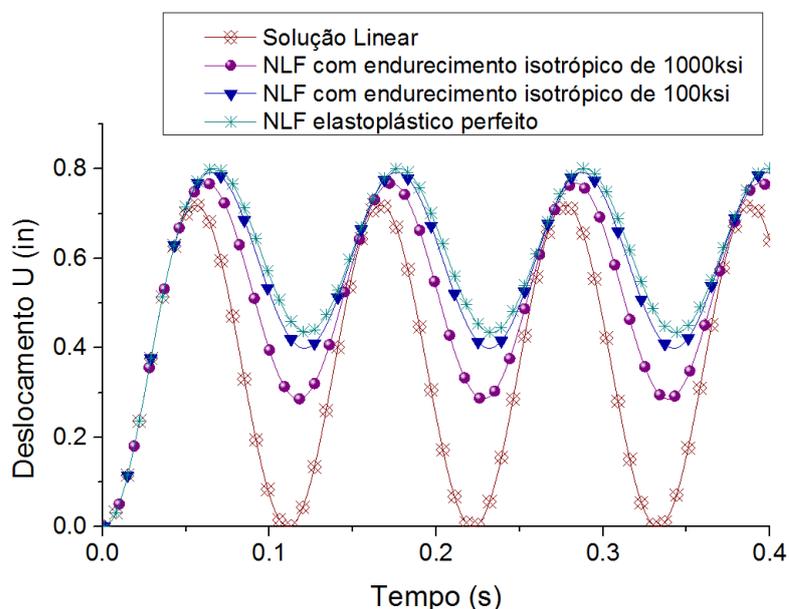
Observa-se da Figura 7.5 que os resultados obtidos aqui se mostraram bastante satisfatórios quando comparado com a solução analítica e a apresentada em Greco (2004). Apenas para avaliar o modelo elastoplástico misto em comparação com o perfeito, a Figura 7.6 apresenta os resultados da variação do deslocamento  $U$  em função do tempo.

Figura 7.5 - Deslocamento do grau de liberdade analisado



Analisando a Figura 7.6, percebe-se a coerência nos resultados do modelo elastoplástico com encruamento misto, posto que a consideração do endurecimento tende a aumentar a resistência com o avanço das deformações.

Figura 7.6 – Deslocamento do grau de liberdade analisado comparando os modelos elastoplásticos



Salienta-se que para a obtenção da resposta dinâmica não linear física adotando o modelo elastoplástico misto, se considerou um endurecimento cinemático de  $72,52ksi$ . Como nota adicional, a resposta estática obtida aqui foi a mesma encontrada por Greco (2004).

## 7.4 Sistema massa-mola com acoplamento termomecânico

Analisa-se agora o sistema massa-mola do exemplo anterior considerando os efeitos térmicos. Para tanto assume-se que a barra não possui massa desprezível, e considera-se os parâmetros térmicos inerentes ao aço, como segue:

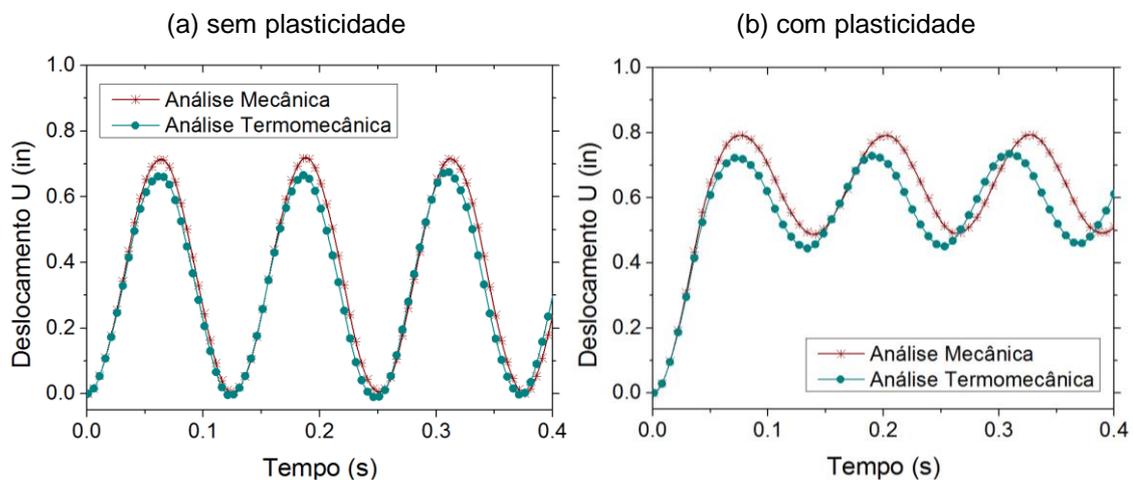
$$k = 0,0117 \text{ kpi}/(^\circ\text{C s}) \quad c_e = 4,185 \text{ kpi in}/(^\circ\text{C kg})$$

$$\alpha_1 = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C} \quad \alpha_2 = 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}$$

$$\rho = 7,339 \cdot 10^{-4} \text{ ksi in}^2 \quad \theta_0 = 27^\circ\text{C}$$

A Figura 7.7 mostra os resultados comparativos das análises mecânica e termomecânica para o deslocamento  $U$  considerando ou não a plasticidade da mola. Percebe-se que nas análises com acoplamento termomecânico, as amplitudes do movimento oscilatório são menores. Isto pode ser explicado pela provável perda de energia mecânica para gerar calor no sistema.

Figura 7.7 – Deslocamento do grau de liberdade analisado considerando os efeitos térmicos



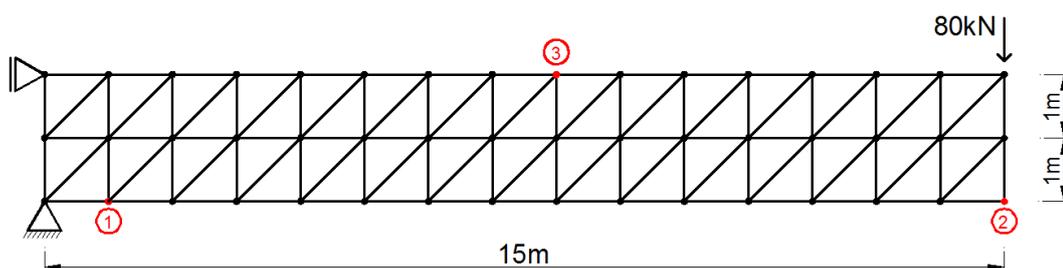
## 7.5 Viga treliçada com acoplamento termomecânico

Para validar a formulação em termos do acoplamento termomecânico, investiga-se aqui o comportamento de uma viga treliçada engastada, presente no estudo de Cavalcante (2016). A viga é composta por 107 barras com seção transversal de  $0,001 \text{ m}^2$ , e está submetida a um carregamento dinâmico aplicado na extremidade

livre, como ilustra a Figura 7.8, na qual é possível observar as condições de contorno e carregamento do problema. Exemplo similar pode ser visto em Carrazedo (2009).

Assim como a referência, considera-se que não há variação de temperatura nos nós restritos. Ressalta-se que o acoplamento nodal, para implementação das rótulas da viga, foi feito de acordo com o estudo de Greco (2004), considerando que o elemento finito tem aproximação linear, desta forma, sendo necessário 214 nós.

Figura 7.8 – Esquema da viga treliçada



Para a solução do problema dinâmico, foi adotado o método de Newmark com 1000 passos de tempo de 0,0001s. Referente às propriedades termoelásticas, foram adotados os parâmetros inerentes ao alumínio, como segue:

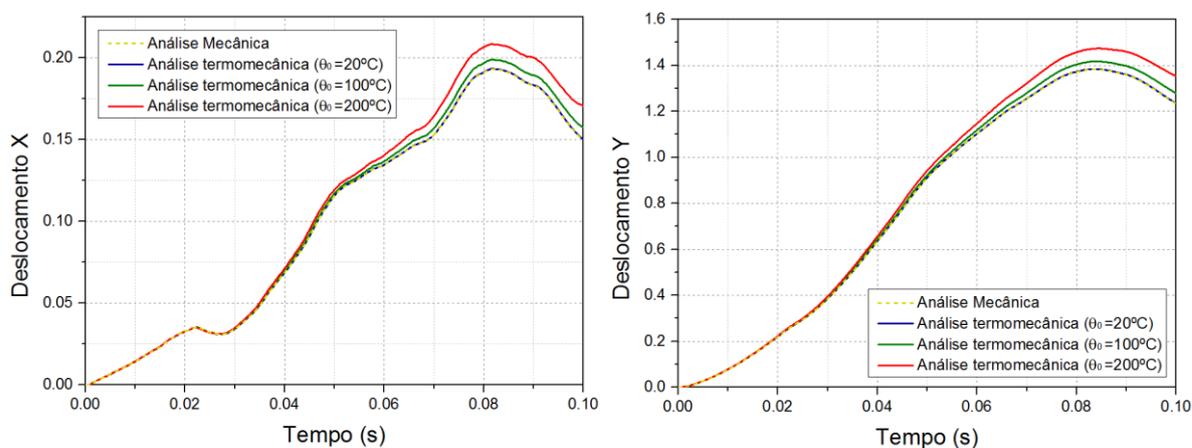
$$E = 68 \text{ GPa} \qquad c_e = 900 \text{ J}/(\text{°C kg})$$

$$\rho = 2700 \text{ kg}/\text{m}^3 \qquad k = 210 \text{ J}/(\text{°C m s})$$

$$\alpha = 2,4 \cdot 10^{-5} \text{ m}/(\text{m °C})$$

Variando-se a temperatura de referência, a Figura 7.9 ilustra o desenvolvimento dos deslocamentos do ponto 2 (indicado na Figura 7.8) ao longo do tempo.

Figura 7.9 – Variação dos deslocamentos do ponto 2

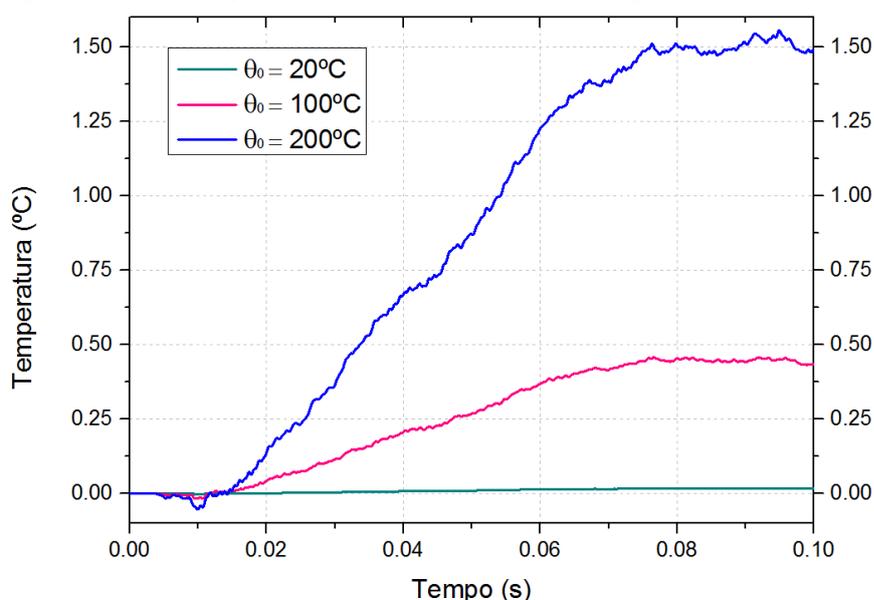


Assim como constatado por Cavalcante (2016), observa-se que o acoplamento termomecânico acarreta em mudanças significativas nas formas de corpo quando a temperatura de referência é elevada, de forma que os resultados para  $\theta_0 = 20^\circ\text{C}$  não diferem dos obtidos para a análise puramente mecânica.

Percebe-se que as diferenças entre a análise considerando os efeitos térmicos e a mecânica estão diretamente ligadas à magnitude da temperatura de referência, bem como, com as características do material, posto que no estudo realizado por Cavalcante (2016), comprovou-se a influência do coeficiente de expansão térmica nos resultados. Como já era esperado, as discrepâncias são mais perceptíveis com o avanço do tempo, enfatizando a importância de se considerar os efeitos térmicos na análise de estruturas, pois dependendo das condições ambientais e material adotado, pode ocorrer redistribuição significativa dos esforços.

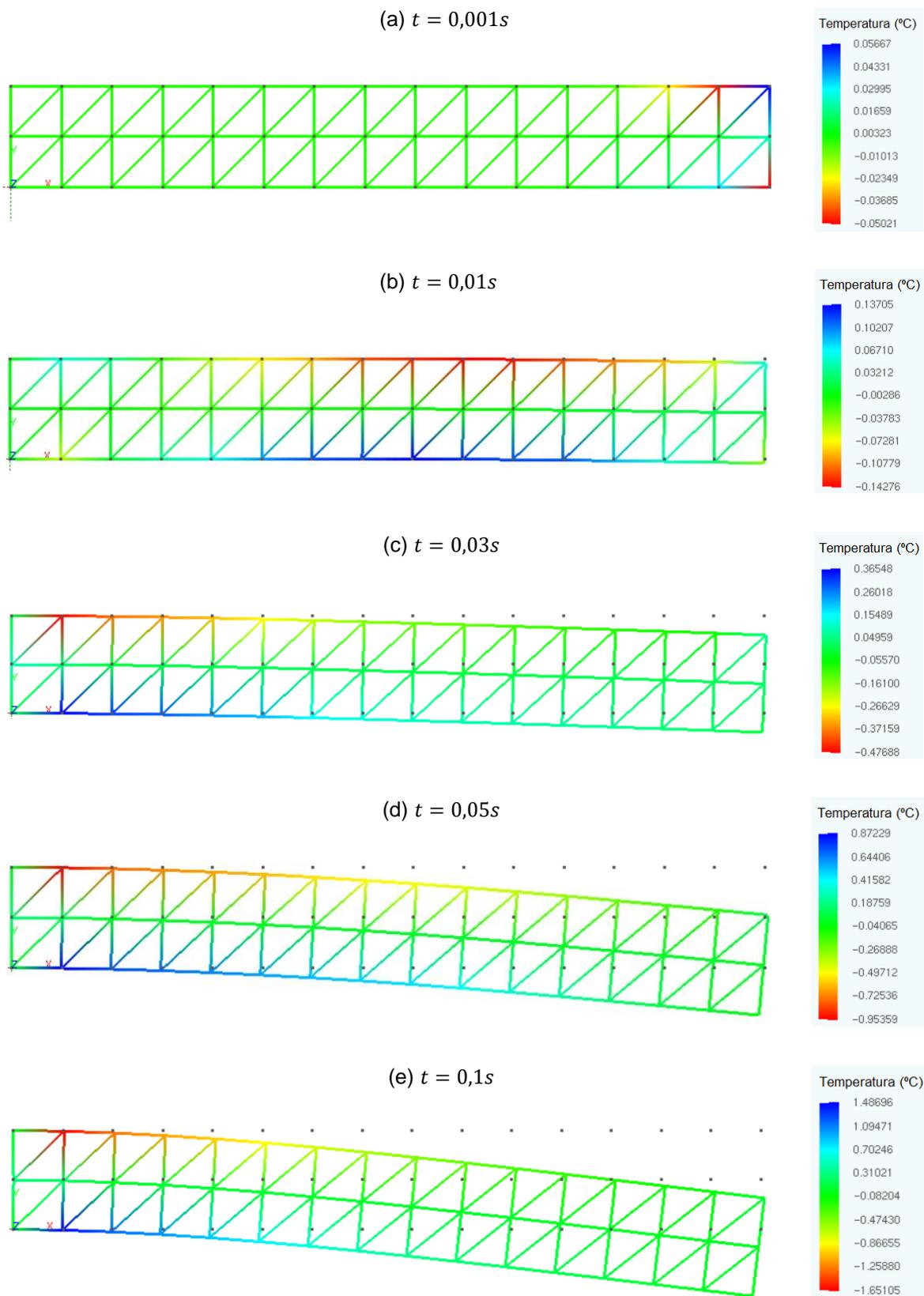
Em se tratando das mudanças de temperatura, a Figura 7.10 apresenta os resultados obtidos para as três situações de temperatura de referência. Condizente com os resultados de Cavalcante (2016), as mudanças de temperatura são mais perceptíveis para temperaturas de referência maiores, sendo pouco significantes para o caso em que  $\theta_0 = 20^\circ\text{C}$ .

Figura 7.10 – Variação da temperatura no ponto 1 segundo a análise termoelástica



Por simplicidade apresenta-se na Figura 7.11 os resultados para  $\theta_0 = 200^\circ\text{C}$ , visto que a distribuição da temperatura é semelhante para as três situações analisadas acima.

Figura 7.11 – Distribuição da temperatura e configuração deformada da viga treliçada segundo a análise termoelástica com  $\theta_0 = 200^\circ\text{C}$



Observa-se que a distribuição da temperatura na treliça varia com a condição deformada. Ao decorrer da análise, percebe-se que as barras que estão sendo comprimidas apresentam taxas de variação de temperatura positivas, ou seja, aquecem, sendo a recíproca verdadeira, comprovando assim o Efeito Gough-Joule.

A seguir, insere-se a plasticidade na análise, com o objetivo de avaliar sua influência na distribuição da temperatura. Admite-se 80% de geração de calor devido às deformações plásticas, e apenas por questões didáticas, assume-se  $\sigma_y = 100\text{MPa}$ . Para  $\theta_0 = 20^\circ\text{C}$ , comparam-se os resultados das análises termoelástica e termoelastoplástica, ressaltando-se que para o modelo elastoplástico misto assume-se  $K = 0.5\text{ GPa}$  e  $H = 3\text{ MPa}$ .

Como já esperado, as gerações de calor devido às deformações plásticas são mais expressivas quando comparadas com as oriundas das deformações elásticas, como ilustra o gráfico da Figura 7.12, comprovando assim a influência da plasticidade na temperatura do corpo. Isto pode ser melhor observado na Figura 7.13 e Figura 7.14, no qual verifica-se que as variações de temperatura são mais evidentes nas barras plastificadas.

Figura 7.12 - Variação da temperatura no ponto 3 segundo a análise termoelastoplástica

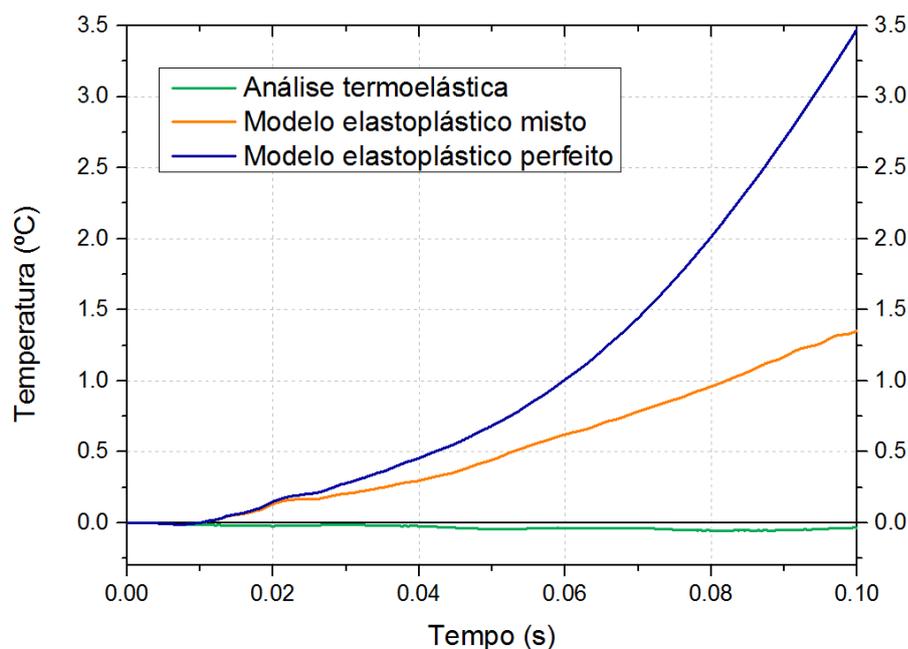


Figura 7.13 - Distribuição da temperatura e configuração deformada da viga treliçada segundo a análise termoelastoplástica com modelo elastoplástico misto ( $\theta_0 = 20^\circ\text{C}$  para  $t = 0,1\text{s}$ )

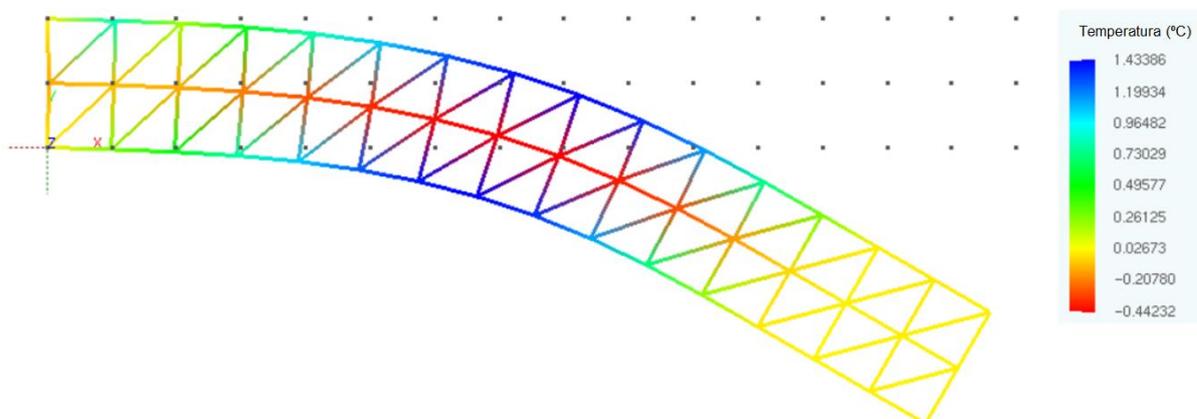
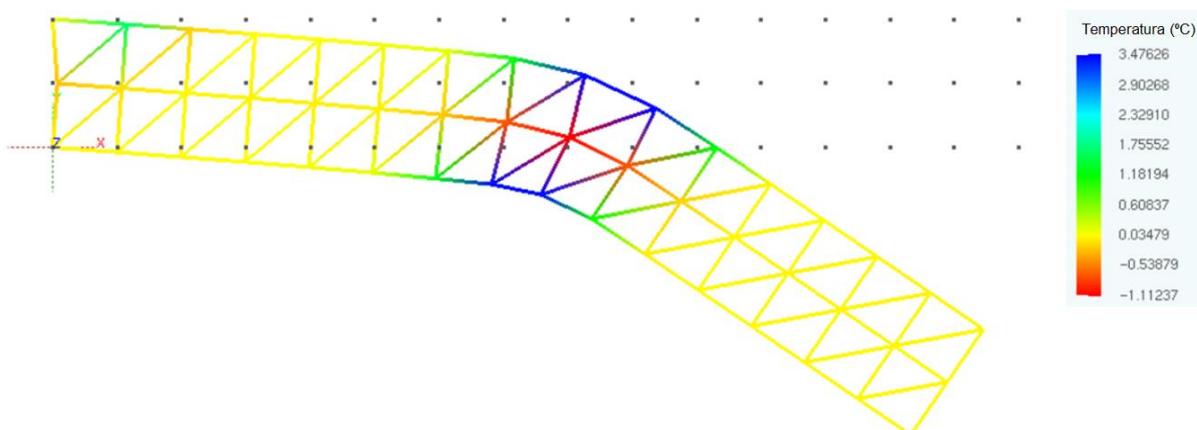


Figura 7.14 - Distribuição da temperatura e configuração deformada da viga treliçada segundo a análise termoelastoplástica com modelo elastoplástico perfeito ( $\theta_0 = 20^\circ\text{C}$  para  $t = 0,1\text{s}$ )



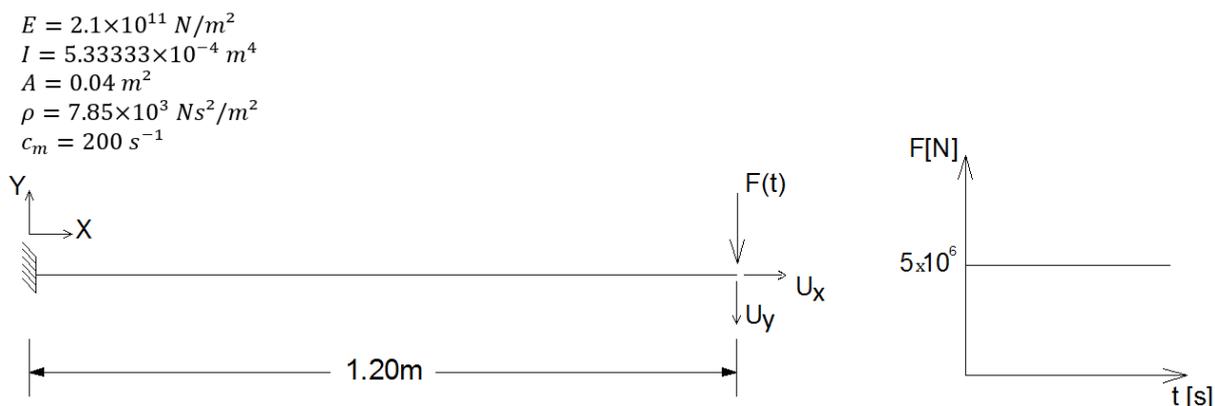
## 7.6 Viga engastada com amortecimento

Este exemplo, retirado de Greco (2004) e também encontrado em Marques (2006) e Maciel (2008), trata-se da análise de uma viga robusta em balanço submetida a um carregamento de impacto na extremidade livre considerando o amortecimento na formulação, como ilustra a Figura 7.15.

Inicialmente será comparada a resposta mecânica obtida aqui com as referências acima. Referente a discretização da estrutura, Greco (2004) adotou 20

elementos finitos unidimensionais de aproximação linear, lembrando que o autor não considera os efeitos de cisalhamento e obteve a resposta da estrutura desconsiderando as não linearidades desta. Já Marques (2006) e Maciel (2008), obtiveram os resultados para este problema adotando elementos finitos de sólidos, sendo 80 e 77 elementos finitos para estes, respectivamente.

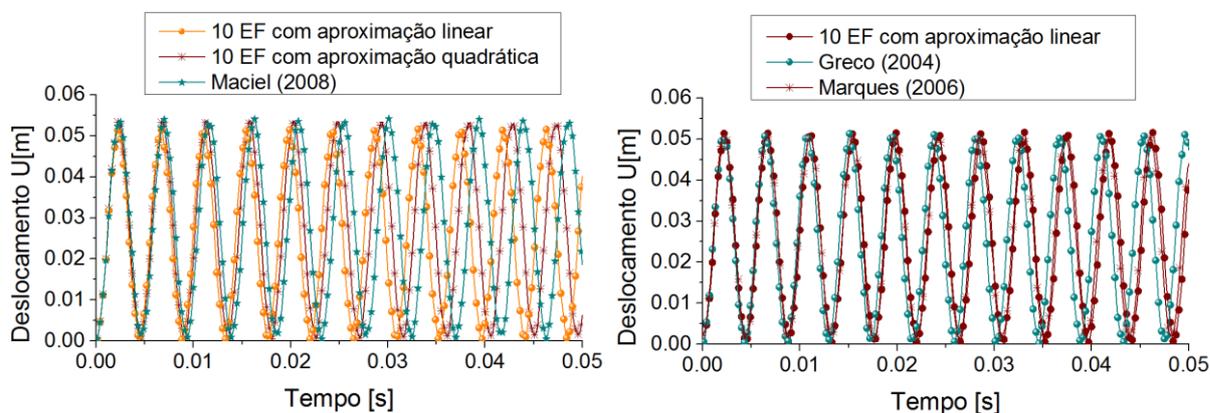
Figura 7.15 – Viga engastada e dados do problema



Fonte: Adaptado de Greco (2004)

Aqui será adotado 10 EF com aproximação linear e com aproximação quadrática, para fins de comparação. Assim como as referências, adota-se o método de Newmark, com 500 passos de tempo de  $0.0001\text{s}$  e  $tol = 10^{-4}$ . Na Figura 7.16 é possível ver o deslocamento da extremidade livre da viga ao longo do tempo, no qual, por motivos de melhor visualização, apresentam-se dois gráficos.

Figura 7.16 - Deslocamento  $U$  da viga engastada em função do tempo



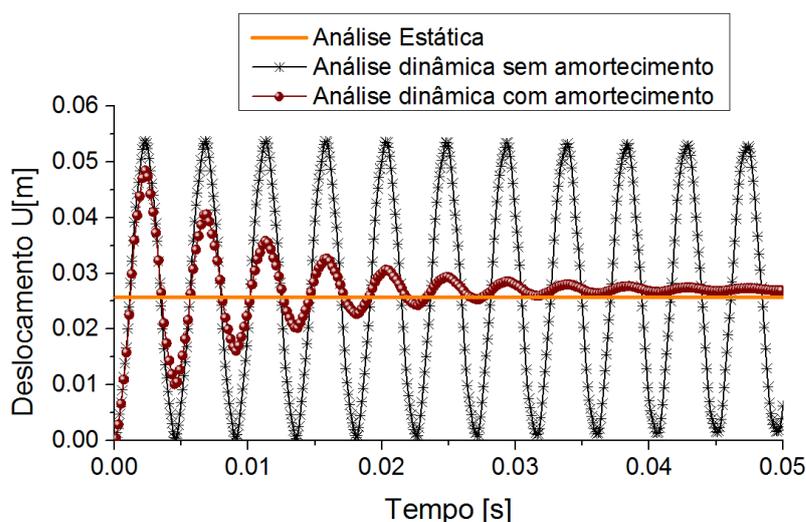
O primeiro compara os resultados obtidos para 10EF de aproximação linear e quadrática com os obtidos para elementos de sólidos tridimensionais em Maciel (2008). O grau do polinômio da função de forma influenciou nos resultados,

condizendo com o esperado, visto que a precisão da resposta foi maior para um grau mais elevado. Vale ressaltar que os resultados para um número maior de EF, ou maior grau do polinômio de aproximação do elemento (cúbica, por exemplo), não alterou de forma significativa a resposta.

Adotando-se um grau de aproximação linear os resultados foram mais parecidos com os encontrados em Greco (2004) e Marques (2006), como ilustra o segundo gráfico da Figura 7.16. No entanto, considerando a defasagem das respostas propagadas com o decorrer do tempo, percebe-se que para as análises considerando os efeitos de cisalhamento a estrutura se mostrou mais flexível, provavelmente em virtude das diferentes cinemáticas adotadas. Salienta-se que as referências não consideraram os efeitos de Poisson.

Na Figura 7.17 apresenta-se a amplitude do deslocamento  $U$ , medido na extremidade livre da viga, comparando os resultados com e sem amortecimento. Observa-se que a resposta dinâmica com amortecimento converge para a resposta estática como constatado por Greco (2004) e Marques (2006). No entanto, a resposta dinâmica após estabilização da estrutura apresentou um deslocamento  $U$  levemente maior do que para a solução analítica estática, como verificado em Maciel (2008), enfatizando a importância da consideração dos efeitos de cisalhamento na formulação.

Figura 7.17 - Deslocamento  $U$  da viga engastada em função do tempo com e sem amortecimento



## 7.7 Análise termomecânica de viga engastada amortecida

O exemplo anterior agora é investigado segundo a análise termomecânica. Para tanto, mantendo-se os demais parâmetros do exemplo, admite-se as seguintes propriedades térmicas para um aço de baixa liga:

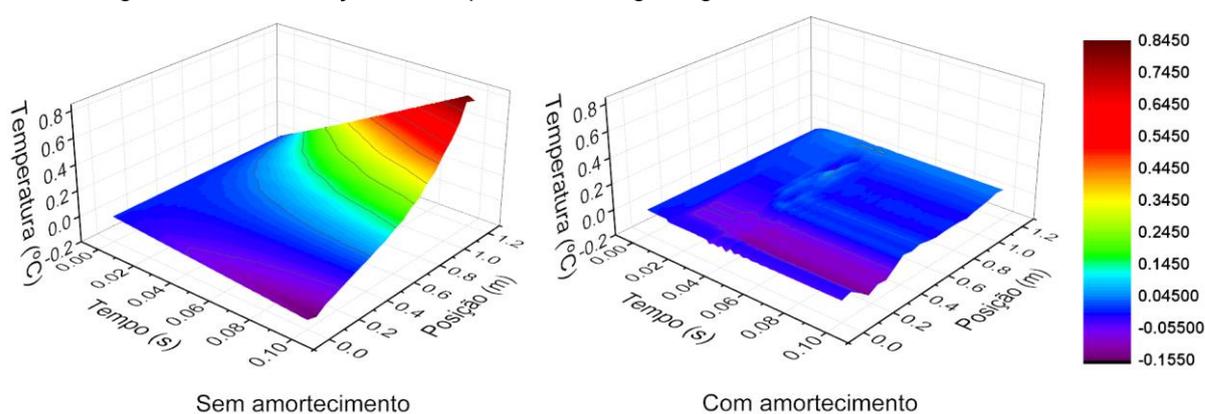
$$k = 52 \text{ J}/(\text{°C m s}) \qquad c_e = 477 \text{ J}/(\text{°C kg})$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ m}/(\text{m °C}) \qquad \theta_0 = 27 \text{ °C}$$

Como já esperado, a análise termomecânica não acarretou em diferenças significativas na resposta dinâmica da estrutura, mesmo considerando temperaturas de referências elevadas, levando em consideração que a viga analisada é bastante robusta e apresenta pequenos deslocamentos. Desta forma, omite-se os resultados comparativos à resposta puramente mecânica, inerentes aos deslocamentos.

Referente à temperatura do corpo, a Figura 7.18 ilustra os gráficos de mudança de temperatura da viga engastada considerando ou não a mesma amortecida. De forma bastante coerente, o amortecimento cessa o avanço nas mudanças de temperatura, posto que o corpo atinge um estado de repouso após determinado instante, mais precisamente 0,057 segundos neste exemplo. Ressalta-se que estes resultados são meramente ilustrativos, visto a tomada de um amortecimento elevado.

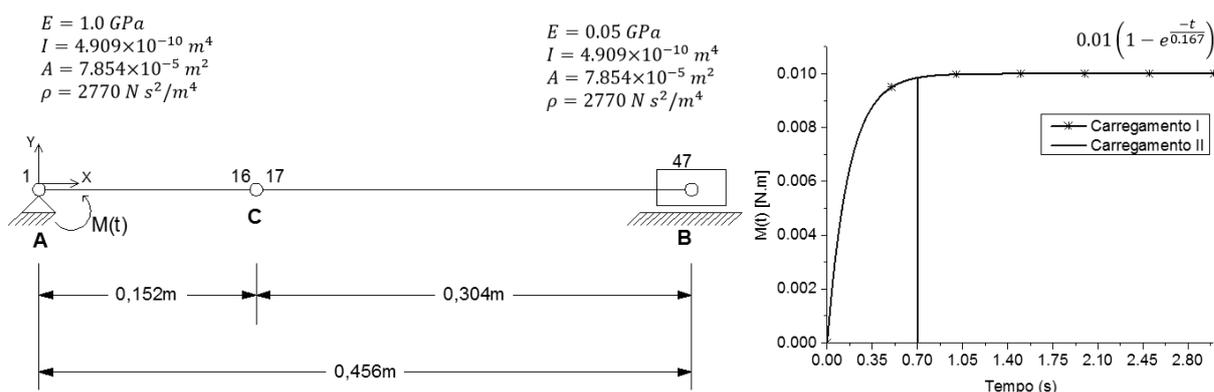
Figura 7.18 - Mudanças de temperatura na viga engastada com e sem amortecimento



## 7.8 Mecanismo flexível articulado

Neste exemplo, também encontrado em Escalona *et al.* (1998), Greco (2004) e Maciel (2008), será avaliado um mecanismo composto por um braço mecânico  $\overline{AB}$  e uma haste  $\overline{CB}$  com rigidez menor, como apresentado na Figura 7.19. O braço é articulado no ponto  $C$  e no ponto  $B$  está vinculado a um bloco de massa desprezível livre para deslizar numa superfície sem atrito. O módulo de elasticidade da haste é vinte vezes menor do que o considerado para o braço mecânico e será avaliado o comportamento do mecanismo submetido a um momento  $M(t)$  aplicado no ponto  $A$ , cujo gráfico de variação no tempo também está exposto na Figura 7.19, a qual também apresenta os dados do problema.

Figura 7.19 – Esquematização do mecanismo flexível articulado e dados de entrada do problema



Fonte: Adaptado de Greco (2004)

São avaliadas duas situações de carregamento. A primeira é expressada pela Eq. (7.7), na qual descreve-se uma função exponencial com comportamento assintótico em  $M(t) = 0.01 \text{ Nm}$ .

$$M(t) = 0.01 \left(1 - e^{-\frac{t}{0.167}}\right) \text{ Nm} \quad (7.7)$$

Já o segundo carregamento apresenta duas fases distintas, sendo a primeira igual ao primeiro carregamento e a segunda assume momento nulo para um tempo maior que  $0,7 \text{ s}$ , dadas, respectivamente, pelas Eq. (7.8) e Eq. (7.9).

$$M(t) = 0.01 \left(1 - e^{-\frac{t}{0.167}}\right) \text{ Nm}, \quad \text{para } 0 \text{ s} \leq t \leq 0,7 \text{ s} \quad (7.8)$$

$$M(t) = 0 \text{ Nm}, \quad \text{para } t > 0,7 \text{ s} \quad (7.9)$$

Assim como em Greco (2004) e Maciel (2008), adotou-se uma discretização de 15 elementos finitos de mesmas dimensões (sendo 5 para o braço mecânico e 10 para a haste). A aproximação dos elementos é de ordem cúbica e o  $\Delta t$  e  $tol$  são 0,005 e  $10^{-4}$ , respectivamente.

Os resultados apresentados neste trabalho foram obtidos adotando-se o método de integração temporal de Houbolt, a fim de comparar com os obtidos em Maciel (2008), que por sua vez adotou o método de Newmark com  $\beta$  e  $\gamma$  igual a 0,5. As Figura 7.20 e Figura 7.21 apresentam os resultados para o deslocamento horizontal do bloco em comparação aos encontrados em Greco (2004) e Maciel (2008), para as duas situações de carregamento.

Referente à primeira situação de carga (Figura 7.20), os resultados obtidos foram idênticos aos das referências até o instante de 2,415s. Ressalta-se que Greco (2004) obteve os resultados até o instante de 3s, cuja posição mínima do bloco para o primeiro ciclo foi no instante 1,015s, um pouco diferente dos valores encontrados em Maciel (2008) e na análise com Houbolt, que foi de 1,01s. Já a máxima posição do bloco para o primeiro ciclo ocorreu no mesmo instante das referências ( $t = 1,390s$ ). Foi notório que a análise utilizando o algoritmo de Houbolt apresentou uma amplitude menor que os resultados obtidos por Maciel (2008) para tempos maiores que 2,415s.

Figura 7.20 – Posição horizontal do bloco referente ao Carregamento I

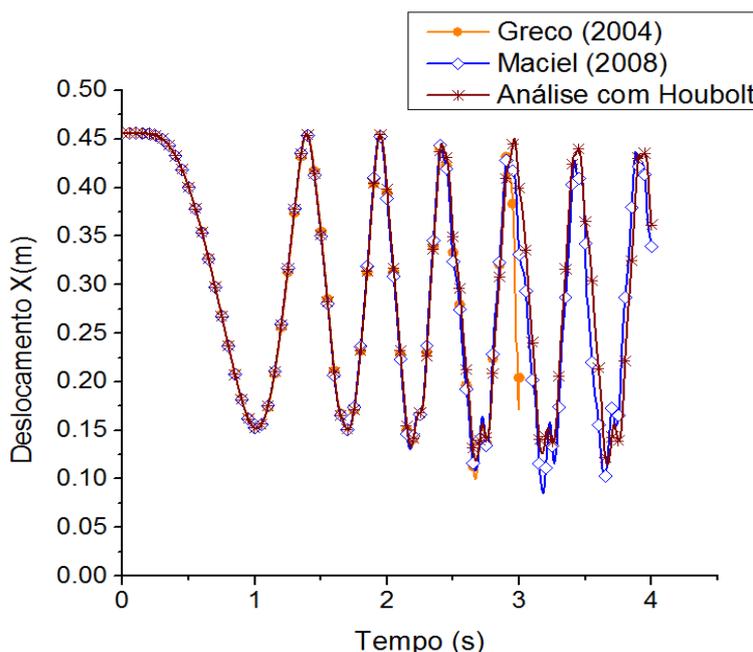
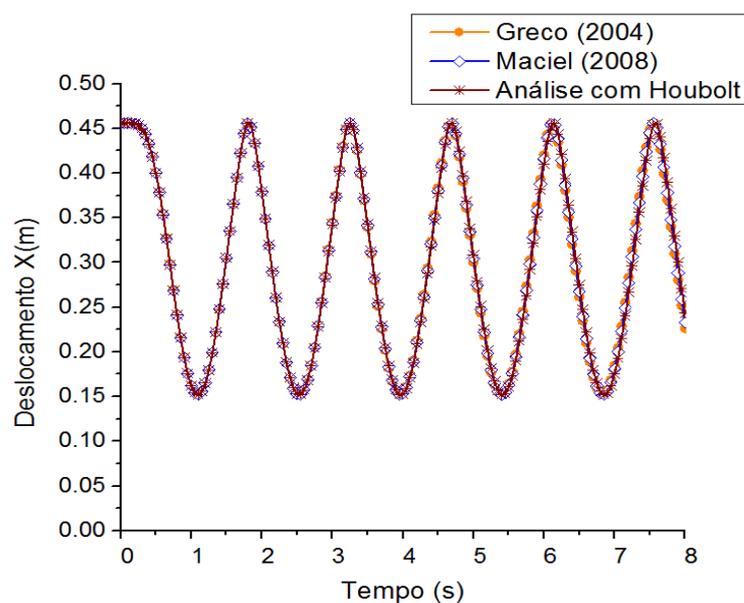


Figura 7.21 - Posição horizontal do bloco referente ao Carregamento II



Já para a segunda situação de carga, percebe-se pelo gráfico da Figura 7.21 que os resultados foram idênticos aos das referências, onde a mínima posição horizontal do bloco para o primeiro ciclo foi para o tempo de 1,095s.

As Figura 7.22 e Figura 7.23 apresentam as configurações do mecanismo articulado com a massa do bloco desprezível para a primeira situação de carregamento. Assim como constatado pelas referências, percebe-se que as deformações devido à flexão da haste são mais visíveis para o segundo ciclo de rotação.

Figura 7.22 – Configurações do 1º ciclo do mecanismo articulado para a primeira situação de carregamento com massa do bloco desprezível

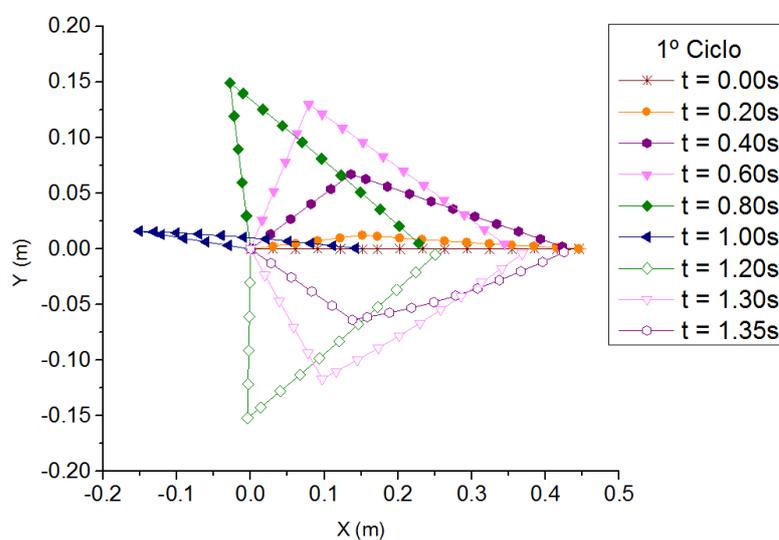
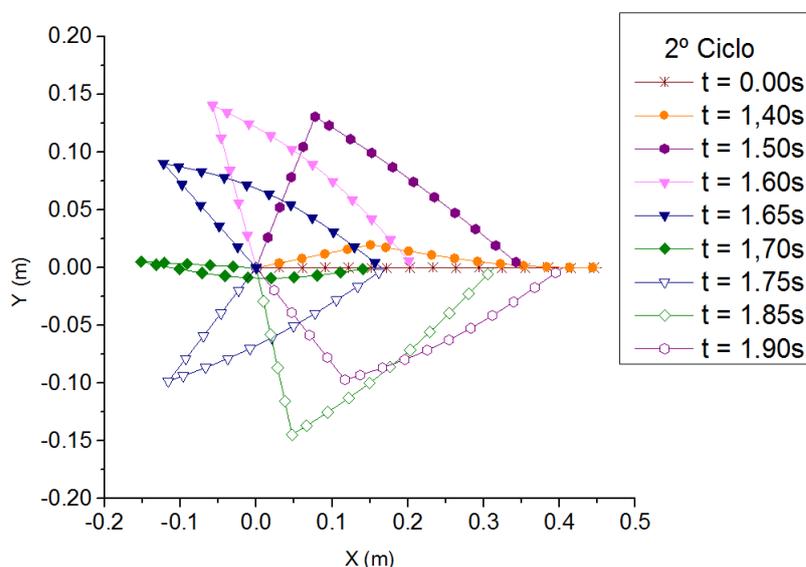
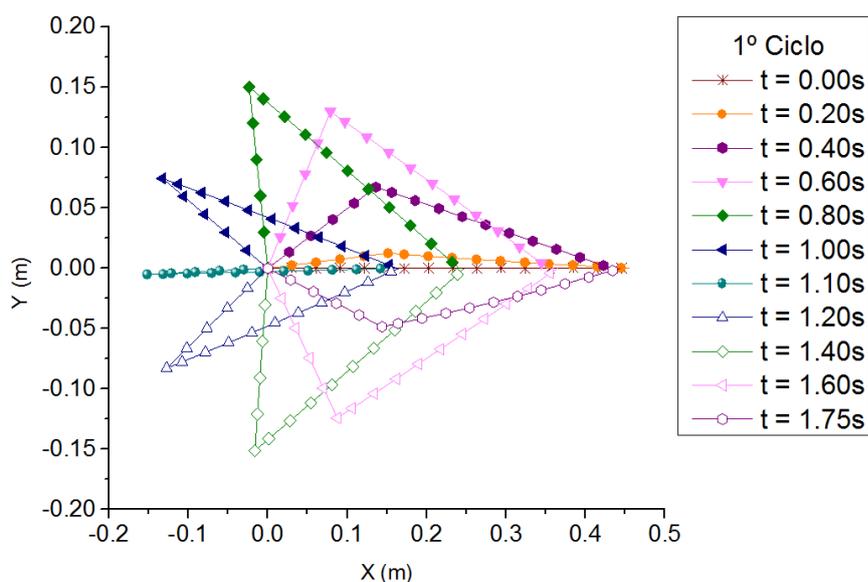


Figura 7.23 - Configurações do 2º ciclo do mecanismo articulado para a primeira situação de carregamento com massa do bloco desprezível



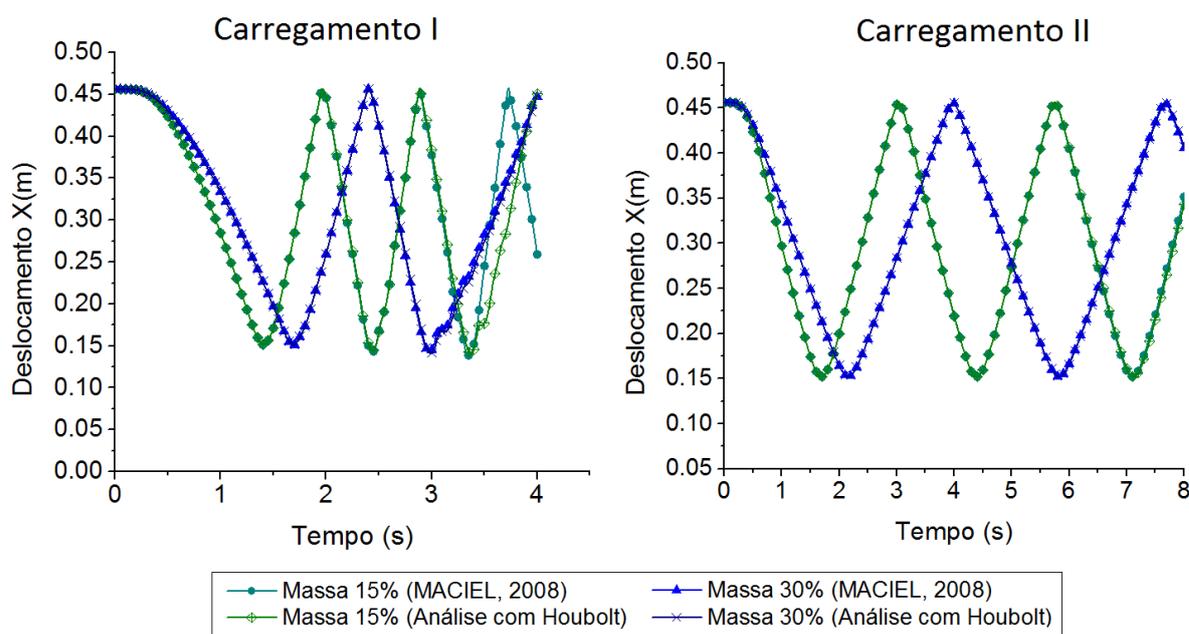
Já na Figura 7.24 é possível ver as configurações do mecanismo articulado para o Carregamento II, também desprezando a massa do bloco. Assim como em Greco (2004), constatou-se que para este caso o movimento é harmônico, ou seja, não apresenta oscilações geradas pelas deformações, como para o caso do Carregamento I.

Figura 7.24 - Configurações do 1º ciclo do mecanismo articulado para a segunda situação de carregamento com massa do bloco desprezível



Admite-se agora, que o bloco não possui massa desprezível e analisa-se o deslocamento horizontal do bloco para os casos em que o mesmo possui 15% e 30% da massa total do mecanismo articulado. Os resultados podem ser vistos na Figura 7.25, para a primeira e a segunda situação de carregamento em comparação às respostas obtidas por Maciel (2008).

Figura 7.25 – Comparação dos resultados para a posição horizontal do bloco com massa de 15 e 30%



Assim como os resultados encontrados na referência, a consideração da massa do bloco se mostrou coerente para as duas situações de carregamento, visto que a massa concentrada em B retarda o movimento do bloco, aumentando o período de revolução. No entanto, para a massa de 15% percebe-se que a adoção do método de Houbolt apresentou divergências para a primeira situação de carregamento, quando comparado com Maciel (2008), a partir do instante 3,38s.

As configurações da estrutura considerando a massa do bloco com 30% da massa total do mecanismo articulado estão apresentadas nas Figura 7.26 e Figura 7.28, respectivas aos carregamentos I e II. Confirma-se que para a primeira situação de carregamento a consideração da massa do bloco provoca maiores deflexões na haste do mecanismo, acentuado no segundo ciclo, como constatado por Maciel (2008). Relativo à segunda situação de carregamento, o movimento do corpo

considerando a massa do bloco não desprezível, mais uma vez se apresenta harmônico, como já esperado.

Agora, com a finalidade de avaliar o desempenho dos algoritmos de integração temporal para este exemplo, as Figura 7.29 e Figura 7.30 ilustram os resultados obtidos para o deslocamento horizontal do bloco para os respectivos carregamentos investigados, admitindo-se que a massa do bloco seja desprezível ou não. Salienta-se que para o método de Newmark foi adotado  $\beta$  e  $\gamma$  igual a 0,5.

Figura 7.26 - Configurações do 1º Ciclo do mecanismo para o carregamento I com massa do bloco de 30%

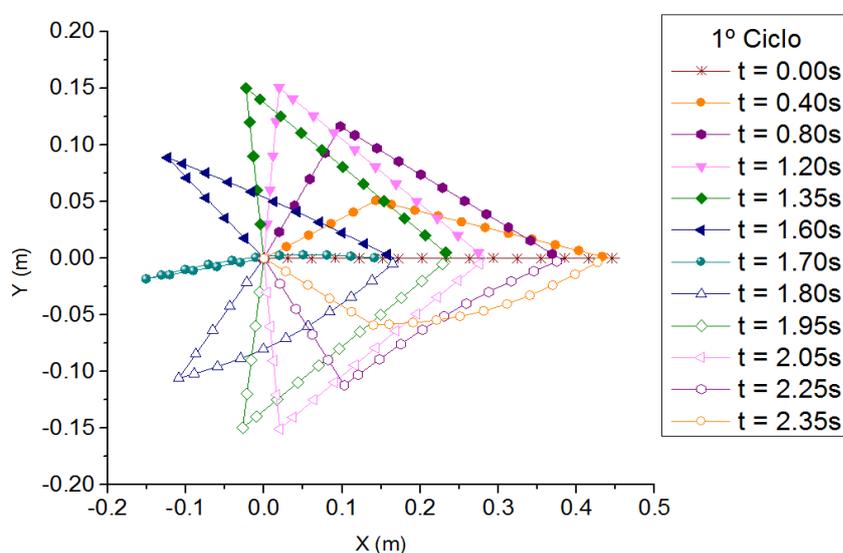


Figura 7.27 - Configurações do 2º Ciclo do mecanismo para o carregamento I com massa do bloco de 30%

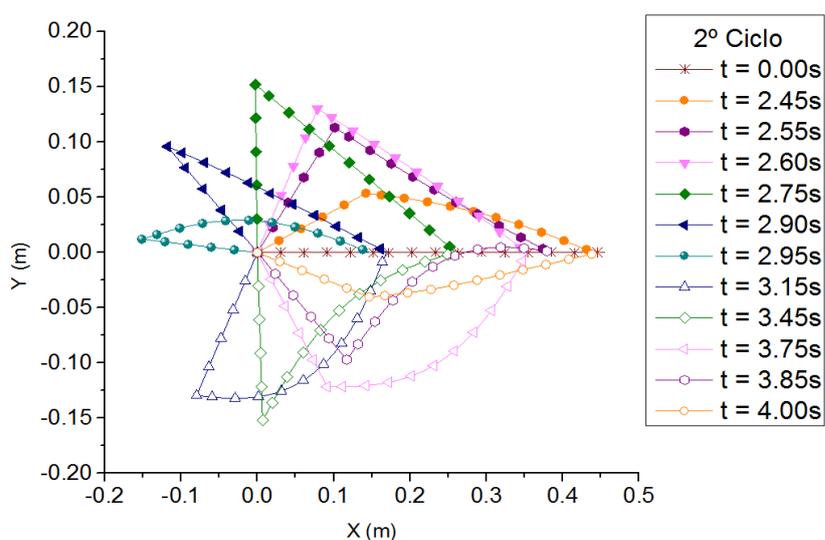
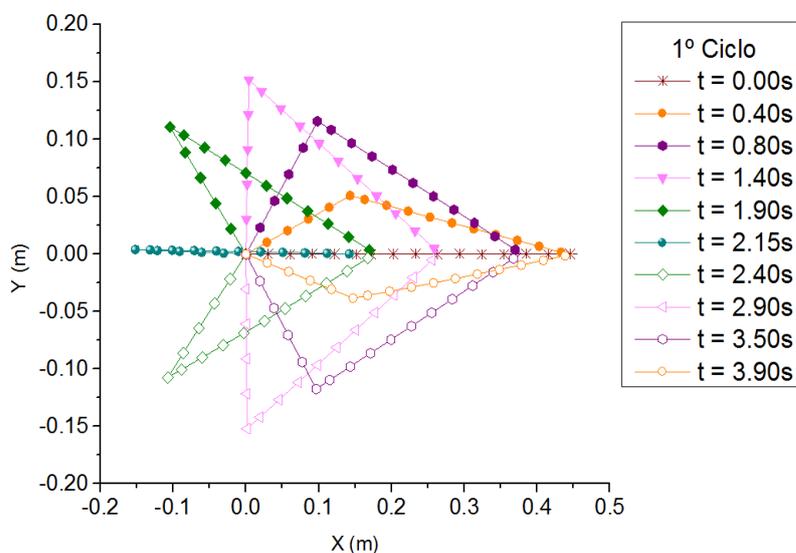


Figura 7.28 - Configurações do 1º Ciclo do mecanismo para o carregamento II com massa do bloco de 30%



Como já esperado, os algoritmos de Chung & Lee (1994) e Diferenças Centrais apresentaram comportamento idêntico, e por serem altamente dissipativos apresentam resultados com um período de revolução maior, seja qual for o carregamento e massa do bloco. Wilson- $\theta$  apresentou problemas para convergir quando avaliado o Carregamento I, apresentando resultados até 1,925s e 3,055s, para o bloco com massa desprezível e 30%, respectivamente.

Figura 7.29 – Comparação dos resultados para a posição horizontal do bloco referente ao Carregamento I para: (a) bloco com massa desprezível; (b) bloco com massa de 30%

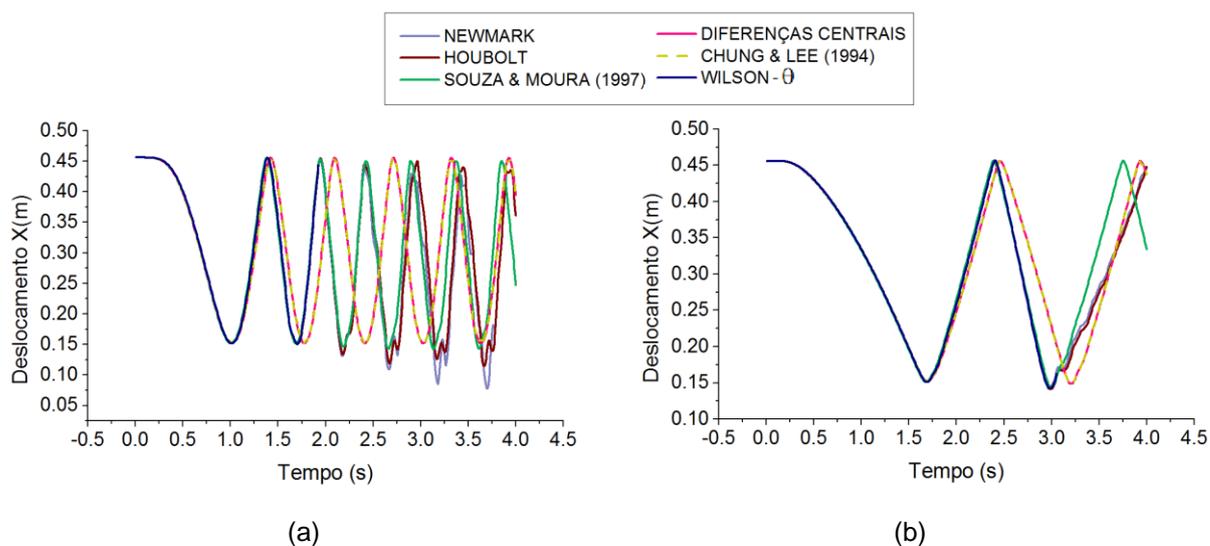
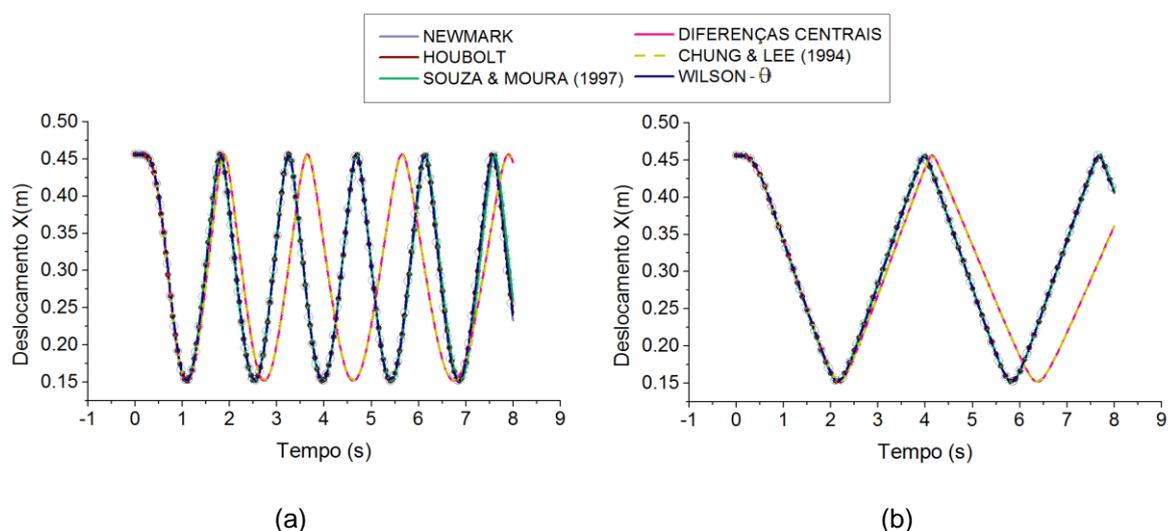


Figura 7.30 - Comparação dos resultados para a posição horizontal do bloco referente ao Carregamento II para: (a) bloco com massa desprezível; (b) bloco com massa de 30%



Quando se tratando do método de Souza & Moura (1997), o mesmo apresentou resultados mais harmônicos para o primeiro carregamento quando comparado com Newmark, Houbolt e Wilson- $\theta$ , e resultados idênticos a estes para o segundo carregamento.

Para trabalhos futuros, recomenda-se a consideração do atrito do bloco com a superfície e a não linearidade física do corpo, visto que este exemplo é ilustrativo e não considera as perdas de energia devido a estes argumentos.

## 7.9 Mecanismo articulado com acoplamento termomecânico

Investiga-se aqui o comportamento termomecânico do mecanismo articulado do exemplo anterior. A discretização temporal, bem como a aproximação e número dos elementos finitos, permanecem os mesmos. No entanto, visto que o problema original não considera o campo térmico, foram admitidas as propriedades do alumínio, adotando-se os seguintes parâmetros termomecânicos:

$$E = 68 \text{ GPa}$$

$$\rho = 2700$$

$$k = 210 \text{ J}/(^{\circ}\text{C m s})$$

$$c_e = 900 \text{ J}/(^{\circ}\text{C kg})$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 2,4 \cdot 10^{-5} \text{ m}/(\text{m } ^{\circ}\text{C})$$

$$\theta_0 = 27 \text{ } ^{\circ}\text{C}$$

Para a obtenção dos resultados deste exemplo, foi adotado o método de integração temporal de Newmark com  $\beta$  e  $\gamma$  igual a 0,5, e tolerância de convergência ( $tol$ ) de  $10^{-8}$ .

As Figura 7.31 a Figura 7.33 apresentam os gráficos da variação da posição do bloco para o Carregamento II, admitindo-se massa desprezível, massa 15% e 30%, respectivamente.

Figura 7.31 - Comparação dos resultados com acoplamento termomecânico para a posição horizontal do bloco com massa desprezível

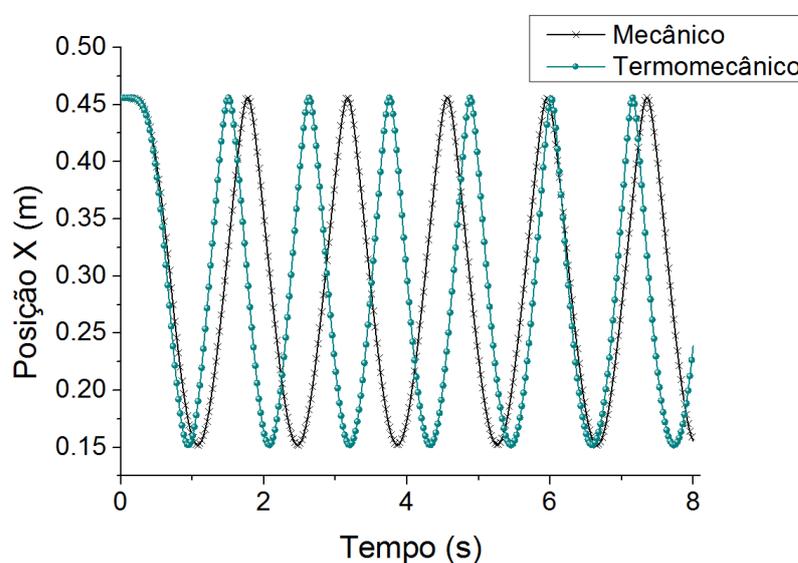


Figura 7.32 - Comparação dos resultados com acoplamento termomecânico para a posição horizontal do bloco com massa de 15%

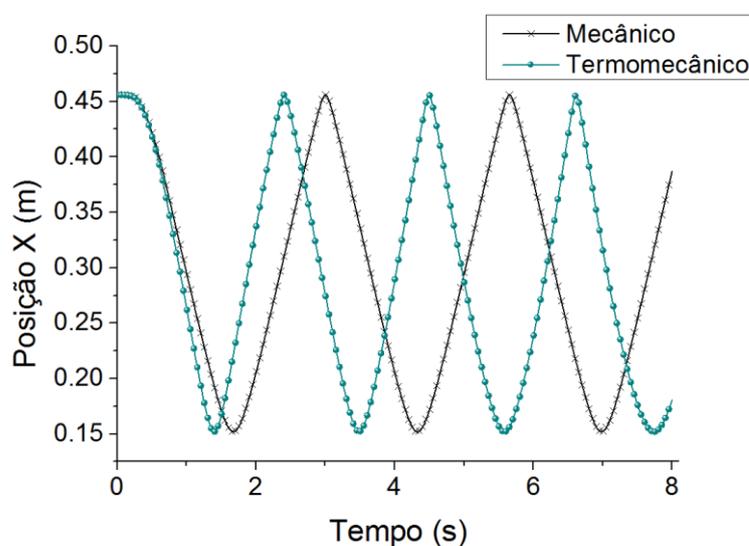
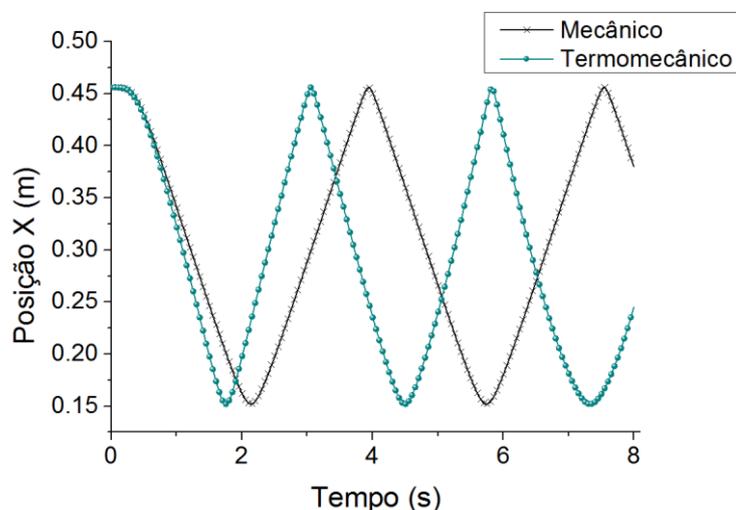


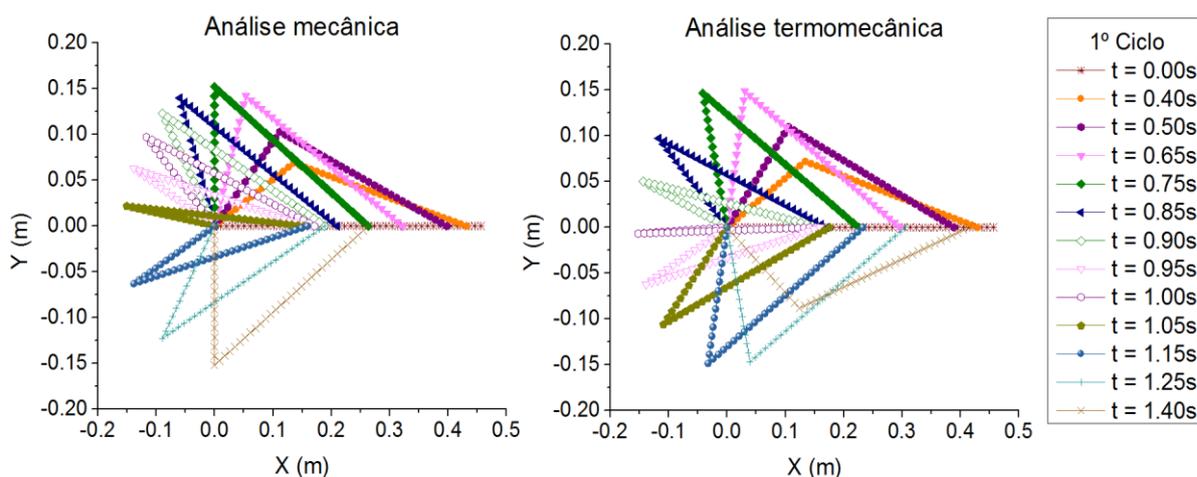
Figura 7.33 - Comparação dos resultados com acoplamento termomecânico para a posição horizontal do bloco com massa de 30%



Considerando que a estrutura fica mais flexível com o acoplamento termomecânico, o período de revolução é reduzido, como constatado para as três situações de massa do bloco.

Apenas para confirmar que a consideração dos efeitos térmicos reduz o tempo do ciclo completo, a Figura 7.34 apresenta uma comparação das configurações do primeiro ciclo de revolução do mecanismo articulado analisando o comportamento mecânico e termomecânico.

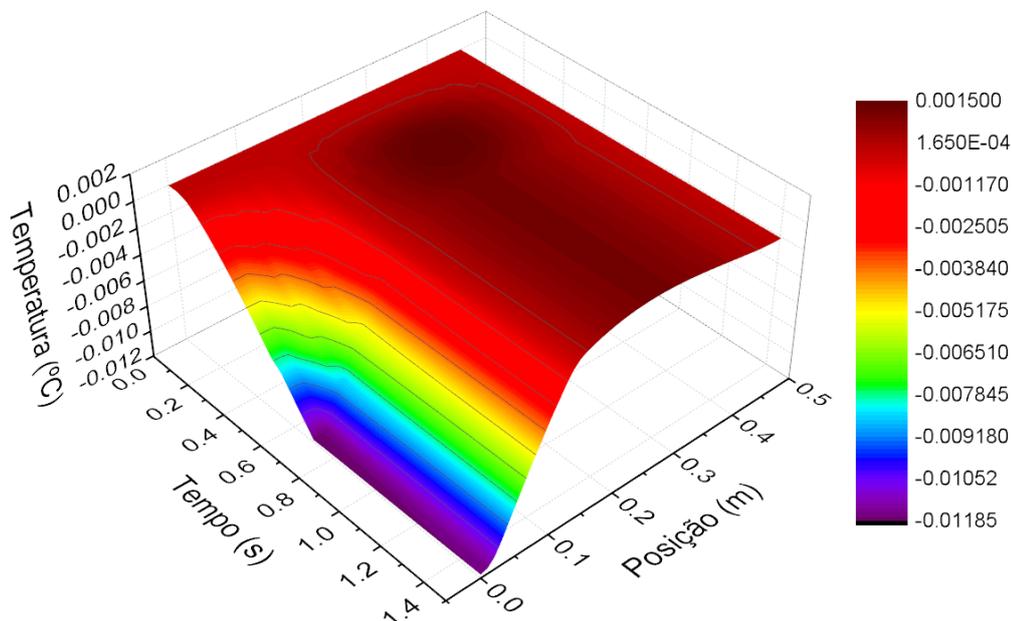
Figura 7.34 - Comparação das configurações do mecanismo articulado para análise mecânica e termomecânica com massa do bloco desprezível



Na Figura 7.35 é possível ver a mudança de temperatura do mecanismo articulado no campo do tempo para o bloco com massa desprezível, valendo ressaltar

que para a consideração da massa do bloco diferente de zero, a distribuição da temperatura é semelhante.

Figura 7.35 – Mudanças da temperatura do mecanismo do bloco com massa desprezível



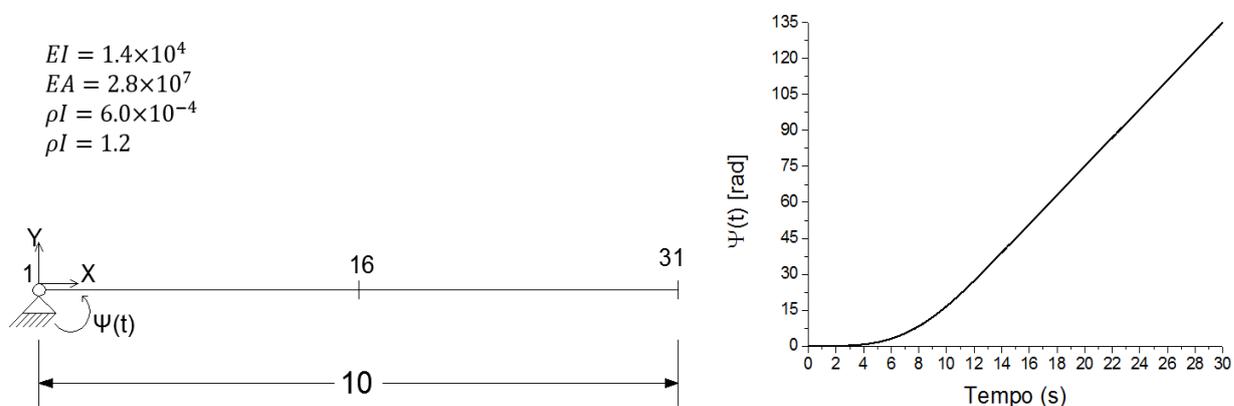
Percebe-se claramente a descontinuidade do comportamento da variação da temperatura na posição da rótula, no qual a haste não sofre grandes variações de temperatura, comprovando a influência das mudanças de corpo nesta variável. Desta forma, é possível constatar aqui o efeito Gough-Joule, em que o trecho do mecanismo que apresenta taxa de deformação negativa aquece e a haste que apresenta taxas de deformação positiva resfria.

## 7.10 Barra giratória flexível com deslocamento aplicado

Investiga-se neste exemplo o comportamento de uma barra flexível giratória submetida a um deslocamento aplicado, adotando-se diferentes métodos de integração temporal. A Figura 7.36 apresenta os dados do problema, bem como o gráfico correspondente a prescrição do deslocamento no decorrer do tempo. A barra foi discretizada com 10 elementos de aproximação cúbica. Segundo Greco e Coda (2006), este exemplo, divulgado por Simo e Vu-Quoc (1986), é considerado uma referência na literatura, utilizado para provar a capacidade da formulação proposta em modelar as características de inércia necessárias em situações de grandes rotações.

Greco (2004) e Maciel (2008) também apresentam uma discussão sobre este exemplo numérico.

Figura 7.36 – Barra giratória flexível e dados do problema



Fonte: Adaptado de Maciel (2008)

O deslocamento prescrito apresentado no gráfico da Figura 7.36 e expresso pelas Eq. (7.10) e (7.11), representa uma rotação típica de lâmina de um rotor.

$$\Psi(t) = \frac{2}{5} \left[ \frac{t^2}{2} + \left( \frac{15}{2\pi} \right)^2 \left( \cos \left( \frac{2\pi t}{15} \right) - 1 \right) \right] \text{ rad} \quad 0 \leq t \leq 15 \quad (7.10)$$

$$\Psi(t) = (6t - 45) \text{ rad} \quad t \geq 15 \quad (7.11)$$

O movimento de corpo rígido e condição deformada do problema são apresentados na Figura 7.37, na qual é possível identificar os deslocamentos relativos  $U_1$  e  $U_2$  e a rotação relativa  $\alpha$  avaliados neste exemplo, e calculados a partir das expressões nas Eq. (7.12) à (7.16).

$$S = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta y^2} \quad (7.12)$$

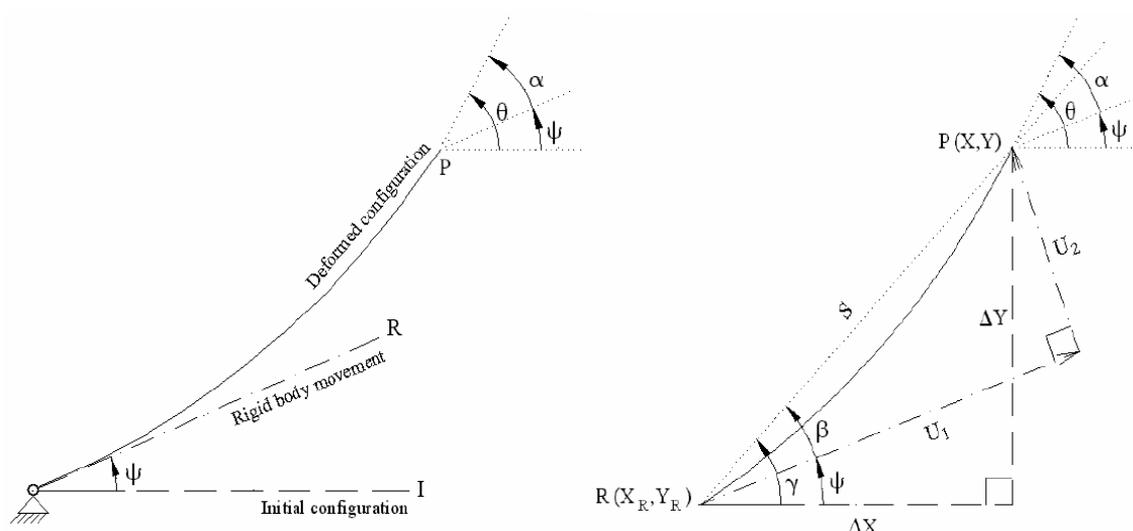
$$\beta = \gamma - \psi \quad (7.13)$$

$$U_1 = S \cos(\beta) \quad (7.14)$$

$$U_2 = S \sen(\beta) \quad (7.15)$$

$$\alpha = \theta - \psi \quad (7.16)$$

Figura 7.37 – Deslocamentos relativos ao movimento de corpo rígido da barra giratória



Fonte: Greco (2004)

Segundo Bathe e Wilson (1973), é necessário definir um passo de tempo apropriado, visto que este está relacionado com a precisão da resposta e possíveis problemas de instabilidade numérica, dependendo do algoritmo adotado. Com uma tolerância de convergência de  $10^{-4}$ , admite-se inicialmente 6000 passos de 0,005 e compara-se com os resultados para 60000 passos de 0,0005. Os deslocamentos  $U_1$  e  $U_2$  e a rotação  $\alpha$  para os diferentes métodos de integração temporal podem ser vistos nas Figura 7.38 e Figura 7.39, com  $\Delta t = 0,005$  e  $\Delta t = 0,0005$ , respectivamente. Ressalta-se que para o método de Newmark se considerou  $\beta = \gamma = 0,5$ .

Apresenta-se um resumo dos resultados obtidos neste exemplo nas Tabela 7.1 e Tabela 7.2, para  $\Delta t = 0,005$  e  $\Delta t = 0,0005$ , respectivamente. Novamente os métodos de Chung & Lee (1994) e Diferenças Centrais forneceram resultados semelhantes entre si. No entanto, percebe-se que por se tratarem de métodos altamente dissipativos, não puderam apresentar respostas satisfatórias, mesmo quando a discretização do tempo foi reduzida. Portanto, não se recomenda estes algoritmos para problemas de grandes rotações.

Nota-se que os desempenhos dos Métodos de Newmark, Houbolt e Souza & Moura (1997) apresentaram resultados mais satisfatórios, pecando apenas na precisão da resposta para  $\Delta t = 0,005$ , sendo alcançada quando reduzido o intervalo de tempo.

Figura 7.38 – Comparação dos métodos de integração temporal para a barra giratória ( $\Delta t = 0.005$ )

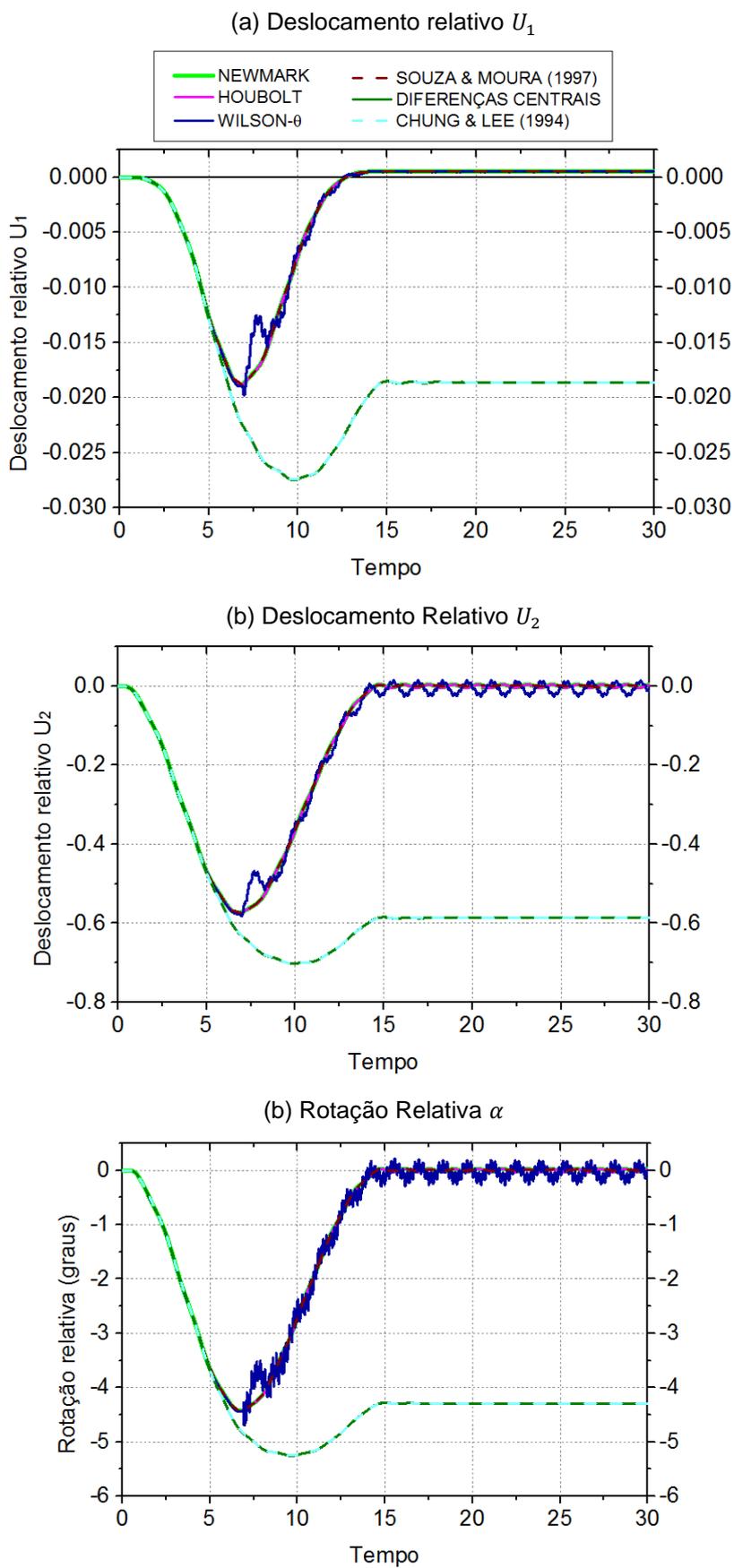
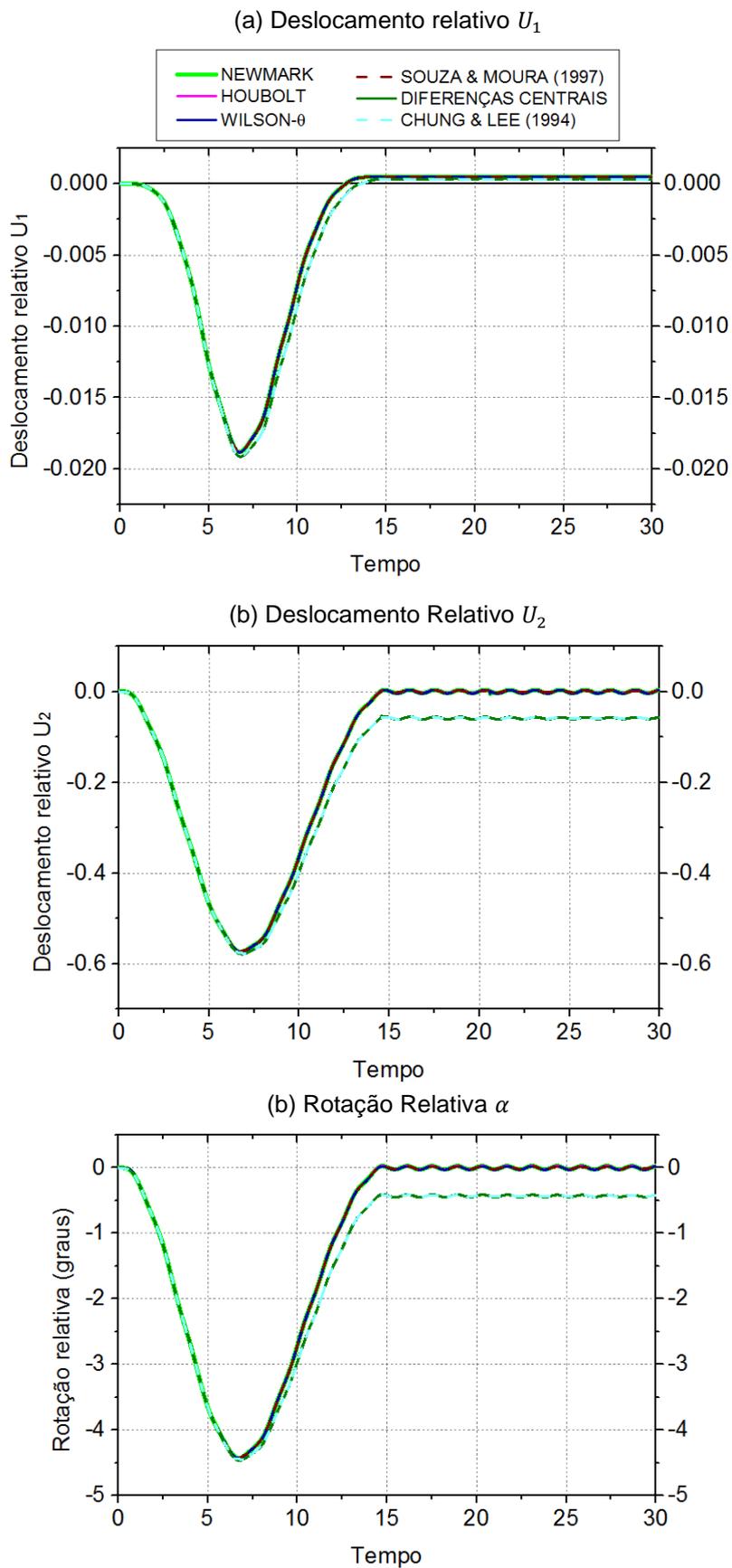


Figura 7.39 - Comparação dos métodos de integração temporal para a barra giratória ( $\Delta t = 0.0005$ )

Referente ao método de Wilson- $\theta$ , apesar da instabilidade apresentada para o maior intervalo de tempo (Figura 7.38), como já esperado, a resposta tende a oscilar em torno de um valor próximo da resposta analítica. O método apresenta ótimos resultados para  $\Delta t = 0,0005$  (Figura 7.39).

Tabela 7.1 – Valores dos deslocamentos relativos para  $\Delta t = 0,005$

		Valores relativos máximos				$U_1$ estabilizado
		Instante	$U_1$ máx	$U_2$ máx	Ângulo $\alpha$	
Referências	<b>Simo e Vu-Quoc (1986)</b>	6.750	-0.019	-0.578	-4.468	0.000514
	<b>Greco (2004)</b>	6.750	-0.019	-0.578	-4.472	0.000517
Método de integração temporal	<b>Newmark</b>	6.740	-0.019	-0.574	-4.430	0.000518
	<b>Houbolt</b>	6.745	-0.019	-0.574	-4.432	0.000518
	<b>Wilson</b>	6.750	-0.019	-0.576	-4.444	0.000508
	<b>Souza &amp; Moura (1997)</b>	6.765	-0.019	-0.573	-4.798	0.000509
	<b>Diferenças Centrais</b>	9.755	-0.028	-0.702	-5.254	-0.018634
	<b>Chung &amp; Lee (1994)</b>	9.755	-0.028	-0.702	-5.255	-0.018636

Tabela 7.2 - Valores dos deslocamentos relativos para  $\Delta t = 0,0005$

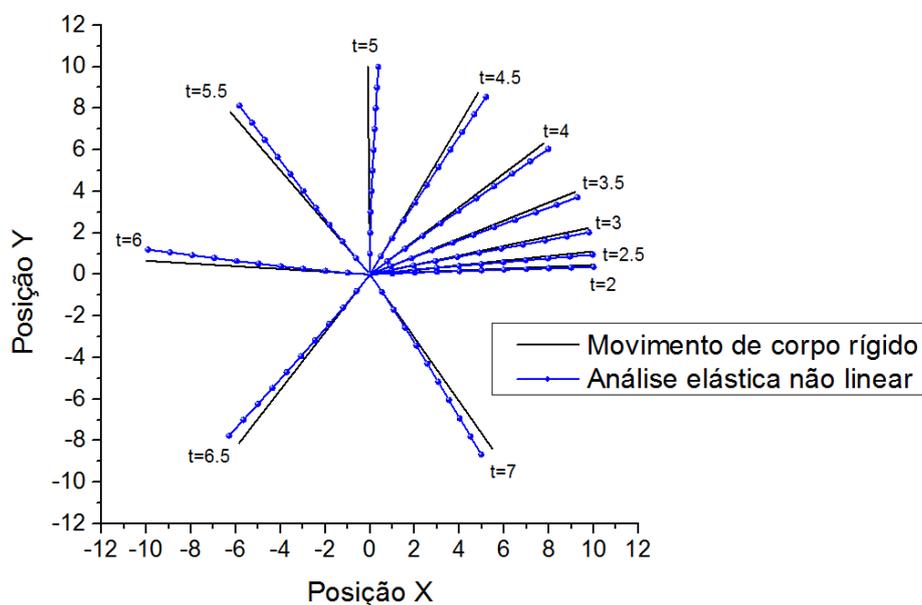
		Valores relativos máximos				$U_1$ estabilizado
		Instante	$U_1$ máx	$U_2$ máx	Ângulo $\alpha$	
Referências	<b>Simo e Vu-Quoc (1986)</b>	6.7500	-0.019	-0.578	-4.468	0.000514
	<b>Greco (2004)</b>	6.7500	-0.019	-0.578	-4.472	0.000517
Método de integração temporal	<b>Newmark</b>	6.7405	-0.019	-0.574	-4.428	0.000514
	<b>Houbolt</b>	6.7405	-0.019	-0.574	-4.428	0.000514
	<b>Wilson-<math>\theta</math></b>	6.7415	-0.019	-0.574	-4.429	0.000514
	<b>Souza &amp; Moura (1997)</b>	6.7430	-0.019	-0.574	-4.428	0.000514
	<b>Diferenças Centrais</b>	6.7910	-0.019	-0.579	-4.464	0.000334
	<b>Chung &amp; Lee (1994)</b>	6.7900	-0.019	-0.579	-4.465	0.000334

Para os métodos mais eficientes, como visto nas Figura 7.38 e Figura 7.39 e constatado pelas referências, as maiores diferenças entre o deslocamento elástico e o movimento de corpo rígido ocorrem até determinado instante, em torno de 14,5, de forma que o corpo estabiliza seu movimento oscilando levemente. Responsável pela estabilidade de hélices de helicópteros, por exemplo, tal efeito é conhecido como protensão inercial, no qual lâminas (barras) muito esbeltas e flexíveis, quando aceleradas, são capazes de resistir a grandes carregamentos (GRECO, 2004).

As discrepâncias entre o movimento de corpo rígido e elástico linear podem ser observados na Figura 7.40, no qual percebe-se a defasagem entre os movimentos ao

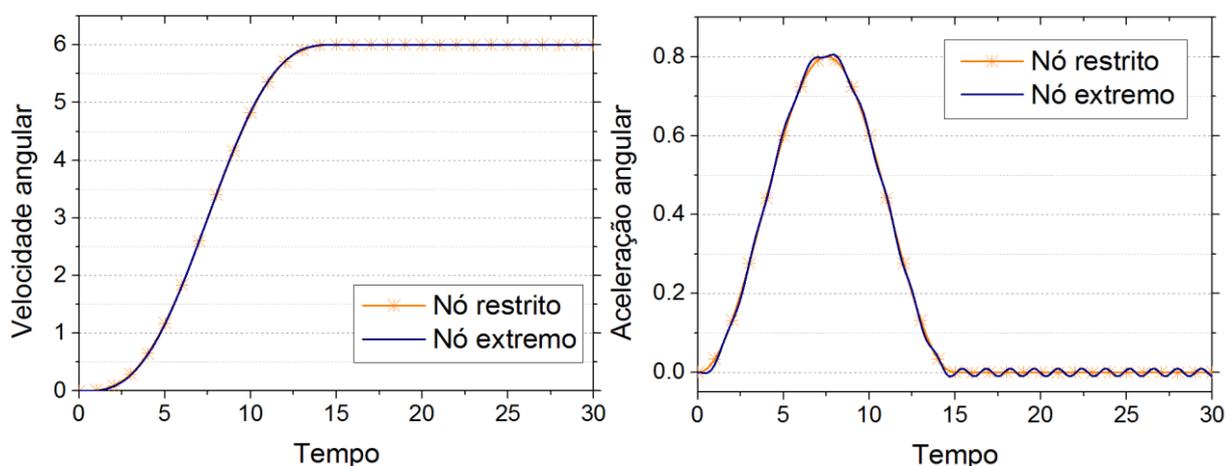
decorrer do tempo, como já esperado, posto as deformações elásticas que ocorrem na aplicação da rotação na base (GRECO, 2004).

Figura 7.40 – Configurações da barra para determinados instantes



Apresenta-se também a velocidade e aceleração angular do nó restrito e extremo na Figura 7.41. De forma coerente, há um retardo no movimento giratório do nó extremo relativo ao nó restrito nos instantes iniciais, e após estabilização do movimento é possível ver claramente as leves oscilações deste nó.

Figura 7.41 - Velocidade e aceleração angular do nó restrito para o método de Newmark,  $\Delta t = 0,0005$



Salienta-se que, de acordo com Greco (2004), o valor do deslocamento  $U_1$  apresentado pela solução analítica pode ser alcançado com a adoção de um número maior de elementos finitos. Esta alternativa à adoção de um intervalo de tempo menor,

provavelmente reduziria o custo computacional, no entanto, se aplica apenas aos algoritmos supracitados como mais eficientes.

Ressalta-se ainda, que de acordo com o trabalho de Coda *et al.* (2005) é mais apropriado adotar os valores dos parâmetros de Newmark como  $\beta = 0,30$  e  $\gamma = 0,55$  para dar mais estabilidade de convergência com o mínimo de amortecimento numérico.

### 7.11 Barra giratória flexível com temperatura restrita

Admite-se agora, que a barra flexível do exemplo anterior está submetida à uma temperatura constante no nó de aplicação do deslocamento  $\Psi(t)$ . De forma que os parâmetros e dimensões do exemplo são adimensionais, por motivos de simplificação, assumem-se os seguintes parâmetros e condições de contorno térmicos:

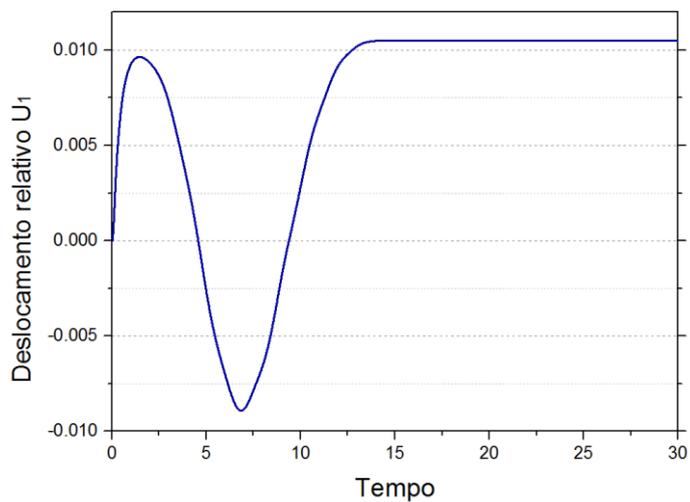
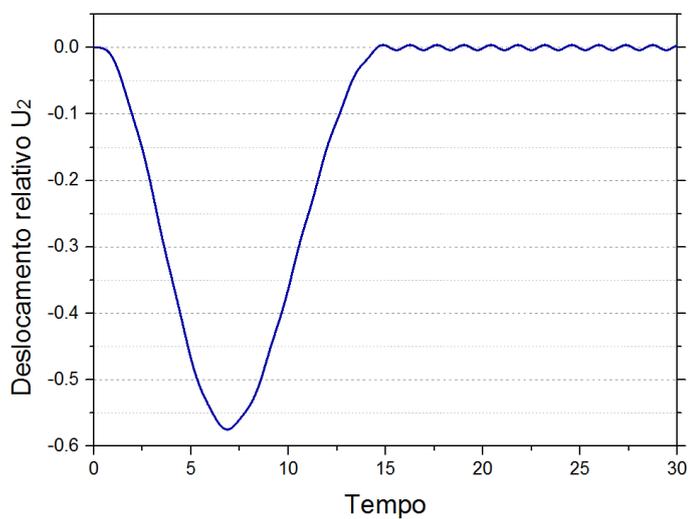
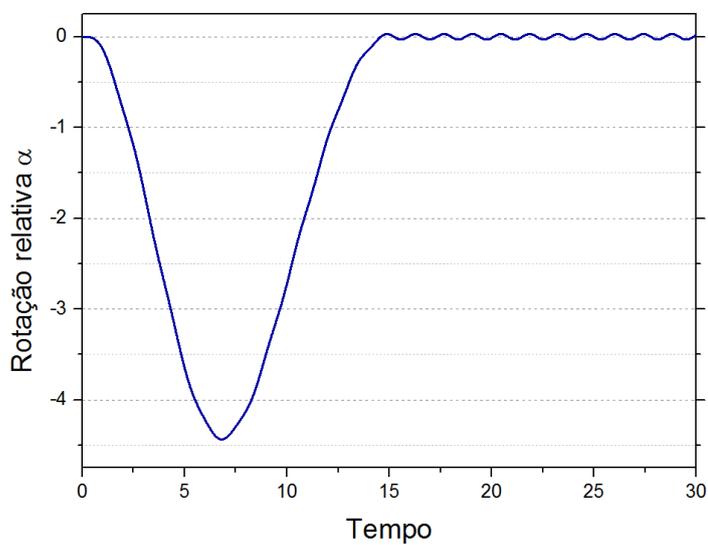
$$\begin{array}{ll} k = 1,0 & c_e = 1,0 \\ \alpha_1 = 0,001 & \alpha_2 = 0,0001 \\ \theta(0, t) = 1 & \theta_0 = 10 \end{array}$$

O objetivo aqui é investigar a influência dos efeitos térmicos no comportamento giratório da barra. Portanto, não será dado enfoque à precisão da resposta, sendo adotado para esta análise 6000 passos de 0,005 e tolerância de convergência de  $10^{-4}$ .

O problema foi solucionado pelo método de Newmark com os parâmetros  $\beta$  e  $\gamma$  iguais a 0,5. A Figura 7.42 apresenta os resultados dos deslocamentos e rotação relativas para a barra giratória flexível considerando a restrição de temperatura na base da barra ( $x = 0$ ).

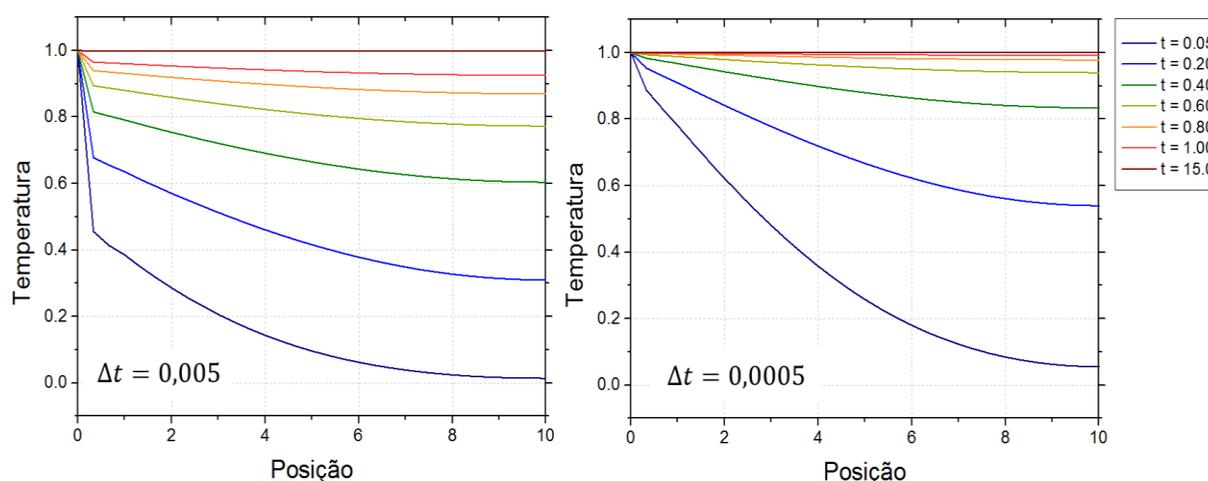
Como já esperado, a condição de temperatura restrita positiva e constante ao longo do tempo na base da barra, ocasiona em um alongamento inicial antes da estabilização do movimento, de forma que o deslocamento residual  $U_1$  é consideravelmente maior.

Figura 7.42 - Deslocamentos relativos considerando a restrição de temperatura na base

(a) Deslocamento relativo  $U_1$ (b) Deslocamento relativo  $U_2$ (b) Rotação relativa  $\alpha$ 

A formulação não foi capaz de prever possíveis influências significativas dos efeitos térmicos na direção transversal da barra, ou seja, não foram constatadas alterações no comportamento oscilatório nesta direção, como pode ser observado na Figura 7.42. A evolução da temperatura da barra em determinados instantes pode ser vista na Figura 7.43, na qual se apresenta os resultados para os intervalos  $\Delta t = 0,005$  e  $\Delta t = 0,0005$ .

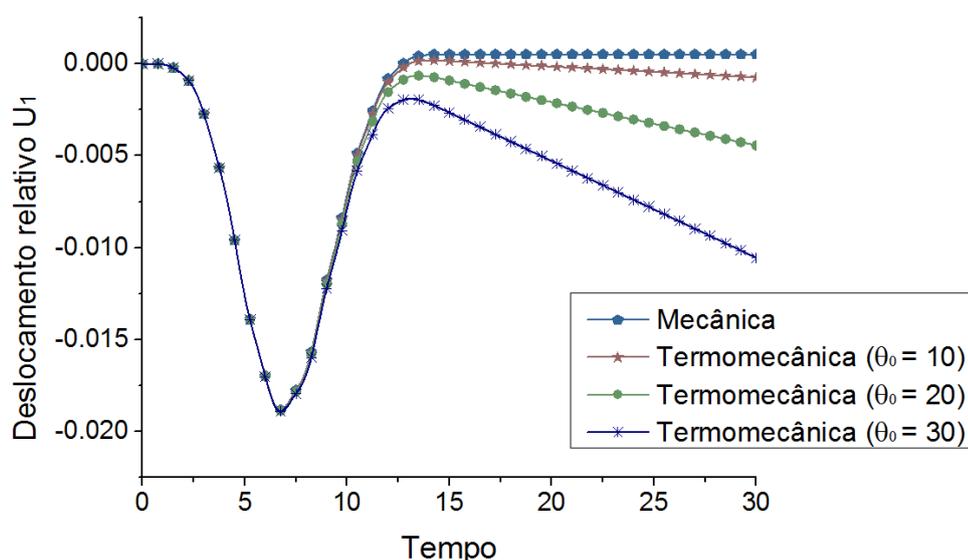
Figura 7.43 – Evolução da temperatura da barra giratória flexível com temperatura prescrita



De acordo com Vila Real (1988), assim como para a análise mecânica, instabilidades na resposta térmica podem ocorrer de duas formas. A primeira delas diz respeito à oscilação temporal, e a segunda ao espaço (número de elementos finitos). Sendo esta última não tratada aqui, relativo à discretização temporal, comprova-se e enfatiza-se a importância em se adotá-la de forma adequada para a obtenção da resposta térmica, visto a irreal distribuição da temperatura obtida com um intervalo de tempo inapropriado, bem como o tempo necessário para dissipar a temperatura ao longo da barra, sendo menor para discretizações mais refinadas.

Agora, sem restringir a temperatura na base da barra, apresentam-se os resultados para o deslocamento  $U_1$  na Figura 7.44. Percebe-se que o acoplamento termomecânico torna a estrutura mais flexível, e conseqüentemente, mesmo após estabilização do movimento que ocorre na análise mecânica, temperaturas iniciais elevadas podem comprometer o efeito de protensão inercial, sendo mais expressivos para temperaturas de referência maiores, como ilustra a Figura 7.44.

Figura 7.44 - Deslocamento relativo  $U_1$  com acoplamento termomecânico sem restrição da temperatura



É interessante notar que, para o caso em que a base está submetida a uma temperatura constante, e conseqüentemente as deformações térmicas são mais expressivas, não houve influência no efeito de protensão inercial, visto que o corpo entra em equilíbrio térmico muito antes da estabilização do movimento.

Ressalta-se que estes resultados são meramente ilustrativos e são apresentados apenas para apontar a influência da temperatura no comportamento mecânico da estrutura. Sugere-se para trabalhos futuros, este tipo de análise com dados reais, para avaliar a significância dos efeitos térmicos em problemas práticos.

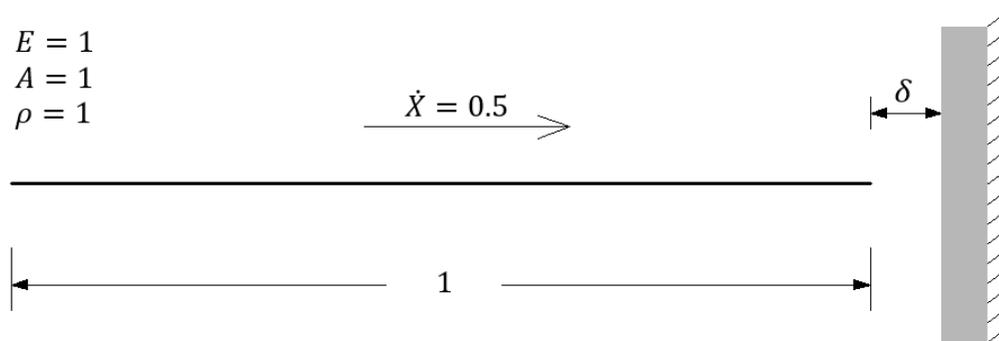
## 7.12 Impacto entre barra e anteparo rígido com acoplamento termomecânico

Para tratar de problemas em que ocorrem mudanças bruscas na configuração do corpo, analisa-se aqui o impacto unidirecional entre uma barra, de comprimento e altura unitária, e um anteparo rígido segundo a análise termoelástica, como ilustra a Figura 7.45, juntamente com os dados do problema.

Armero e Petocz (1998) divulgou inicialmente este exemplo realizando uma análise mecânica, e Cavalcante (2016) apresentou resultados considerando o acoplamento termomecânico, que por sua vez servirá como referência para validar o

termo de geração de calor em problemas de impacto deste estudo. Uma análise mecânica deste exemplo também pode ser vista em Marques (2006) e Maciel (2008).

Figura 7.45 – Esquema do impacto entre barra e anteparo rígido com dados do problema



Sendo os dados do problema adimensionais, a barra dista de 0,05 do anteparo rígido e despreza-se o amortecimento e atrito no impacto, bem como a não linearidade física da barra. Adotam-se 500 passos de tempo 0,01 e a discretização da barra é feita com 20 elementos finitos de aproximação quadrática. Considera-se uma tolerância de convergência de  $10^{-8}$ , e assim como Cavalcante (2016), por simplicidade adotam-se os seguintes parâmetros térmicos:

$$\begin{aligned} c_e &= 1 & k &= 1 \\ \alpha_1 = \alpha_2 &= 0,11 & \theta_0 &= 10 \end{aligned}$$

No estudo de Cavalcante (2016) o exemplo foi investigado também perante o uso de uma gama de algoritmos de integração temporal, no qual constatou-se que o método de Newmark se mostrou eficiente, portanto, será o método adotado para o problema de impacto deste estudo. Carpenter *et al.* (1991) apresenta uma solução analítica para este tipo de problema elástico linear, dada por:

$$\left. \begin{aligned} u_{\text{impacto}} &= \dot{X} t \\ \dot{x}_{\text{impacto}} &= \dot{X} \\ F_{\text{contato}} &= 0 \end{aligned} \right\} \forall t \leq t_{\text{impacto}} \quad (7.17)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{\text{impacto}} &= 0 \\ \dot{x}_{\text{impacto}} &= 0 \\ F_{\text{contato}} &= -\dot{X} \sqrt{E\rho} \end{aligned} \right\} \forall t_{\text{impacto}} < t \leq t_{\text{separação}} \quad (7.18)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{impacto} &= 2\dot{X} \left( \frac{\delta}{\dot{X}} + \sqrt{\frac{L^2 \rho}{E}} - \frac{t}{2} \right) \\ \dot{x}_{impacto} &= -\dot{X} \\ F_{contato} &= 0 \end{aligned} \right\} \forall t > t_{separação} \quad (7.19)$$

Onde:  $u_{impacto}$  e  $\dot{x}_{impacto}$  são o deslocamento e velocidade do nó impactante;  $L$  é o comprimento da barra;  $\rho$  é a massa específica;  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal; e  $t_{impacto}$  e  $t_{separação}$  são dados respectivamente pelas expressões nas Eq. (7.20) e (7.21).

$$t_{impacto} = \frac{\delta}{\dot{X}} \quad (7.20)$$

$$t_{separação} = \frac{\delta}{\dot{X}} + 2L\sqrt{\frac{\rho}{E}} \quad (7.21)$$

A Figura 7.46 ilustra os gráficos comparativos das análises mecânica e termomecânica, bem como a solução analítica elástica linear do problema. Apenas o nó extremo da barra sofre impacto, e de acordo com a Figura 7.46(a), assim como constatado por Cavalcante (2016), a consideração dos efeitos térmicos em problemas de impacto reduz o tempo de contato devido à perda de energia para gerar calor, sendo os resultados para a posição e velocidade do nó impactante idênticos até o instante 2,07.

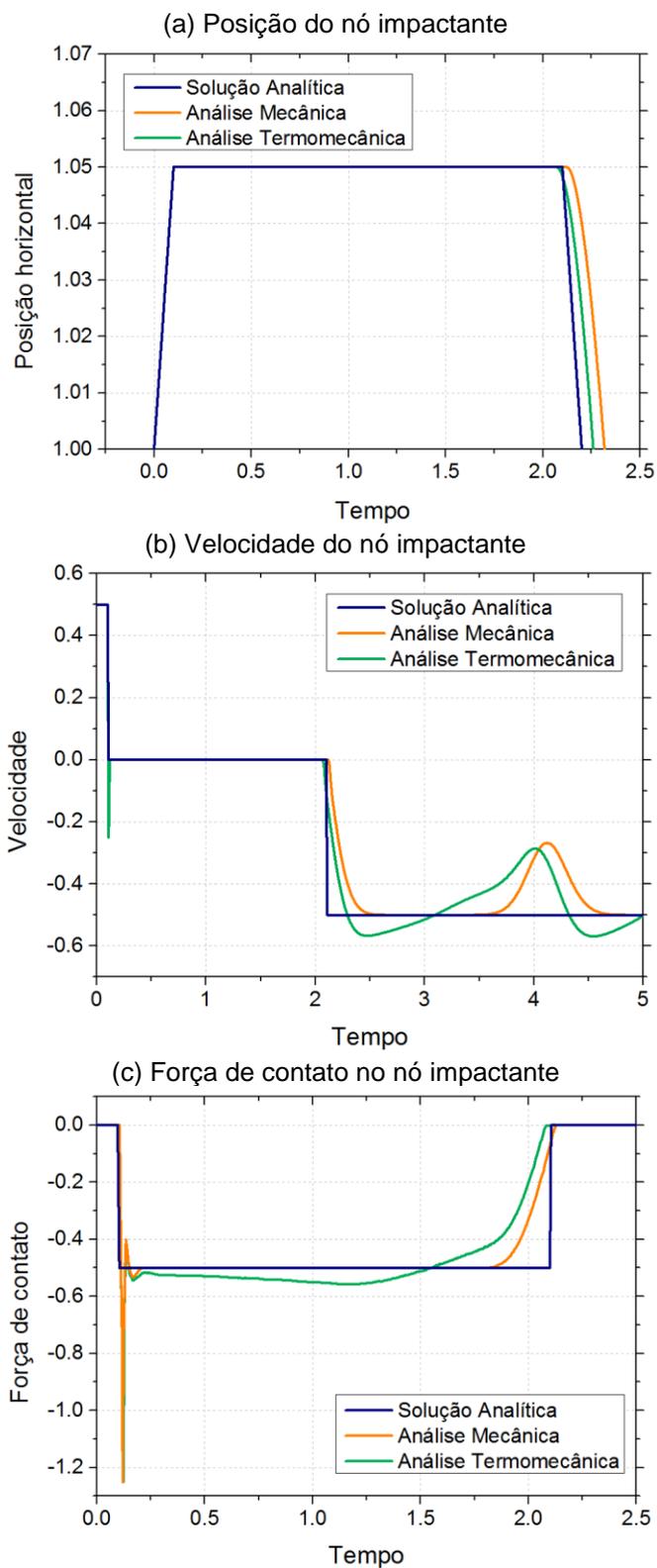
A solução analítica apresenta um tempo de contato reduzido quando comparado com as demais respostas. Para ambas análises não lineares geométricas, há um salto na velocidade no instante do impacto, e após a separação da barra e anteparo rígido há uma tendência de a velocidade oscilar em torno do valor em módulo apresentado antes do contato, justificado pela vibração oriunda do impacto.

Salienta-se que a solução analítica, de acordo com Marques (2006), é simplificada e é baseada na conservação da quantidade de movimento, como também, apresenta a resposta para a velocidade como a média para o corpo como um todo, e não para a superfície de contato apenas.

A geração de calor oriunda do acoplamento termomecânico acarreta num acréscimo das forças de contato, como pode ser observado na Figura 7.46(c). Na

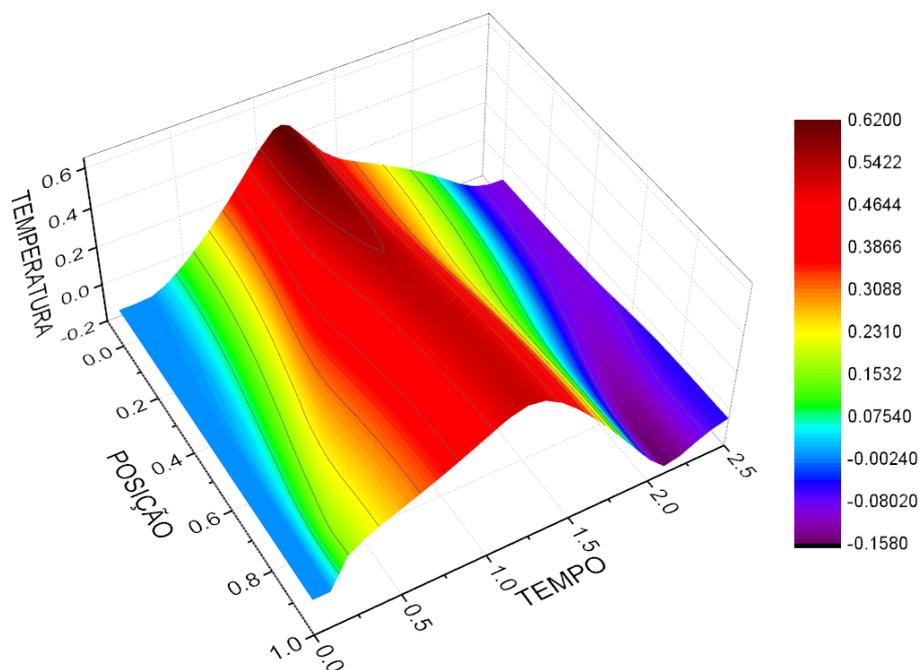
Figura 7.47 verificam-se as mudanças da temperatura da barra ao longo do tempo, que comparado com a referência apresentou resultados bastante satisfatórios.

Figura 7.46 – Gráficos comparativos dos resultados do problema de impacto



De forma bastante coerente, observa-se que a temperatura do corpo apenas sofre variação a partir do instante do impacto, no qual a barra aquece até determinado tempo, 1,04 especificamente. Este instante pode ser considerado como o momento em que a barra para de comprimir, e tende a alongar recuperando a energia cinética perdida no impacto, posto que a barra resfria apenas quando as taxas de deformação são positivas (Efeito Gough-Joule), fato já comprovado em exemplos anteriores.

Figura 7.47 – Mudanças de temperatura da barra no problema de impacto



## CAPÍTULO 8

# Conclusões

O principal objetivo do trabalho aqui desenvolvido é a análise dinâmica de pórticos planos não lineares físicos e geométricos considerando os efeitos térmicos. Apresenta-se uma formulação posicional com cinemática de Reissner implementada e validada a partir de comparação com a literatura especializada, para investigar o comportamento dinâmico de estruturas aporticadas com possível consideração do impacto.

Os desempenhos dos algoritmos de integração temporal foram avaliados diante da aplicação em exemplos nos quais constata-se grandes rotações. Para os dois casos avaliados, os algoritmos das Diferenças Centrais e Chung & Lee (1994) apresentaram resultados insatisfatórios, pois como já esperado, são altamente dissipativos, e necessitam de uma discretização temporal bastante refinada para apresentar resultados coerentes.

Os métodos de Newmark, Houbolt e Souza & Moura (1997) são fortemente indicados para análise de problemas apresentando grandes rotações. No entanto, visto a necessidade de calibração do algoritmo de Newmark, este se torna menos recomendado dentre os três supracitados. Já o mais recomendado dentre estes, o método das Diferenças Finitas de Quarta Ordem, Souza & Moura (1997), pode apresentar resultados mais harmônicos.

Apesar da instabilidade numérica oriunda de um inapropriado intervalo temporal para o método de Wilson- $\theta$ , o mesmo se torna igualmente adequado a estes problemas para intervalos de tempo reduzidos, visto a ótima precisão da resposta obtida.

A discretização temporal está diretamente ligada com a estabilidade e/ou precisão da resposta dos algoritmos explícitos e implícitos. Desta forma, enfatiza-se a

importância em se adotar intervalos de tempo adequados, porém, não somente para garantia da estabilidade e precisão numérica da resposta dinâmica, mas também na obtenção mais precisa da distribuição da temperatura em análises térmicas e termomecânicas.

Tratando do problema térmico, o mesmo é validado mediante análise e comparação de exemplos dispostos na literatura. De forma que não foram encontrados estudos contemplativos dos efeitos térmicos em estruturas de pórtico, a formulação termodinâmica implementada no código computacional deste estudo é validada a partir da análise de treliças não lineares, bem como a consideração do acoplamento termomecânico em problemas de impacto, cujos resultados foram confrontados com os obtidos em trabalhos confiáveis, dos quais as respostas se mostraram bastante satisfatórias.

Referente à termoelastoplasticidade, percebe-se claramente que a geração de calor do sólido é mais expressiva perante as deformações plásticas, assim como constatado por Carrazedo (2009) e Cavalcante (2016). Já para problemas de impacto, nos quais constatam-se taxas de deformação elevadas, em conformidade com a literatura especializada, a reciprocidade dos efeitos térmicos e mecânicos acarreta em mudanças significativas no comportamento estrutural, posto a provável perda de energia para gerar calor.

A partir da formulação posicional apresentada neste trabalho e introduzida por Coda (2003), é possível tratar de problemas com grandes deslocamentos, incluindo grandes rotações. Para estes exemplos, comprovou-se de forma bastante coerente que o acoplamento termomecânico tem grande influência na flexibilidade das estruturas analisadas, sendo intensificada em proporção com a temperatura de referência.

Em contrapartida, para pequenos deslocamentos, que em muitos casos é produto da robustez da estrutura analisada, não há influência significativa na resposta dinâmica na direção transversal do elemento, podendo apenas apresentar pequena variação na direção longitudinal, caso a estrutura esteja submetida a temperaturas muito elevadas.

De acordo com os resultados aqui obtidos, os efeitos térmicos influenciam de forma mais significativa os deslocamentos na direção longitudinal do elemento finito. Para comprovar tal fato, e captar de forma mais precisa os efeitos do acoplamento termomecânico na direção transversal do elemento, na qual predomina o cisalhamento, sugere-se como trabalho futuro esta análise em estruturas de pórtico discretizadas com elementos finitos tridimensionais.

As discrepâncias entre as respostas mecânica e termomecânica são mais evidentes com o decorrer do tempo de análise, e como comentado acima, se intensificam com temperaturas de referência elevadas, sendo esta grande influenciadora nas variações de temperatura. No entanto, em casos práticos nos quais o carregamento é constante, com o amortecimento estrutural, o corpo tende a reduzir seu movimento oscilatório até um estado de repouso, o que por sua vez, cessa o avanço nas mudanças de temperatura e conseqüentemente nas diferenças das análises mecânica e termomecânica.

Desta forma, enfatiza-se a importância de se considerar os efeitos térmicos na análise estrutural, visto que o acoplamento termomecânico pode promover efeitos de segunda ordem, acarretando em redistribuição significativa dos esforços.

Além da abordagem dos efeitos térmicos em estruturas de pórtico discretizadas com elementos finitos de sólido, sugere-se para trabalhos futuros, desenvolver um estudo considerando o atrito, principalmente em problemas de impacto bidirecional, para assim avaliar a influência de tais efeitos na direção transversal das estruturas submetidas a mudanças repentinas de configuração. Para tanto, como indicado em Greco (2004), é interessante adotar o processo iterativo de Newton-Raphson modificado para o impacto de estruturas apertadas, posto a vantagem de a Matriz Hessiana permanecer inalterada no processo iterativo, mesmo necessitando de mais iterações para a convergência do problema. O mesmo autor considera o atrito em problemas de contato/impacto através do emprego do modelo de atrito de Coulomb, sendo este amplamente adotado para tais tipos de problema.

Ainda como sugestão para futuros desenvolvimentos, a análise de estruturas muito esbeltas e leves submetidas a elevados gradientes de temperatura podem

contribuir bastante para o estudo da Termomecânica. Como também, inserir no aplicativo desenvolvido a transmissão de calor por radiação e convecção.

## Referências Bibliográficas

Armero, F.; Petocz, E. (1998): **Formulation and analysis of conserving algorithms for frictionless dynamic contact-impact problems**. *Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 158, n. 3-4, p. 269-300.

Assan, A. E. (1999). **Método dos elementos finitos: Primeiros passos**. Campinas-SP, Editora Unicamp.

Bathe, K. J. (1996): **Finite Element Procedures**. 1<sup>nd</sup> ed., *Prentice Hall*, New Jersey, p. 1052.

Bathe, K. J. (1982): **Finite Element Procedures in Engineering Analysis**. 1<sup>nd</sup> ed., Prentice, New Jersey, p. 735.

Bathe, K. J.; Chaudhary, A. B. (1985). **A solution method for planar and axisymmetric contact problems**. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 21, p. 65-88.

Bathe, K. J.; Wilson, E. L. (1973): **Stability and accuracy analysis of direct integration methods**. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 1, p. 283-291.

Benzerga, A. A.; Bréchet, Y.; Needleman, A.; Giessen, E. V. D. (2005): **The stored energy of cold work – Predictions from discrete dislocation plasticity**. *Acta Materialia*, vol. 53, p. 4765-4779.

Bever, M. B.; Holt, D. L.; Titchener, A. L. (1973): **The stored energy of cold work**. *Mechanics of Materials*, vol. 17, p. 1-190.

Biggs, J. M. (1964). **Introduction to structural dynamics**. New York, McGraw-Hill.

Biot, M. A. (1956): **Thermoelasticity and irreversible thermodynamics**. *Journal of Applied Physics*, vol. 27, n. 3, p. 240-253.

Boley, B. A.; Tolins, I. S. (1962): **Transient coupled thermoelastic boundary value problems in the half-space.** *Journal of Applied Mechanics*, vol. 29, n. 4, p. 637-646.

Bottura, H. M. (1997): **Uma família de algoritmos hermitianos para a integração direta das equações de dinâmica das estruturas.** Tese (Doutorado), Curso de Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos, 192 p.

Boulangier, T. *et al.* (2004): **Calorimetric analysis of dissipative and thermoelastic effects associated with the fatigue behavior of steels.** *International Journal of Fatigue*, vol. 26, n. 3, p. 221–229.

Burns, J. A.; Liu, Z.; Zheng, S. (1993): **On the energy decay of a linear thermoelastic bar.** *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 179 574–591.

Canadija, M.; Brnic, J. (2004): **Associative coupled thermoplasticity at finite strains with temperature-dependent material parameters.** *International Journal of Plasticity*, vol. 20, p. 1851-1874.

Carpenter, N. J.; Taylor, R. L.; Katona, M. G. (1991): **Lagrange constraints for transient finite element surface contact.** *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 32, n. 1, p. 103-128.

Carrazedo, R. (2009): **Estudo e desenvolvimento de código computacional para análise de impacto entre estruturas levando em consideração efeitos térmicos.** Tese (Doutorado), Curso de Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos, 152 p.

Carrazedo, R.; Coda, H. B. (2010): **Alternative positional FEM applied thermomechanical impact of truss structures.** *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 46, p. 1008-1016.

Cavalcante, J. P. B. (2016): **Contribuição ao estudo de treliças não lineares considerando efeitos térmicos.** Dissertação (Mestrado). Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 139 p.

Chen, H. T.; Chen, T. M.; Chen, C. K. (1987): **Hybrid laplace transform-finite element method for one-dimensional transient heat conduction problems.** *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 63, n. 1, p. 83-95.

Chen, W. F.; Han D. J. (1988): **Plasticity for structural engineers**. 1<sup>nd</sup> ed., *Springer-Verlag*, New York, p. 610.

Chung, J.; Lee, J. M. (1994): **A new family of explicit time integration methods for linear and non-linear structural dynamics**. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 37, n. 23, p. 3961-3976.

Coda, H. B. (2003): **Análise não linear geométrica de sólidos e estruturas: uma formulação posicional baseada no MEF**. Tese (Texto complementar para concurso de professor titular), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

Coda, H. B. (2009): **A solid-like FEM for geometrically non-linear 3D frames**. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 198, n. 47-48, p. 3712–3722.

Coda, H. B.; Greco, M. (2004): **A simple FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description**. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 193, n. 33-35, p. 3541–3557.

Coda, H. B.; Oliveira, M. G; Paccola, R. R. (2005): **Simulação de motor acombustão utilizando formulação não linear geométrica**. In: *XXVI Congresso latinoamericano de métodos computacionais em engenharia*, Guarapari, Espírito Santo, Brasil.

Coda, H. B.; Paccola, R. R. (2008): **Positional FEM formulation for geometrically non-linear shells**. *Latin American Journal of Solids and Structures*, vol. 5, n. 3, p. 205-223.

Coimbra, A. L. (1978): **Lições de Mecânica do Contínuo**. *EDUSP/Edgard Blucher*. São Paulo.

Copetti, M. I. M. (1999): **Finite element approximation to a contact problem in linear thermoelasticity**. *Mathematics of Computation*, vol. 68, n. 227, p. 1013-1024.

Copetti, M. I. M. (2002): **A one-dimensional thermoelastic problem with unilateral constraint**. *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 59, n. 4, p. 361-376.

Cook, R. D. (2001): **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. 3 ed. *John Wiley & Sons Inc*, New York.

Cook, R.D.; Malkus, D.S.; Plesha, M.E. (1989): **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**, 3<sup>rd</sup> ed. *John Wiley & Sons*.

Cook, R. D.; Malkus, D. S.; Plesha, M. E.; Witt, R. J. (2002): **Concepts and applications of finite element analysis**. 4<sup>th</sup> ed., *John Wiley & Sons Inc*, New York, p. 733.

Craig Jr., R. R. (1981): **Structural dynamics – An introduction to computer methods**. 1<sup>st</sup> ed., *J. Wiley*, New York, p. 527.

Danilovskaya, V. (1950): **Thermal stresses in an elastic half-space due to sudden heating of its boundary**. *Prikl. Mat. Mekh.*, vol. 14, p. 316-324.

Dhaliwal R., Sherief H. (1980): **Generalized thermoelasticity for anisotropic media**. *Quart. Appl. Math.*, vol. 33, p.1–8.

Dill, E. H. (2007): **Continuum mechanics – elasticity, plasticity, viscoelasticity**. 1<sup>st</sup> ed., *CRC Press – Taylor & Francis Group*, Boca Raton, p. 368.

Dillon, O. W. (1963): **Coupled thermoplasticity**. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 11, p. 21-33.

Dokainish, M. A., and Subbaraj, K. (1989): **A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics-I Explicit methods**. *Computers & Structures*, vol 32, n<sup>o</sup> 6, p. 1371-1386.

Duhamel, J. M. C. (1837): **Second mémoire sur les phénomènes thermo-mechanique**. *Journal de L'Escole Polytechnique*, vol. 15, n. 25, p. 1–57.

Escalona, J. L.; Hussien, H. A.; Shabana, A. A. (1998): **Application of the absolute nodal co-ordinate formulation to multibody system dynamics**. *Journal of sound and vibration*, vol.214, p.833-851.

Farren, W. S.; Taylor, G. I. (1925): **The heat developed during plastic extension of metals**. *Proceedings of the Royal Society of London*, vol. 107, p. 422-451.

Ferreira, I. P. (2009): **Análise dinâmica não linear geométrica de treliças espaciais**. Dissertação (Mestrado), Curso de Engenharia Civil, Centro Federal de educação Tecnológica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 169 p.

- Gere, J. M. (2003): **Mecânica dos materiais**. 5 ed. São Paulo: Thomson.
- Greco, M. (2004): **Análise de problemas de contato/impacto em estruturas de comportamento não-linear pelo método dos elementos finitos**. Tese (Doutorado), Curso de Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos, 163 p.
- Greco, M; Coda, H. B. (2006): **Positional FEM formulation for flexible multi-body dynamic analysis**. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 290, p. 1141–1174.
- Hakansson, P. *et al.* (2005): **Comparison of isotropic hardening and kinematic hardening in thermoplasticity**. *International Journal of Plasticity*, vol. 21, p. 1435-1460.
- Hibeller, R. C. (2004): **Resistência dos Materiais**. 5 ed. São Paulo: Prentice Hall.
- Holzapfel, G. A. (2000): **Nonlinear Solid Mechanics – A Continuum Approach for Engineering**. Chichester, England: John Wiley & Sons Ltd., 455p.
- Holzapfel, G. A. (2004): **Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering**. 2 ed. Chichester, Inglaterra: John Wiley & Sons.
- Houbolt, J. C. (1950): **A Recurrence matrix solution for the dynamic response of aircraft**. *Journal of Aeronautical Sciences*, vol. 17, p. 540-550.
- Hu, N. (1997): **A solution method for dynamic contact problems**. *Computer & Structures*, vol. 63, n. 6, p. 1053-1063.
- Hughes, T. J. R. (1987): **The finite element method – Linear static and dynamic; Finite element analysis**. 1<sup>nd</sup> ed., Prentice Hall, New Jersey, p. 825.
- Hughes, T. J. R. (2000): **The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis**. New York, Dover Publications INC.
- Kamlah, M.; Haupt, P. (1998): **On the macroscopic description of stored energy and self heating during plastic deformation**. *International Journal of Plasticity*, vol. 13, n. 10, p. 893-911.

Kapoor, R.; Nemat-Nasser, S. (1998): **Determination of temperature rise during high strain rate deformation.** *Mechanics of Materials*, vol. 27, n. 1, p. 1-12.

Khalifa, M. E.; El-Rahman, R. G. A.; Ghonamy, M. I. (2004): **Some new exact solutions for linear thermoelastic system.** *Applied Mathematics and Computation*, vol. 147, n. 3, p. 773-787.

Kolupaeva, S.; Semenov, M. (2015): **The stored energy of plastic deformation in crystals of face-centered cubic metals.** *Materials Science and Engineering*, vol. 71, p. 1-6.

Lacerda, E. G. M. (2014): **Análise não linear de treliças pelo método dos elementos finitos posicional.** Dissertação (Mestrado), Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 107 p.

Lee, K-C; Chang, S-p; Park, J-I; Kim, S-B, (2011): **Reference Coordinate System of Nonlinear Beam Element Based on the Geometrically Exact Formulation under Large Spatial Rotations and Deformations.** *Scientific Research*, vol 3, n 1.

Lemonds, J.; Needleman, A. (1986): **Finite element analyses of shear localization in rate and temperature dependent solids.** *Mechanics of Materials*, vol. 5, n. 4, p. 339-361.

Lewis, R. W, *et al.* (1996): **The Finite Element Method in Heat Transfer Analysis.** 1. ed. Chichester, Inglaterra: John Wiley & Sons.

Lewis, R. W.; Nithiarasu, P.; Seetharamu, K. N. (2004): **Fundamentals of the finite element method for heat and fluid flow.** 1nd ed., John Wiley & Sons, p. 356.

Lord, H. W.; Shulman, Y. (1967): **A generalized dynamical theory of thermoelasticity.** *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 15, p. 299-309.

Loureiro, F. S. (2007): **Métodos de Integração Temporal Baseados no Cálculo Numérico de Funções de Green através do Método dos Elementos Finitos.** Dissertação (Mestrado), Curso de Ciências em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 128 p.

Maciel, D. N.; Coda, H. B. (2005): **Positional description for nonlinear 2-D static and dynamic frame analysis by FEM with Reissner kinematics.** *Third MIT conference on com. Fluid and sol. Mech., Cambridge, Massachussets, USA.*

Maciel, D. N.; Greco, M.; Coda, H.B. (2004): **Positional description for nonlinear 2D frames analysis by FEM with reissner kinematics**. *XXV CILAMCE, Recife-PE*.

Maciel, D. N. (2008): **Análise de problemas elásticos não-lineares geométricos empregando o método dos elementos finitos posicional**. Tese (Doutorado em Engenharia). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, 180 p.

Marques, G. C. S. C. (2006): **Estudo e desenvolvimento de código computacional baseado no método dos elementos finitos para análise dinâmica não linear geométrica de sólidos bidimensionais**. Dissertação (Mestrado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 103 p.

Martins, C. J. (2004): **Condições iniciais em propagação de ondas elásticas através do método dos elementos finitos nos domínios do tempo e da frequência**. Tese (Doutorado). Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 158 p.

Minski, R. L. (2008): **Aprimoramento de formulação de identificação e solução do impacto bidimensional entre estrutura e anteparo rígido**. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 148 p.

Morini, R. P. (2009): **Método dos Elementos Finitos Posicional Aplicado à Análise Estática de Risers**. Dissertação (Mestrado). Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 145 p.

Mroz, Z.; Oliferuk, W. (2002): **Energy balance and identification of hardening moduli in plastic deformation processes**. *International Journal of Plasticity*, vol. 18, n. 3, p. 379-397.

Neto, J. M. (1998): **Um estudo da formulação de modelos constitutivos viscoelásticos e elasto-viscoplásticos e do emprego de algoritmos implícitos e explícitos para a sua integração numérica**. Tese (Doutorado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 251 p.

Neumann, F. (1885): **Vorlesungen Uber die Theorie der Elasticitat**. Meyer, Brestau.

Ogden, R. W. (1984): **Non-linear elastic deformation**. Chichester, Ellis Horwood.

Oliferuk, W.; Swiatnicki, W. A.; Grabski, M. W. (1993): **Rate of energy storage and microstructure evolution during the tensile deformation of austenitic steel.** *Materials Science and Engineering A*, vol. 161, n. 1, p. 55-63.

Oliveira, M. O. (2012): **Análise dinâmica não linear de problemas envolvendo massas móveis aplicadas em cabos e elementos de viga.** Dissertação (Mestrado), Curso de Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 182 p.

Parkus, H. (1976): **Thermoelasticity.** 2<sup>nd</sup> ed., Springer-Verlag, Vienna, p. 126.

Pascon, J. P. (2008): **Modelos constitutivos para materiais hiperelásticos – estudo e implementação computacional.** Dissertação (Mestrado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 232 p.

Pascon, J. P. (2012): **Sobre modelos constitutivos não lineares para materiais com gradação funcional exibindo grandes deformações – implementação numérica em formulação não linear geométrica.** Tese (Doutorado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 480 p.

Perzyna, P.; Sawczuk, A. (1973): **Problems in thermoplasticity.** *Nuclear Engineering and Design*, vol. 24, p. 1-55.

Proença, S. P. B. (1988): **Sobre modelos matemáticos do comportamento não-linear do concreto – análise crítica e contribuições.** Tese (Doutorado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 330 p.

Proença, S. P. B. **Análise não-linear de estruturas.** Capítulo 6 (Teoria da Plasticidade) São Carlos, SP: 2007. (Notas de Aula).

Ramos, A. P. F.; Coda, H. B.; Paccola, R. R., (2009): **Aprimoramento de formulação do MEF para barra geral laminada tridimensional pela consideração da cinemática de empenamento para seção qualquer.** *Cadernos de Engenharia de Estruturas*, São Carlos, v. 11, n. 49, p. 179-196.

Reis, M. C. J. (2012): **Análise não linear geométrica de pórticos planos considerando ligações semirrígidas elastoplásticas.** Dissertação (Mestrado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 118 p.

Reissner E. (1972): **On One-Dimensional Finite-Strain Beam Theory: The Plane Problem.** *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)*, vol. 23, n. 5, 1972, p. 795-804.

Rigobello, R. (2011): **Desenvolvimento e aplicação de código computacional para análise de estruturas de aço apertadas em situação de incêndio.** Tese (Doutorado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 296 p.

Rigobello, R.; Coda, H. B.; Munaiar Neto, J. (2014): **A 3D solid-like frame finite element applied to steel structures under high temperatures.** *Journal Finite Elements in Analysis and Design*, vol 91, p. 68–83

Riks, E. (1972): **The application of Newton's methods to the problem of elastic stability.** *Journal of applied mechanics*, v.39, p.1060-1066.

Rittel, D. (1999): **On the conversion of plastic work to heat during high strain rate deformation of glassy polymers.** *Mechanics of Materials*, vol. 31, p. 131-139.

Rittel, D.; Kidane, A. A.; Alkhader, M.; Venkert, A.; Landau, P.; Ravichandran, G. (2012): **On the dynamically stored energy of cold work in pure single crystal and polycrystalline copper.** *Acta Materialia*, vol. 60, p. 3719-3728.

Rosakis, P.; Rosakis, A. J.; Ravichandran, G.; Hodowany, J. (2000): **A thermodynamic internal variable model for the partition of plastic work into heat and stored energy in metals.** *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 48, p. 581-607.

Rubert, J. B. (1993): **Estudo do desempenho de algoritmos numéricos na solução de sistemas não-lineares de estruturas formadas por barras de treliça.** Tese (Doutorado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 105 p.

Sampaio, M. S. M. (2014): **Análise não linear geométrica de cascas laminadas reforçadas com fibras.** Tese (Doutorado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 190 p.

Sanches, R. A. K. (2011): **Sobre o acoplamento fluido-casca utilizando o método dos elementos finitos.** Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 228 p.

Sánchez, J. A. G.; Coda, H. B., (2011). **Desenvolvimento e implementação de estratégias numéricas para a análise dinâmica não-linear de risers utilizando o MEF.** *Cadernos de Engenharia de Estruturas*, São Carlos, v. 13, n. 59, p. 53-58.

Santaoja, K. (2004): **Gradient theory from the thermomechanics point of view.** *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 71, n. 4, p. 557-566.

Scott, N. H. (1996). **Connections between deformation-temperature and deformation-entropy constraints and near-constraints in thermoelasticity.** *International Journal of Engineering Science*, v. 34, n. 15, p. 1689–1704.

Scott, N. H. (2001). **Thermoelasticity with thermomechanical constraints.** *International Journal of Non-Linear Mechanics*, v. 36, n. 3, p. 549–564.

Serra, E.; Bonaldi, M. (2008): **A Finite Element Formulation for Thermoelastic Damping Analysis.** *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 78, n. 6, p. 671-691.

Sherief H. H. (1980): **On Generalized Thermoelasticity.** Ph.D. Thesis, University of Calgary, Canada.

Sherief, H. H.; Hamza, F. A.; Saleh, H. A. (2004): **The theory of generalized thermoelastic diffusion.** *International Journal of Engineering Science*, vol. 42, n. 5, p. 591-608.

Silveira, E. S. S. (2001): **Análise dinâmica de linhas de ancoragem com adaptação no tempo e subciclagem.** Tese (Doutorado), Curso de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 159 p.

Simo, J. C.; Hughes, T. J. R. (1998): **Computational inelasticity.** 1<sup>nd</sup> ed., Springer-Verlag, New York, p. 405.

Simo, J. C.; Miehe, C. (1992): **Associative coupled thermoplasticity at finite strains: Formulation, numerical analysis and implementation.** *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 98, p. 41-104.

Simo, J. C.; Hjelmastad, K. D.; Taylor, R. L. (1986): **Numerical formulations of elasto-viscoplastic response of beams accounting for the effect of shear.** *Comp. Meth. In appl. Mech. Eng.*, (42), 301-330.

Simo, J. C.; Vu-Quoc, L. (1986): **On the dynamics of flexible beams under large overall motions – the plane case: part 1.** *Journal of applied mechanics*, ASME, (53), 849-854.

Simo, J. C.; Vu-Quoc, L. (1986). **On the dynamics of flexible beams under large overall motions – the plane case: part 2.** *Journal of applied mechanics*, ASME, (53), 855-863.

Solberg, J. M.; Papadopoulos, P. (1998): **A finite element method for contact-impact.** *Finite Element in Analysis and Design*, vol. 30, n. 4, p. 297-311.

Soler, A. L.; Brull, M. A. (1965): **On solution to transient coupled thermoelastic problems by perturbation techniques.** *Journal of Applied Mechanics*, vol. 32, p. 389-399.

Souza, L. A. S.; Moura, C. A. (1997): **Diferença finita de quarta ordem para integração explícita no domínio do tempo de problemas elastodinâmicos.** *XVIII Ibero Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, CILAMCE, Brasília, v. II, pp. 767-774.

Tamma, K. K.; Zhou, X.; Sha, D. (2000): **The time dimension – A theory towards the evolution, classification, characterization and design of computational algorithms for transient-dynamic applications.** *Archives of Computational Methods in engineering*, vol. 7, n. 2, p. 67-290.

Taylor, G.; Quinney, H. (1934): **The latent energy remaining a metal after cold working.** *Proceedings of the Royal Society of London*, vol. 143, p. 307-326.

Taylor, R. L.; Papadopoulos, P. (1993): **On a finite element method for dynamic contact-impact problems.** *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 36, n. 12, p. 2123-2140.

Torres, I. F. R. (2003): **Desenvolvimento e aplicação do método dos elementos finitos generalizados em análise tridimensional não-linear de sólidos.** Tese (Doutorado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 262 p.

Vieira, L. C. L. M. (2004): **Estudo de algoritmos de integração elemento por elemento para análise dinâmica não linear de estruturas**. Dissertação (Mestrado), Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 121 p.

Vila Real, P. J. M. M. F. (1988): **Modelação por elementos finitos do comportamento térmico e termoelástico de sólidos sujeitos a elevados gradientes térmicos**. Tese (Doutorado). Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto, Porto, 186 p.

Warburton, G. B. (1990): **Assessment of Errors in the Newmark Method in Structural Dynamics**. *Earthquake Engineering & Structures Dynamics*, vol. 19, Issue 3, pp 456-467.

Wilson, E. L. (2002): **Three-dimensional static and dynamic analysis of structures**. 3<sup>rd</sup> ed., *Computers and Structures Inc.*, Berkeley, p. 423.

Wilson, E. L.; K. Bathe. (1973): **Stability and Accuracy Analysis of Direct Integration Methods**. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*. Vol. 1. pp. 283-291.

Xia, R. *et al.* (2014): **Dynamic Response of Two-Dimensional Generalized Thermoelastic Coupling Problem Subjected to a Moving Heat Source**. *Acta Mechanica Sinica*, vol. 27, n. 3, p. 300-305.

Yan, J. (1998): **Study of Bauschinger effect in various spring steels**. Dissertação (Mestrado). Curso de Ciências Aplicadas, Universidade de Toronto, Ottawa, 95 p.

Zhou, M.; Ravichandran, G.; Rosakis, A. J. (1996): **Dynamically propagating shear bands in impact-loaded prenotched plates – II, Numerical simulations**. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 44, n. 6, p. 1007-1032.

# APÊNDICES

## APÊNDICE A – FUNÇÕES DE FORMA

No caso geral, a variável de interesse na resolução do equacionamento dinâmico adotando-se o MEF posicional é a posição nodal, dada pela Eq. (1).

$$\mathbf{p}_i = \phi_{ij} p_i^j \quad (1)$$

Onde:  $p_i^j$  são os valores das posições nodais (para o pórtico plano, os três graus de liberdade  $X, Y$  e  $\Theta$ ).

De acordo com Assan (1999), como já mencionado,  $\phi_{ij}$  é o conjunto de funções de forma ou aproximadoras da família de polinômios de Lagrange. A matriz definida por  $\phi$  tem dimensão  $(3 \times 3m)$ , sendo dada por:

$$[\phi] = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & 0 & \dots & \phi_m & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & \dots & 0 & \phi_m & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & \dots & 0 & 0 & \phi_m \end{bmatrix} \quad (2)$$

Ou de forma compacta:

$$[\phi] = \begin{bmatrix} \phi_i & 0 & 0 \\ 0 & \phi_i & 0 \\ 0 & 0 & \phi_i \end{bmatrix}_i \quad (3)$$

Onde:  $m$  é o número de nós por elemento.

Fazendo uso da Eq. (4) é possível determinar os elementos da matriz de funções de forma.

$$\phi_i(\xi) = \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^m \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} \quad (4)$$

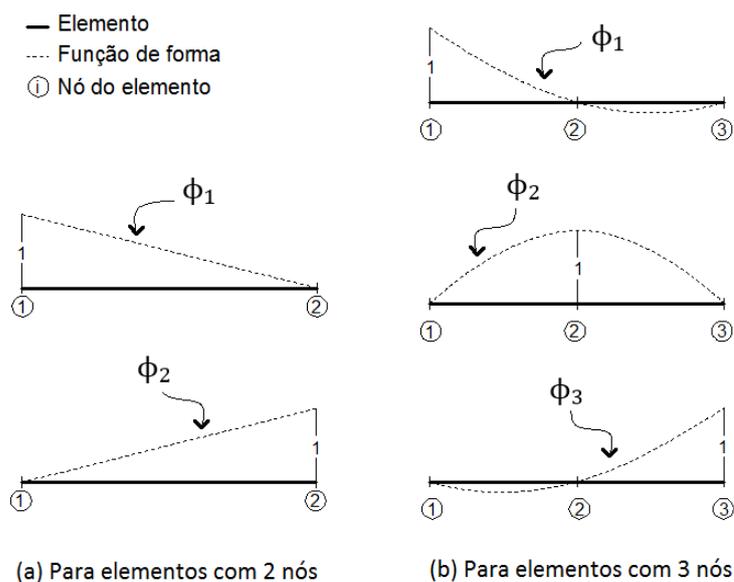
Onde:  $\xi$  é a variável adimensional na direção longitudinal.

A função de forma assume valor unitário para o ponto referente à própria função e valor nulo para as demais coordenadas, como resume a Eq. (5) e a Figura 1 abaixo,

que apresenta os exemplos para 2 e 3 nós por elemento. Vale salientar novamente, que a função aproximadora de um elemento com  $m$  nós, possui grau do polinômio de  $m - 1$ .

$$\phi_i(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi = \xi_i \\ 0, & \xi = \xi_i, i \neq j \end{cases} \quad (5)$$

Figura 1 – Funções de forma para 2 e 3 nós por elemento



Fonte: Elaborado pela autora

Adicionalmente, as derivadas das funções de forma podem ser determinadas através da Eq. (6).

$$\frac{d\phi_i(\xi)}{d\xi} = \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^m \frac{1}{\xi_i - \xi_j} \times \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^m \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} \quad (6)$$