



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

João Paulo de Barros Cavalcante

**CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO DE TRELIÇAS NÃO LINEARES
CONSIDERANDO EFEITOS TÉRMICOS**

**Natal
2016**

João Paulo de Barros Cavalcante

**CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO DE TRELIÇAS NÃO LINEARES
CONSIDERANDO EFEITOS TÉRMICOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, como requisito final para à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Nelson Maciel
Co-orientadora: Prof^a. Dr^a. Ada Cristina Scudelari

Natal
2016

UFRN / Biblioteca Central Zila Mamede
Catalogação da Publicação na Fonte

Cavalcante, João Paulo de Barros.

Contribuição ao estudo de treliças não lineares considerando efeitos térmicos / João Paulo de Barros Cavalcante. - Natal, RN, 2016.
128 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Nelson Maciel.

Coorientadora: Prof.^a Dr.^a Ada Cristina Scudelari.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.

1. Termomecânica - Dissertação. 2. Método dos elementos finitos posicional - Dissertação. 3. Termoelasticidade - Dissertação. 4. Termoplasticidade - Dissertação. 5. Integração temporal - Dissertação. 6. Não linearidade - Dissertação. I. Maciel, Daniel Nelson. II. Scudelari, Ada Cristina. III. Título.

RN/UF/BCZM

CDU 624.014.2:536.7

JOÃO PAULO DE BARROS CAVALCANTE

**CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO DE TRELIÇAS NÃO LINEARES
CONSIDERANDO EFEITOS TÉRMICOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, como requisito final para à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Daniel Nelson Maciel – Orientador (UFRN)

Prof^a. Dr^a. Ada Cristina Scudelari – Co-Orientadora (UFRN)

Prof. Dr. João Carlos Arantes Costa Júnior – Examinador Externo ao Programa (UFRN)

Prof. Dr. Marcelo Greco – Examinador Externo a Instituição (UFMG)

Natal, 11 de Março de 2016.

CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO DE TRELIÇAS NÃO LINEARES CONSIDERANDO EFEITOS TÉRMICOS

João Paulo de Barros Cavalcante

Orientador: Prof. Dr. Daniel Nelson Maciel

Co-orientadora: Prof^a. Dr^a. Ada Cristina Scudelari

RESUMO

O presente trabalho consiste na análise numérica via Método dos Elementos Finitos (MEF) de treliças submetidas as ações térmicas, mecânicas e suas respectivas interações. A metodologia proposta baseia-se no teorema da mínima energia potencial, escrita em relação as posições nodais ao invés dos deslocamentos para lidar com problemas termomecânicos, levando-se em consideração os efeitos das não linearidades física e geométrica. Referente aos problemas dinâmicos, a solução da equação de equilíbrio é alcançada através da discretização temporal perante diferentes algoritmos de integração temporal, explícitos e implícitos. A formulação é estendida para problemas de impacto entre treliças e anteparo rígido, onde as posições nodais são restringidas através da condição de penetração nula. Sendo assim, apresenta-se uma formulação termodinamicamente consistente, fundamentada na primeira e segunda lei da termodinâmica e na energia livre de Helmholtz, para analisar problemas dinâmicos de estruturas treliçadas com comportamento termoelástico e termoplástico. A implementação dos problemas consiste no desenvolvimento de rotinas computacionais, sendo os resultados numéricos da formulação proposta confrontados com exemplos encontrados na literatura especializada.

Palavras-chave: Método dos Elementos Finitos Posicional, Termomecânica, Termoelasticidade, Termoplasticidade, Integração Temporal, Não Linearidade.

CONTRIBUTION TO STUDY OF TRUSSES WITH NONLINEAR BEHAVIOR CONSIDERING THERMAL EFFECTS

João Paulo de Barros Cavalcante

Adviser: Prof. Dr. Daniel Nelson Maciel

Co-adviser: Prof^a. Dr^a. Ada Cristina Scudelari

ABSTRACT

This work presents the numerical analysis of nonlinear trusses submitted to thermomechanical actions with Finite Element Method (FEM). The proposed formulation is so-called positional FEM and it is based on the minimum potential energy theorem written according to nodal positions, instead of displacements. The study herein presented considers the effects of geometric and material nonlinearities. Related to dynamic problems, a comparison between different time integration algorithms is performed. The formulation is extended to impact problems between trusses and rigid wall, where the nodal positions are constrained considering null-penetration condition. In addition, it is presented a thermodynamically consistent formulation, based on the first and second law of thermodynamics and the Helmholtz free-energy for analyzing dynamic problems of truss structures with thermoelastic and thermoplastic behavior. The numerical results of the proposed formulation are compared with examples found in the literature.

Keywords: Positional Finite Element Method, Thermomechanical, Thermoelasticity, Thermoplasticity, Temporal Integration, Nonlinearity.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, João Agripino Cavalcante e Maria Daguia Barros, não só pelo apoio incondicional, incentivo e amor, mas também pela educação que me proporcionaram.

Ao meu orientador e co-orientadora, Prof. Dr. Daniel Nelson Maciel e Prof^a. Dr^a. Ada Cristina Scudelari, não apenas pela dedicação durante a realização deste trabalho, mas pela amizade, incentivo, disponibilidade, paciência e ensinamentos. Sem este enorme apoio com certeza a realização deste trabalho seria impossível.

Aos colegas do PEC, principalmente, Alexandre Gurgel e Hellyson Davidson, pelo companheirismo e amizade.

A todos os professores do PEC, em especial, Prof. Dr. Joel Araújo do Nascimento Neto, pelos conhecimentos transmitidos.

Ao pessoal da secretaria, Rafaella Kaline e Afra Dara, pela eficiência na execução do seu trabalho.

A banca examinadora, Prof. Dr. João Carlos Arantes Costa Júnior e Prof. Dr. Marcelo Greco, pelas valiosas contribuições para este trabalho.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa de estudos concedida.

SUMÁRIO

Lista de Figuras.....	ix
Lista de Tabelas.....	xi
Lista de Quadros.....	xi
Lista de Símbolos.....	xii
1 INTRODUÇÃO.....	1
1.1 Justificativa.....	2
1.2 Objetivos da pesquisa.....	3
1.3 Organização do trabalho.....	4
2 MODELOS ELASTOPLÁSTICOS.....	5
2.1 Modelo elastoplástico perfeito.....	7
2.2 Modelo elastoplástico com encruamento linear positivo.....	13
2.2.1 Modelo elastoplástico com encruamento isótropo.....	13
2.2.2 Modelo elastoplástico com encruamento cinemático.....	16
2.2.3 Modelo elastoplástico com encruamento misto.....	18
2.3 Algoritmo para a análise incremental-iterativa.....	19
3 MODELOS TERMOMECÂNICOS.....	22
3.1 Teoria clássica da termoelasticidade acoplada.....	24
3.1.1 Lei de Fourier.....	25
3.1.2 Primeira lei da termodinâmica.....	26
3.1.3 Equação diferencial de condução de calor.....	27
3.1.4 Princípio da taxa de trabalho.....	29
3.1.5 Segunda lei da termodinâmica.....	29
3.1.6 Energia livre de Helmholtz.....	30
3.1.7 Potencial elástico.....	31

3.1.8	Equação de condução de calor termoelástica.....	33
3.1.9	Equação de equilíbrio termoelástica.....	34
3.2	Termoplasticidade.....	35
3.2.1	Primeira e segunda lei da termodinâmica	36
3.2.2	Teoria das variáveis internas.....	36
4	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS APLICADO A TERMODINÂMICA	40
4.1	Discretização do problema de condução de calor	41
4.2	Integração temporal	44
5	FORMULAÇÃO POSICIONAL APLICADA A PROBLEMAS NÃO LINEARES	46
5.1	Funcional de energia potencial total	47
5.1.1	Balanço de energia.....	47
5.1.2	Energia total de deformação	50
5.1.3	Matriz de massa	52
5.1.4	Amortecimento	53
5.2	Método de Newton-Raphson	55
5.3	Passos algébricos necessários para a implementação da formulação	57
5.4	Métodos de integração temporal	59
5.4.1	Método implícito de Newmark	63
5.4.2	Método implícito de Houbolt	64
5.4.3	Método implícito α -Generalizado.....	66
5.4.4	Método implícito de Wilson- θ	69
5.4.5	Método explícito das Diferenças Centrais	71
5.4.6	Método explícito de Souza & Moura (1997)	73
5.4.7	Método explícito de Chung & Lee (1994)	74
5.5	Impacto de estruturas contra anteparos rígidos	76
6	APLICAÇÕES NUMÉRICAS	78

6.1	Barra com temperatura restrita	79
6.2	Barra com carregamento térmico	80
6.3	Treliça plana com temperaturas restritas	82
6.4	Treliça plana de duas barras	85
6.5	Cúpula treliçada com 24 barras	90
6.6	Impacto unidirecional entre barra e anteparo rígido.....	93
6.7	Viga treliçada	96
6.8	Barra sob carregamento elastoplástico	100
6.9	Cúpula treliçada com 168 barras	103
6.10	Impacto unidirecional com acoplamento termomecânico.....	106
6.11	Impacto entre treliça plana e anteparo rígido	111
7	CONCLUSÕES	114
	REFERÊNCIAS	117

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Curva tensão-deformação	7
Figura 2.2 – Modelo elastoplástico perfeito	8
Figura 2.3 – Ciclo de carga e descarga (Modelo elastoplástico perfeito)	9
Figura 2.4 – Modelo elastoplástico com encruamento isótropo.....	13
Figura 2.5 – Ciclo de carga e descarga (Modelo elastoplástico com encruamento)	14
Figura 2.6 – Modelo elastoplástico com encruamento cinemático	17
Figura 4.1 – Discretização de um sólido qualquer.....	41
Figura 5.1 – Parametrização espacial do elemento treliça.....	51
Figura 5.2 – Método de Newton-Raphson resolvendo a equação de equilíbrio	57
Figura 5.3 – Fluxograma da discretização temporal associada ao procedimento iterativo	62
Figura 5.4 – Condição de penetração nula.....	77
Figura 5.5 – Regiões de estabilidade para os parâmetros de Newmark γ e β	77
Figura 6.1 – Temperatura ao longo da barra.....	80
Figura 6.2 – Carregamento térmico.....	81
Figura 6.3 – Mudança de temperatura ao longo da barra	81
Figura 6.4 – Mudança de temperatura em diferentes posições.....	82
Figura 6.5 – Treliça plana.....	83
Figura 6.6 – Mudanças de temperatura na treliça plana	84
Figura 6.7 – Treliça constituída por dois elementos finitos.....	85
Figura 6.8 – Caso 1	86
Figura 6.9 – Caso 2.....	87
Figura 6.10 – Caso 3.....	88
Figura 6.11 – Cúpula treliçada com 24 barras.....	91
Figura 6.12 – Posições (Não linearidade geométrica).....	91
Figura 6.13 – Posições (Não linearidade física)	92

Figura 6.14 – Posições (Sem dissipação de energia)	92
Figura 6.15 – Posições (Com dissipação de energia)	93
Figura 6.16 – Esquema de impacto entre barra e anteparo rígido	94
Figura 6.17 – Velocidade do nó impactante	94
Figura 6.18 – Força de contato do nó impactante	95
Figura 6.19 – Viga treliçada.....	96
Figura 6.20 – Deslocamentos do nó 16.....	97
Figura 6.21 – Variação de temperatura no nó 2.....	98
Figura 6.22 – Distribuição de temperatura ao longo do tempo.....	99
Figura 6.23 – Fonte de calor termomecânica	101
Figura 6.24 – Mudança de temperatura no centro da barra	102
Figura 6.25 – Distribuição de temperatura ao longo da barra	102
Figura 6.26 – Cúpula treliçada com 168 barras.....	103
Figura 6.27 – Variação de temperatura no nó central	105
Figura 6.28 – Distribuição de temperatura na cúpula.....	105
Figura 6.29 – Velocidade do nó impactante	107
Figura 6.30 – Força de contato do nó impactante	107
Figura 6.31 – Mudança de temperatura ($\alpha = 0,11$)	108
Figura 6.32 – Mudança de temperatura ($\alpha = 0,17$)	109
Figura 6.33 – Mudança de temperatura ($\alpha = 0,23$)	110
Figura 6.34 – Esquema de impacto entre treliça plana e anteparo rígido	111
Figura 6.35 – Variação de temperatura nos nós impactantes	112
Figura 6.36 – Distribuição das temperaturas.....	113

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 – Derivadas da variável B	59
Tabela 5.2 – Métodos da família de Newmark (Vieira, 2004).....	63

LISTA DE QUADROS

Quadro 2.1 – Algoritmo - Modelo elastoplástico com encruamento misto.....	21
---	----

LISTA DE SÍMBOLOS

Γ – Fronteira

Γ_1 – Fronteira de Dirichlet ou essencial

Γ_2 – Fronteira Neumann ou natural

\bar{E} – Trabalho frio

F_{cont} – Forças de contato

F_{ext} – Forças externas

F_{int} – Forças internas

H_{elast} – Geração de calor associada as deformações elásticas

H_{plast} – Geração de calor associada as deformações plásticas

H_{tf} – Energia retida como trabalho frio

K_a – Perda de energia devido ao amortecimento

K_c – Energia cinética

Q_t, R_t – Contribuições do passado associadas aos esquemas de integração temporal

R_m – Fonte de calor mecânica

T_π – Período

U_e – Energia de deformação

X_0 – Posição inicial

c_e – Calor Específico

c_m – Coeficiente de amortecimento

ds_0, l_0 – Comprimento inicial

ds, l – Comprimento final

\dot{u} – Taxa de mudança de energia interna

u_e – Energia específica

\ddot{x} – Aceleração

\dot{x} – Velocidade

x – Posições Nodais

$\bar{\alpha}, \alpha_f, \alpha_m, \beta_c, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ – Parâmetros de dissipação numérica associados aos esquemas de integração temporal

δ_{ij} – Delta de Kronecker

ε – Medida de deformações

ε^e – Deformações elásticas

ε^p – Deformações plásticas

ε^θ – Deformações térmicas

θ_0 – Temperatura de referência

θ_w – Parâmetro de integração temporal de Wilson- θ

σ_Y – Tensão de escoamento

$\omega_{m\acute{a}x}$ – Máxima frequência natural

ΔQ – Variação de calor

ΔU – Variação de energia

ΔW – Variação de trabalho

Δt – Intervalo de integração temporal

Δt_{crit} – Intervalo de integração temporal crítico

$\Delta\lambda$ – Magnitude da evolução das variáveis associadas a plastificação

$\nabla g(X_0)$ – Matriz hessiana

Θ – Gradiente de temperatura

A – Área

B – Variável auxiliar utilizada para implementação do problema

C – Matriz de capacitância de calor, Matriz de amortecimento

E – Módulo de elasticidade longitudinal

F – Vetor de forças externas, Vetor de carregamento térmico

G – Módulo de elasticidade transversal

H – Módulo plástico de encruamento cinemático

K – Matriz de condução de calor, Módulo plástico de encruamento isótropo

M – Matriz de massa

P – Energia potencial das forças externas

Q – Calor gerado pelo sistema

R – Fonte de calor Interna

S – Entropia

T – Temperatura absoluta

V – Volume

W – Trabalho

g – Gravidade

$g(X)$ – Vetor de forças residuais

k – Coeficiente de condutividade térmica

m – Massa

n – Normal a superfície

q – Fluxo de calor pela superfície, Deslocamento do intervalo elástico inicial no encruamento cinemático.

t – Variável tempo

u – Energia interna

ν – Coeficiente de Poisson

v – Velocidade

z – Altura em relação ao referencial do sistema

Λ – Dissipação interna

Π – Funcional de energia potencial

Φ – Energia livre de Helmholtz

Ψ – Potencial elástico

Ω – Domínio

α – Coeficiente de expansão térmica

β, γ – Constantes de integração temporal de Newmark

δ – Distância entre anteparo rígido e estrutura

θ – Variação de temperatura

ξ – Variável Interna relativa ao endurecimento, Variável adimensional

ρ – Densidade do material

σ – Tensor de tensões

ω – Variável interna associada ao histórico das deformações plásticas

ϑ – Trabalho plástico convertido em calor

ϕ – Funções de forma

CAPÍTULO 1

Introdução

Inicialmente, a aplicação do Método dos Elementos Finitos (MEF) ficou limitada a solução de problemas lineares, isto é, aqueles onde existe uma dependência linear entre os deslocamentos sofridos e a força externa aplicada sobre o corpo em análise. Porém, em diversas situações a análise não linear é necessária, como no caso de estruturas esbeltas ou então estruturas expostas a ações excepcionais. O conteúdo dessa dissertação envolverá as não linearidades geométrica e física, provenientes da modificação da geometria e das propriedades físicas do material, respectivamente.

Os materiais exibem, normalmente, comportamento relativamente complexo (comportamento plástico e termoelastoplástico, por exemplo), tornando-se inevitável a adoção de modelos simplificados que disponibilizem soluções suficientemente próximas do comportamento real das estruturas. O comportamento plástico caracteriza-se pela manifestação de deformações irreversíveis, sendo que tais deformações surgem quando os níveis de tensão superam o denominado limite de plastificação.

A partir dos estudos de Duhamel e Neumann (Sherief *et al.*, 2004), percebeu-se que os modelos constitutivos não conseguiam representar com exatidão a resposta mecânica dos materiais, e desta forma, identificou-se a necessidade de modificar tais modelos de maneira a considerar as diferenças de temperatura.

Referente aos problemas que envolvem forças inerciais, ou seja, problemas dinâmicos, os procedimentos vêm sendo aperfeiçoados ao longo do tempo, destinando-se particularmente no campo dos métodos numéricos. Neste trabalho, a discretização temporal será realizada diante diferentes algoritmos de integração temporal, explícitos e implícitos.

Sendo conhecidas as propriedades dos materiais, as solicitações impostas e a geometria dos componentes, o objetivo da análise é determinar as respostas mecânica e térmica da estrutura, levando em consideração o seu comportamento não linear através da formulação baseada nas posições nodais dos elementos finitos.

Sendo assim, o presente trabalho consiste em estudar a resposta termomecânica para estruturas treliçadas, levando em consideração o comportamento não linear da estrutura através da formulação simples, denominada posicional, baseada no MEF, que utiliza como incógnitas do problema as posições nodais ao invés de deslocamentos. O MEF é desenvolvido em descrição lagrangiana total a partir da minimização do funcional de energia potencial total do sistema, empregando-se o método iterativo de Newton-Raphson. As estruturas analisadas são consideradas como constituídas de material homogêneo e isotrópico.

A implementação dos problemas consiste no desenvolvimento de rotinas computacionais utilizando a linguagem de programação Fortran, a partir de um código já existente (Greco *et al.*, 2006).

1.1 Justificativa

Devido ao avanço tecnológico e a utilização de materiais mais resistentes, estruturas mais complexas e esbeltas vêm sendo desenvolvidas, desta forma, o estudo da termomecânica e do comportamento não linear torna-se indispensável para a concepção de treliças mais leves e eficientes, dentro dos padrões de segurança e desempenho.

A treliça é uma estrutura simples e bastante difundida na engenharia, e assim a pesquisa desse elemento se justifica, pois, as principais características de elementos finitos mais complexos podem ser completamente aplicadas e estudadas nas treliças, tendo a vantagem de evitar a inerente complexidade das estruturas mais sofisticadas (Lacerda, 2014).

O interesse na termomecânica em problemas dinâmicos é motivado pela observação de que o acoplamento termomecânico pode ter efeito dominante nos resultados, haja visto que as tensões de origens térmicas podem alterar a distribuição dos esforços. Referente aos problemas de impacto, a relevância do acoplamento termomecânico está associada as altas taxas de deformação que tais problemas promovem, e, conseqüentemente, variações de temperatura mais expressivas.

Diante disso, a aplicação dos métodos numéricos na análise estrutural incorporando o tratamento dos efeitos não lineares e termomecânicos é indiscutível, representando com maior fidelidade o comportamento estrutural e contribuindo para o avanço no estudo das formulações para treliças.

1.2 Objetivos da pesquisa

Neste trabalho, a finalidade da análise dinâmica limita-se a verificação da influência das forças inerciais sobre as mudanças de temperatura e o seu efeito conjunto na resposta estrutural. Vale ressaltar que este trabalho não tem o objetivo de investigar os mecanismos de dissipação de energia, e sim, verificar a sua influência. Desta forma, a presente pesquisa tem os seguintes objetivos:

- Desenvolver código computacional consistente para análise de treliças pelo Método dos Elementos Finitos Posicional (MEFP), levando em consideração os efeitos das não linearidades em problemas termomecânicos;
- Comparar as respostas mecânica e termomecânica, afim de evidenciar os efeitos da termoelasticidade e termoplasticidade no comportamento estrutural;
- Avaliar o desempenho de diferentes algoritmos de integração temporal, explícitos e implícitos, através de aplicações numéricas, inclusive, abordando problemas de impacto;

- Referente a implementação da formulação não linear para problemas de impacto, tem-se como objetivo investigar a configuração exibida pela estrutura ao impactar;
- Verificar a confiabilidade do código desenvolvido através da comparação com resultados presentes na literatura especializada.

1.3 Organização do trabalho

O trabalho está descrito em sete capítulos. O primeiro capítulo consiste nos objetivos, justificativa e uma breve introdução.

O segundo capítulo refere-se a não linearidade física, onde apresenta-se os modelos elastoplástico perfeito e elastoplástico com encruamento, assim como o esquema para implementação dos mesmos. O terceiro capítulo é destinado a uma abordagem conceitual e matemática da termomecânica, particularmente, fundamenta-se as teorias da termoelasticidade acoplada e termoplasticidade. Enfatizando a discretização da equação diferencial de condução de calor, o quarto capítulo consiste na aplicação do MEF em problemas termomecânicos acoplados.

No quinto capítulo apresenta-se a formulação não linear posicional aplicada a problemas dinâmicos e a estratégia numérica adotada para a resolução do problema não linear, onde descreve-se os algoritmos de integração temporal utilizados e o esquema de impacto. O sexto capítulo apresenta as aplicações computacionais.

Por fim, no sétimo capítulo são apresentadas as conclusões da pesquisa e sugestões para trabalhos futuros.

CAPÍTULO 2

Modelos Elastoplásticos

Neste capítulo, especifica-se o procedimento não linear empregado para modelar o comportamento elastoplástico no âmbito unidimensional. Contudo, descrever e equacionar o comportamento dos materiais de maneira precisa é de extrema dificuldade, conseqüentemente, torna-se indispensável a utilização de modelos simplificados capazes de representar o comportamento real das estruturas com veracidade. Nesse estudo serão abordados os modelos elastoplástico perfeito e elastoplástico com encruamento. Este capítulo apoia-se nos trabalhos de Simo & Hughes (1998), Chen & Han (1988) e Dill (2007).

Tresca desenvolveu uma série de artigos entre 1864 e 1872, dando início a um novo campo de estudo da resistência dos materiais, a plasticidade, tal pesquisador realizou experimentos referente ao comportamento plástico de metais submetidos a grandes pressões, onde observou-se que o comportamento plástico surge quando a tensão máxima atinge um valor crítico (Chen & Han, 1988). Posteriormente, em 1870, a partir de uma série de publicações, Saint-Venant formalizou as equações fundamentais da plasticidade (Rubert, 1993).

Em 1879, Bauschinger desenvolveu um tipo de extensômetro que permitia medir alongamentos dos materiais ensaiados com precisão de 10^{-6} , desta forma, foi capaz de determinar a tensão de proporcionalidade dos materiais e percebeu que quando superado esse limite, seja na tração ou na compressão, surgiam deformações permanentes e os limites de proporcionalidade eram modificados (Rubert, 1993).

Referente ao regime plástico, quando os materiais são carregados e descarregados em uma direção axial e, em seguida, recarregados na direção inversa, eles podem obter durante a recarga, um nível de tensão menor do que o carregamento

realizado no sentido original (Yan, 1998). Este fenômeno é conhecido como efeito de Bauschinger. Em outras palavras, tal fenômeno está relacionado a condições de carregamento, no qual consiste em redução da tensão de escoamento sempre que a deformação imposta sobre um determinado material for invertida.

A movimentação relativa dos átomos promovida por determinada sollicitação, permite caracterizar dois tipos de deformação, elástica e plástica (Neto, 1998). Ainda de acordo com o autor, a nível microscópico, a deformação elástica surge devido ao movimento reversível dos átomos, uma vez que retirado o carregamento recupera-se a configuração atômica inicial, enquanto que a deformação plástica, surge devido ao movimento irreversível de linhas de discordâncias. Referente ao comportamento plástico com encruamento, caracteriza-se pelo aumento da densidade de discordâncias, provocado pela existência de defeitos que restringem o livre deslocamento de linhas de discordâncias.

O comportamento plástico de um material pode ser caracterizado, a nível macroscópico, pela ocorrência de deformações permanentes, ou seja, irrecuperáveis, observadas em um ciclo completo de carregamento e descarregamento (Schmidt, 2006). As deformações de caráter plástico surgem quando a tensão atuante excede a tensão de escoamento (σ_Y) do material.

Para o estudo do comportamento plástico em problemas unidimensionais, adota-se um ensaio uniaxial simples, ilustrado na Figura 2.1, onde é possível visualizar o comportamento típico de um determinado material, submetido à um crescente esforço de tração.

A Figura 2.1 esboça que até o nível da tensão de escoamento, referente ao trecho *OA*, a relação tensão-deformação é aproximadamente linear, no qual o comportamento elástico linear é descrito pela lei de Hooke. No momento que a tensão atuante ultrapassa a tensão de escoamento, após o ponto *A*, as propriedades físicas do material são modificadas através da reorganização interna dos cristais que constituem o material. Referente ao trecho *AB*, devido as mudanças do módulo de elasticidade longitudinal ao longo do processo, percebe-se que a inclinação da curva começa a reduzir gradativamente. O trecho *BC* caracteriza o descarregamento.

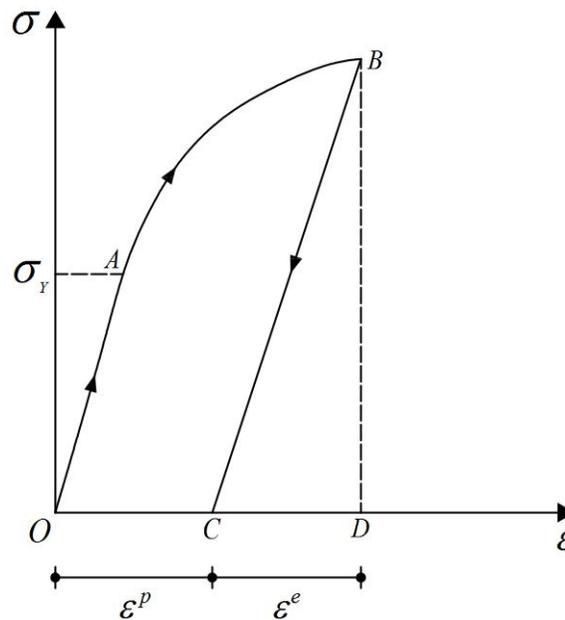


Figura 2.1: Curva tensão-deformação.

As deformações elásticas despertam simultaneamente com as tensões e persistem constantes ao longo do tempo, contanto que as tensões também continuem constantes. Neste caso, conjuntamente, as deformações e tensões extinguem-se diante de um processo total de descarregamento, sem nenhum valor residual.

A resolução dos problemas elastoplásticos é realizada mediante o emprego de modelos matemáticos, que descrevem o comportamento dos materiais e idealizam uma aproximação para a relação entre as tensões e deformações. Existe vários modelos disponíveis na literatura especializada, neste estudo enfatiza-se os modelos elastoplástico perfeito e elastoplástico com endurecimento linear. Por questão de praticidade, enfatiza-se o comportamento uniaxial de tração.

2.1 Modelo elastoplástico perfeito

A Figura 2.2 ilustra a relação tensão-deformação para o caso de tração uniaxial, idealizada através do modelo elastoplástico perfeito. Neste modelo, quando a tensão solicitante atingir o nível da tensão de escoamento, o corpo perde a capacidade de absorver acréscimos de tensão, ou seja, a tensão atuante jamais ultrapassa a tensão de

escoamento. Vale destacar que não existe encruamento nesse modelo e quando o patamar de escoamento é atingido o material escoou indefinidamente, onde todos os acréscimos de deformação são de natureza plástica.

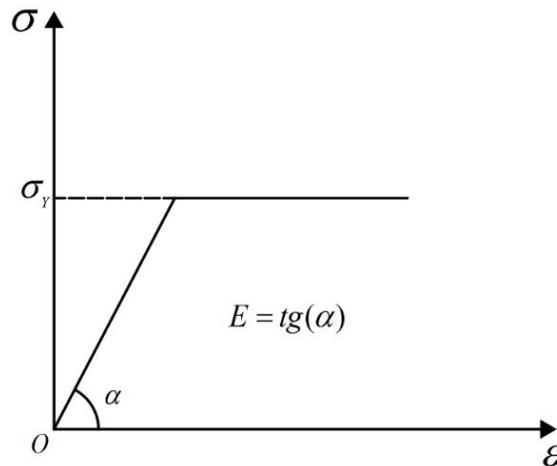


Figura 2.2: Modelo elastoplástico perfeito.

Sob outra perspectiva, do ponto de vista energético, as deformações permanentes constatadas em um processo de carregamento e descarregamento correspondem, na realidade, a energia dissipada ao longo do processo, conforme a Figura 2.3. Para o problema uniaxial, a quantidade de energia, de qualquer natureza, pode ser mensurada através do cálculo da área, delimitada pelas curvas de carga e descarga.

Para problemas elásticos, em um ciclo completo de carga e descarga, toda energia acumulada é liberada, ou seja, a dissipação de energia é uma característica única da plastificação. Vale destacar que, conforme os postulados de Drucker, ao longo do processo é impossível, fisicamente, que um sistema libere uma quantidade de energia maior do que a energia acumulada inicialmente (Proença, 1988). Portanto, diferente da elasticidade, a plastificação é consequência de processos particularmente dissipativos que se manifestam na microestrutura.

A partir da Figura 2.3 é possível observar que a deformação total, ao longo do regime elastoplástico, é dada pela soma das parcelas elástica e plástica. A existência de deformações plásticas concede as relações constitutivas um comportamento não linear. No regime plástico não existe proporcionalidade entre tensões e deformações, desta

forma, necessita-se conhecer o histórico do carregamento, que é distinguido pelo nível de energia dissipada.

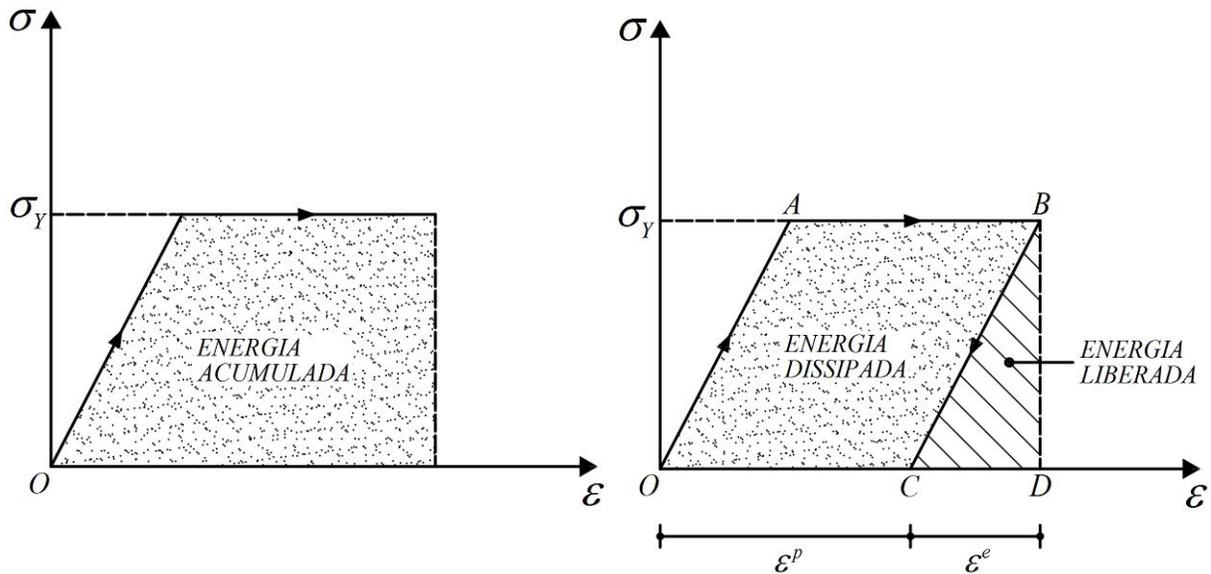


Figura 2.3: Ciclo de carga e descarga (Modelo elastoplástico perfeito).

Admite-se então, que os efeitos elástico e plástico podem ser analisados de forma desacoplada, ou seja, que a deformação total (ϵ) é definida pela soma das parcelas elástica (ϵ^e) e plástica (ϵ^p), de modo que:

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p \quad (2.1)$$

A relação linear entre tensão e deformação, em concordância com a lei de Hooke, pode ser expressa por:

$$\sigma = E\epsilon^e \quad (2.2)$$

Onde, σ representa a tensão e E o módulo de elasticidade longitudinal.

Manipulando-se a Equação (2.1) obtém-se a deformação elástica, dada por:

$$\epsilon^e = \epsilon - \epsilon^p \quad (2.3)$$

A relação constitutiva para o modelo elastoplástico unidimensional é obtida através das Equações (2.2) e (2.3), escrita da seguinte maneira:

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^p) \quad (2.4)$$

A partir da Equação (2.4), nota-se que a tensão é definida através da diferença entre a deformação total e a deformação plástica, na qual a existência da deformação plástica emprega à relação constitutiva um caráter não linear. Então, considerando a continuidade das funções que descrevem as tensões e deformações, em termos de incrementos infinitesimais, as deformações residuais surgem, ou apresentam alguma alteração, quando:

$$\Delta\varepsilon^p \neq 0 \quad (2.5)$$

Portanto, em termos incrementais, a relação entre tensão e deformação fica definida pelas seguintes expressões:

$$\Delta\sigma = E\Delta\varepsilon^e \quad (2.6)$$

$$\Delta\sigma = E(\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^p) \quad (2.7)$$

Conforme a Figura 2.3, no modelo elastoplástico perfeito, a tensão não pode exceder, em valor absoluto, a tensão de escoamento. A condição de plastificação é definida por uma função $f(\sigma)$, na qual todos os estados admissíveis de tensão satisfazem a seguinte inequação:

$$f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_Y \leq 0 \quad (2.8)$$

A partir da expressão (2.8) é possível diferenciar os regimes elástico e plástico. O desenvolvimento da plastificação, onde $\Delta\varepsilon^p \neq 0$, ocorre no momento que $f(\sigma) = 0$, ou seja, quando $|\sigma| = \sigma_Y$. Se o campo de tensão for $f(\sigma) < 0$, então, o material apresenta exclusivamente comportamento de natureza elástica, de maneira que:

$$\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^e \quad (2.9)$$

Logo,

$$\Delta\varepsilon^p = 0 \quad (2.10)$$

Sendo assim,

$$\Delta\sigma = E(\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^p) = E\Delta\varepsilon = E\Delta\varepsilon^e \quad (2.11)$$

Numa segunda situação, considerando-se $f(\sigma) = 0$, seja o novo estado definido por $f(\sigma + \Delta\sigma) = 0$, então, existe um acréscimo de deformação para o acréscimo de tensão. Portanto, referente a um incremento de tensão, $f(\sigma) = 0$ pode ser interpretado como critério para que haja variação de deformação plástica.

Além disso, define-se um escalar $\Delta\lambda$, que se remete ao valor absoluto do incremento de deformação plástica, caso exista. As deformações de origem plástica podem surgir tanto na compressão como na tração, no qual são válidas as seguintes relações:

$$\Delta\varepsilon^p = \Delta\lambda \geq 0 \quad \text{se} \quad \sigma = \sigma_Y (> 0) \quad (2.12)$$

$$\Delta\varepsilon^p = -\Delta\lambda \leq 0 \quad \text{se} \quad \sigma = -\sigma_Y (< 0) \quad (2.13)$$

Em consequência das Equações (2.12) e (2.13) apresentarem sinais idênticos, incorpora-se ao equacionamento um operador de sinal, definido por $sign(\cdot)$, responsável por indicar o sinal da tensão. Desta forma, pode-se escrever:

$$\Delta\varepsilon^p = \Delta\lambda sign(\sigma) \quad \text{se} \quad f(\sigma) = 0 \quad \text{com} \quad \Delta\lambda > 0 \quad (2.14)$$

Onde,

$$sign(\sigma) = -1, \quad \text{para} \quad \sigma < 0 \quad (2.15)$$

$$sign(\sigma) = +1, \quad \text{para} \quad \sigma > 0 \quad (2.16)$$

Simultaneamente, para qualquer estado de tensão, $f(\sigma) = 0$ e $\Delta\lambda$ obedecem a duas condições, denominadas de condição de complementaridade e de consistência.

A condição de complementaridade expõe o comportamento simultâneo do critério de plastificação e do incremento de deformação plástica. No regime elástico do modelo, tem-se:

$$\Delta\lambda = 0 \quad \text{e} \quad f(\sigma) < 0 \quad (2.17)$$

Enquanto que no regime plástico, observar-se que:

$$\Delta\lambda \geq 0 \quad \text{e} \quad f(\sigma) = 0 \quad (2.18)$$

Desta forma, a condição de complementaridade, através da combinação das Equações (2.17) e (2.18), pode ser expressa por:

$$\Delta\lambda f(\sigma) = 0 \quad (2.19)$$

Seja um estado atual de tensão, onde $f(\sigma) = 0$, considerando que no próximo incremento exista um $\Delta\lambda$ maior que zero, então o novo estado de tensão também deverá verificar o critério de plastificação, ou seja, $f(\sigma + \Delta\sigma) = 0$. Portanto, a condição de consistência garante que o carregamento de um estado plástico, irá conduzir a outro estado plástico, sendo que, enquanto o material permanecer em regime plástico, o critério de plastificação será atendido. Desta forma, sendo a função f continua, pode-se escrever:

$$f(\sigma + \Delta\sigma) = f(\sigma) + \Delta f(\sigma) \quad (2.20)$$

Isso posto, os regimes elástico e plástico podem ser descritos, respectivamente, pelas Equações (2.21) e (2.22).

$$\Delta\lambda = 0 \quad \text{e} \quad \Delta f < 0 \quad (2.21)$$

$$\Delta\lambda > 0 \quad \text{e} \quad \Delta f = 0 \quad (2.22)$$

A combinação das Equações (2.21) e (2.22) resulta na condição de consistência, dada por:

$$\Delta\lambda \Delta f = 0 \quad (2.23)$$

Portanto, vale reiterar que, no regime elastoplástico perfeito a tensão de escoamento condiz com a de colapso, no qual, atingido tal nível de tensão, as deformações evoluem de modo ilimitado.

2.2 Modelo elastoplástico com encruamento linear positivo

Neste modelo, o intervalo elástico inicial é modificado durante a evolução da plastificação, seja em tamanho (encruamento isótropo), posição (encruamento cinemático) ou numa combinação de ambos (encruamento misto). Tais modelo serão descritos no que segue.

2.2.1 Modelo elastoplástico com encruamento isótropo

A Figura 2.4 ilustra a relação entre tensão e deformação através do modelo elastoplástico com endurecimento linear isótropo. O modelo matemático com encruamento isótropo é caracterizado pela expansão do intervalo elástico $([-\sigma_Y, \sigma_Y])$ de modo simétrico ao seu centro. Referente ao regime plástico, a tensão varia de acordo com os acréscimos de deformação.

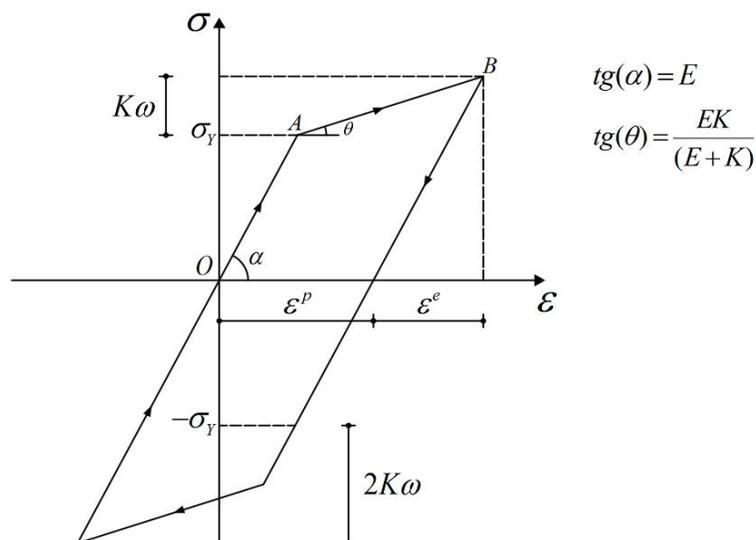


Figura 2.4: Modelo elastoplástico com encruamento isótropo.

Através da Figura 2.4 é possível observar que a tensão de escoamento e o limite elástico são variáveis, nos quais podem ser controlados pelo parâmetro de encruamento K . De maneira análoga ao modelo elastoplástico perfeito, para um ciclo completo de carga e descarga, a Figura 2.5 ilustra o modelo elastoplástico com encruamento sob perspectiva energética.

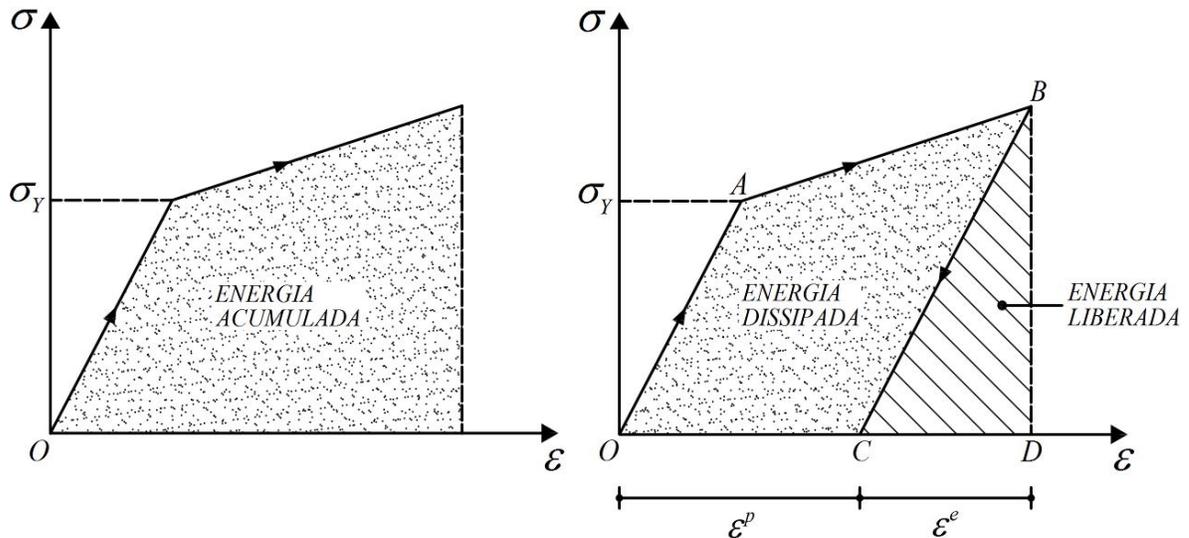


Figura 2.5: Ciclo de carga e descarga (Modelo elastoplástico com encruamento).

Analisando a Figura 2.4, em função do histórico da plastificação, percebe-se que o limite elástico inicial é modificado sucessivamente para $(-\sigma_Y + K\omega)$ e $(\sigma_Y + K\omega)$, indicado no eixo das tensões. O termo K é denominado de módulo plástico de encruamento isotrópico. O parâmetro ω é uma variável interna que registra o histórico das deformações plásticas. Referente a relação entre tensão e deformação, a interação entre K e ω define a inclinação da reta que representa o regime de endurecimento (trecho AB).

Normalmente, postula-se que o encruamento seja uma função da deformação plástica acumulada (Torres, 2003). Vale ressaltar que, a singular existência de deformação plástica em determinado instante, independente do sinal, é mais do que o necessário para promover a expansão do intervalo inicial das tensões admissíveis.

A lei de evolução do parâmetro ω está diretamente vinculada a lei de evolução das deformações plásticas, sendo:

$$\Delta\omega = |\Delta\varepsilon^p| \quad (2.24)$$

A Equação (2.24) declara que a evolução das deformações plásticas, seja por tração ou compressão, promove aumento do intervalo elástico inicial, em outras palavras, produz encruamento. Combinando a Equação (2.24) com (2.14), tem-se:

$$\Delta\omega = \Delta\lambda \quad (2.25)$$

Tendo em vista as condições expostas até o momento, o critério de plastificação pode ser modificado através da inserção do encruamento, conforme a expressão (2.26).

$$f(\sigma, \omega) = |\sigma| - (\sigma_Y + K\omega) \leq 0 \quad (2.26)$$

Vale destacar que as condições de complementaridade e consistência, discutidas anteriormente, continuam sendo pertinentes para o modelo com encruamento. Em conformidade com a Equação (2.26), tem-se as seguintes relações:

$$\Delta\varepsilon^p = \Delta\lambda \geq 0 \quad \text{se} \quad \sigma = (\sigma_Y + K\omega) \quad (> 0) \quad (2.27)$$

$$\Delta\varepsilon^p = -\Delta\lambda \leq 0 \quad \text{se} \quad \sigma = -(\sigma_Y + K\omega) \quad (< 0) \quad (2.28)$$

Portanto, a Equação (2.14) também é válida.

Através da condição de consistência pode-se estabelecer uma relação explícita para $\Delta\lambda$, visto que, a taxa de variação da função de tensão pode ser definida por:

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \Delta\sigma + \frac{\partial f}{\partial \omega} \Delta\omega \quad (2.29)$$

Recordando as Equações (2.7), (2.14), (2.25) e considerando $\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \text{sign}(\sigma)$, a expressão (2.29) pode ser rescrita da seguinte forma:

$$\Delta f = \text{sign}(\sigma)E\Delta\varepsilon - \Delta\lambda(E + K) \leq 0 \quad (2.30)$$

Considerando $\Delta f = 0$, conseqüentemente $\Delta\lambda > 0$, então:

$$\Delta\lambda = \frac{\text{sign}(\sigma)E\Delta\varepsilon}{(E + K)} \quad (2.31)$$

Manipulando-se as e Equações (2.7), (2.14) e (2.31), obtém-se:

$$\Delta\varepsilon^p = \frac{E\Delta\varepsilon}{(E + K)} \quad (2.32)$$

$$\Delta\sigma = \frac{EK}{(E + K)}\Delta\varepsilon \quad \text{se } \Delta\lambda > 0 \quad (2.33)$$

A relação $EK/(E + K)$ caracteriza o módulo elastoplástico tangente, alusivo ao intervalo de encruamento. Outrossim, combinando as Equações (2.32) e (2.33), obtém-se o significado físico do módulo plástico de encruamento, expresso por:

$$\frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon^p} = K \quad (2.34)$$

2.2.2 Modelo elastoplástico com encruamento cinemático

Diferente do modelo de encruamento isótropo, no modelo elastoplástico com encruamento cinemático não há alteração do tamanho do intervalo elástico inicial, porém, de acordo com o desenvolvimento do processo de plastificação, tal intervalo sofre mudança de posição no eixo das tensões.

A partir da Figura 2.6 é possível observar que o centro do intervalo elástico se desloca em sentido e quantidade, ambos controlados pelas deformações plásticas. Isto posto, tem-se que o deslocamento do intervalo fica caracterizado pela variável q , sendo na verdade, uma função da deformação plástica. A Figura 2.5 também é válida para este modelo. Ainda conforme a Figura 2.6, observa-se que a plastificação decorrente dos esforços de tração modifica o limite elástico à tração para $(\sigma_Y + q)$ e reduz (em módulo) o limite elástico à compressão. Essa “assimetria” induzida pelo modelo de encruamento

cinemático permite representar o efeito de Bauschinger (Torres, 2003), comum a um grande número de materiais.

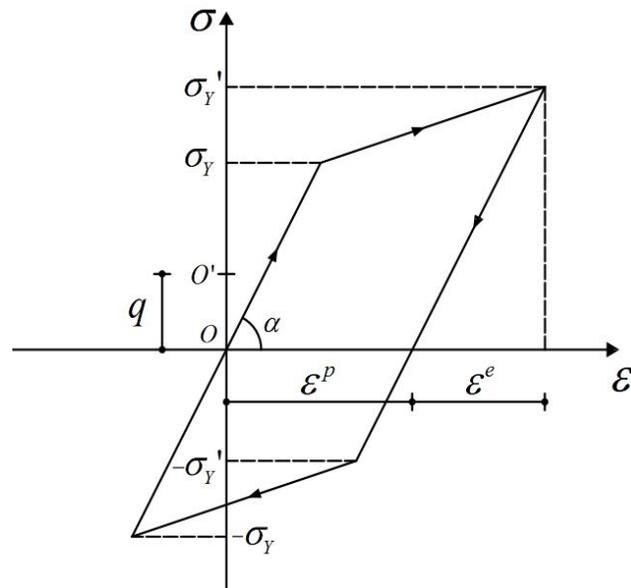


Figura 2.6: Modelo elastoplástico com encruamento cinemático.

Portanto, a lei de evolução do parâmetro q é descrita por:

$$\Delta q = H \Delta \varepsilon^p \quad (2.35)$$

Onde H é módulo plástico de encruamento cinemático.

Desta forma, o critério de plastificação fica definido por:

$$f(\sigma, q) = |\sigma - q| - \sigma_Y \leq 0 \quad (2.36)$$

De maneira análoga aos modelos anteriores, os incrementos de deformação plástica são definidos pelas seguintes condições:

$$\Delta \varepsilon^p = \Delta \lambda \geq 0 \quad \text{se} \quad \sigma - q = \sigma_Y \quad (> 0) \quad (2.37)$$

$$\Delta \varepsilon^p = -\Delta \lambda \leq 0 \quad \text{se} \quad \sigma - q = -\sigma_Y \quad (< 0) \quad (2.38)$$

Logo,

$$\Delta \varepsilon^p = \Delta \lambda \text{sign}(\sigma - q) \quad (2.39)$$

Sendo que,

$$\text{sign}(\sigma - q) = +1, \text{ para } (\sigma - q) > 0 \quad (2.40)$$

$$\text{sign}(\sigma - q) = -1, \text{ para } (\sigma - q) < 0 \quad (2.41)$$

Combinando-se as Equações (2.35) e (2.39), tem-se:

$$\Delta q = \Delta \lambda H \text{sign}(\sigma - q) \quad (2.42)$$

2.2.3 Modelo elastoplástico com encruamento misto

Através da combinação dos modelos vistos anteriormente, isótropo e cinemático, obtém-se o modelo elastoplástico com encruamento misto. Neste modelo, o critério de plastificação é dado por:

$$f(\sigma, q, \omega) = |\sigma - q| - (\sigma_Y + K\omega) \leq 0 \quad (2.43)$$

As definições e relações abordadas nos modelos anteriores complementam o modelo misto. De maneira análoga ao modelo com encruamento isótropo, através da condição de consistência obtém-se uma expressão explícita para $\Delta \lambda$, sendo:

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \Delta \sigma + \frac{\partial f}{\partial q} \Delta q + \frac{\partial f}{\partial \omega} \Delta \omega \quad (2.44)$$

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial |\sigma - q|} \frac{\partial |\sigma - q|}{\partial \sigma} \Delta \sigma + \frac{\partial f}{\partial |\sigma - q|} \frac{\partial |\sigma - q|}{\partial q} \Delta q + \frac{\partial f}{\partial \omega} \Delta \omega \quad (2.45)$$

Logo,

$$\Delta f = \text{sign}(\sigma - q) E \Delta \varepsilon - \Delta \lambda (E + H + K) \quad (2.46)$$

Tomando $\Delta f = 0$ tem-se $\Delta \lambda > 0$. De modo consequente, obtém-se:

$$\Delta\lambda = \frac{\text{sign}(\sigma - q)E\Delta\varepsilon}{(E + H + K)} \quad (2.47)$$

$$\Delta\varepsilon^p = \frac{E\Delta\varepsilon}{(E + H + K)} \quad (2.48)$$

$$\Delta\sigma = \frac{E(H + K)}{(E + H + K)}\Delta\varepsilon \quad (2.49)$$

2.3 Algoritmo para a análise incremental-iterativa

Para discretização através do MEF, por conveniência, para a análise não linear incremental-iterativa, emprega-se o procedimento em passo finito para a verificação do modelo constitutivo. Referente as expressões apresentadas anteriormente, a diferença conceitual é caracterizada pelo passo finito e não mais em forma infinitesimal.

Para um determinado passo $n + 1$ do procedimento, admite-se que o acréscimo de deformação total $\Delta\varepsilon_n$ é conhecido. Desta forma, deseja-se determinar os acréscimos $\Delta\varepsilon_n^p$, $\Delta\omega_n$ e $\Delta\sigma_n$, tais que as relações que descrevem o modelo constitutivo sejam analisadas no novo estado. Portanto, as variáveis de interesse ao final de cada passo são definidas por:

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \Delta\varepsilon_n \quad (2.50)$$

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta\varepsilon_n^p \quad (2.51)$$

$$\omega_{n+1} = \omega_n + \Delta\omega_n \quad (2.52)$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + \Delta\sigma_n \quad (2.53)$$

As relações apresentadas anteriormente continuam sendo válidas. Porém, particularmente, $f(\sigma) = 0$ deixa de ser condição necessária para que exista variação de deformação plástica, haja visto que pode haver evolução do comportamento plástico partindo-se de $f(\sigma) < 0$.

Empregar-se um algoritmo de resolução implícito, caracterizado por uma etapa de previsão e outra de correção. A etapa de previsão é retratada pelo critério de plastificação. Desta forma, obtém-se os valores da tensão total e da função de plastificação, denominados de tentativa, dados por:

$$\sigma_{n+1}^t = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p) \quad (2.54)$$

$$f_{n+1}^t = |\sigma_{n+1}^t - q_n| - [\sigma_Y + K\omega_n] \quad (2.55)$$

Caso f_{n+1}^t seja negativo, ou nulo, tem-se uma resposta puramente elástica, caso contrário, o passo tem caráter plástico. Caso exista manifestação das deformações plásticas, executa-se a etapa de correção ao longo do processo iterativo, onde os valores previstos são atualizados. O Quadro 2.1 esquematiza o algoritmo para a verificação em passo finito do modelo constitutivo elastoplástico com encruamento misto.

Quadro 2.1: Algoritmo – Modelo elastoplástico com encruamento misto.

A. Inicializações $\{\varepsilon_n^p, \omega_n, q_n\}$

B. Deformação total

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \Delta\varepsilon_n$$

C. Cálculo da tensão elástica e verificação do carregamento plástico

$$\sigma_{n+1}^t = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p)$$

$$f_{n+1}^t = |\sigma_{n+1}^t - q_n| - [\sigma_Y + K\omega_n]$$

C.1 Se $f_{n+1}^t \leq 0$ execute C.2, senão vá para C.3

C.2 Passo Elástico:

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p$$

$$\sigma_{n+1} = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p)$$

$$\omega_{n+1} = \omega_n$$

$$q_{n+1} = q_n$$

C.3 Passo Plástico:

$$\Delta\lambda_n = \frac{f_{n+1}^t}{E + K + H} > 0$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^t - E\Delta\lambda_n \operatorname{sign}(\sigma_{n+1}^t - q_n)$$

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta\lambda_n$$

$$q_{n+1}^p = q_n^p + H\Delta\lambda_n \operatorname{sign}(\sigma_{n+1}^t - q_n)$$

$$\omega_{n+1} = \alpha_n + \Delta\lambda_n$$

D. Fim

CAPÍTULO 3

Modelos Termomecânicos

A termomecânica refere-se a influência do estado térmico de um corpo sólido sobre a deformação e a influência da deformação no estado térmico. Em muitos casos, o efeito da deformação sobre o campo do estado térmico pode ser ignorado. Isto leva a uma análise termomecânica dissociada ou desacoplada, para a qual apenas o efeito do campo de temperatura na deformação está presente (Ortekus *et al.*, 2014).

A termoelasticidade pode ser definida como a parte da termomecânica que se ocupa em determinar a resposta de um corpo de comportamento elástico submetido a esforços térmicos e mecânicos. Segundo Sherief *et al.* (2004), o estudo da termomecânica teve início no século XIX por meio dos trabalhos de Duhamel em 1837 e Neumann 1885, onde introduziu-se a teoria da termoelasticidade desacoplada, sendo a determinação da resposta mecânica do corpo influenciada pela temperatura.

Os estudos experimentais e os modelos teóricos da termomecânica avançaram simultaneamente, onde a realização de experimentos mais refinados deu origem a modelos matemáticos mais precisos e eficientes. Seguindo o trabalho de Fourier em 1822, sobre condução térmica, Duhamel foi o primeiro pesquisador a estudar o comportamento termomecânico em sólidos, onde considerou a sobreposição dos problemas da elasticidade e condução térmica desacoplados, aplicado a problemas térmicos com geometrias esféricas e cilíndricas (Sadik & Yavari, 2015). Posteriormente, a formulação clássica da termoelasticidade desacoplada foi efetivada por Neumann em 1885 (Hetnarski & Eslami, 2009). Desde então, problemas elásticos desacoplados de condução de calor têm sido estudados extensivamente e várias soluções exatas e numéricas podem ser encontradas na literatura.

Os primeiros estudos foram dedicados a problemas estáticos. Danilovskaya (1950) foi o primeiro pesquisador a tentar incluir os efeitos de inércia em problemas transientes termoelásticos, embora tais problemas apresentassem natureza simples, a solução dos mesmos iluminou o processo de transmissão de tensões térmicas.

Porém, a teoria da termoelasticidade desacoplada estava em desacordo com resultados experimentais. Essa teoria pode não ser satisfatória para determinados problemas transientes, onde verificações experimentais mostram que a deformação influencia o estado térmico (Stanley, 2008). Stanley (2008), experimentalmente, enfatiza a influência da deformação no estado térmico.

Biot (1956) desenvolveu a teoria clássica da termoelasticidade acoplada, onde as equações da elasticidade e da condução de calor são interdependentes, desta forma, lidando com o desacordo citado anteriormente. Biot (1956), forneceu as equações que governam a teoria acoplada através da combinação da teoria da elasticidade com a primeira e segunda lei da termodinâmica. Nesta teoria, a equação que descreve a condução de calor é parabólica, sendo a velocidade de propagação de calor em um meio elástico infinita, novamente apresentando-se inconsistente frente as observações experimentais. Com esta motivação, surge a teoria da termoelasticidade generalizada.

A teoria da termoelasticidade generalizada foi sendo modificada ao longo dos anos. Na primeira teoria apresentada por Lord & Shulman (1967), a lei de condução de calor é alterada de maneira a considerar o fluxo de calor e sua derivada no tempo, onde se considerou um parâmetro de tempo de relaxamento para garantir velocidade finita de propagação de calor. Na segunda teoria desenvolvida por Green & Lindsay (1972), as equações constitutivas são modificadas por meio da inserção de dois parâmetros de tempo de relaxamento. Green & Naghdi (1993) fundamentaram uma nova teoria da termoelasticidade generalizada baseada nos balanços de energia e de entropia, em que a dissipação de energia não é permitida. Posteriormente, Green & Naghdi (1995) apresentaram o caso mais geral para a teoria da termoelasticidade generalizada, onde a dissipação de energia é levada em consideração.

Porém, tais teorias não conseguem descrever com fidelidade o comportamento termomecânico de corpos elastoplásticos, sendo assim, com o intuito de representar tal

comportamento com maior veracidade, Dillon Jr. (1963) desenvolveu a teoria da termoplasticidade.

Vaz Jr. *et al.* (2011) ressaltam que, apesar da solução do problema de condução de calor não manifestar grandes complexidades para a maioria dos materiais, a estratégia de modelamento da interdependência térmica e mecânica persiste sendo um desafio em problemas não-lineares. O estudo do comportamento não linear em problemas termomecânicos continua sendo tema de várias pesquisas, em distintas áreas, onde podemos destacar os trabalhos de Rajagopal (1995) e Rajagopal *et al.* (1996), Canadija & Brnic (2009), Ozakin & Yavari (2010) e Yavari & Goriely (2013).

A partir dessa breve introdução, tem-se na sequência uma revisão dos conceitos de termoelasticidade acoplada e termoplasticidade. A formulação exposta nesse capítulo encontra-se em Parkus (1976), Simo & Miehe (1992), Holzapfel (2000), Lewis *et al.* (2004) e Nicholson (2008). Ademais, notação indicial para o equacionamento é utilizada quando conveniente.

3.1 Teoria clássica da termoelasticidade acoplada

A teoria clássica da termoelasticidade retrata o comportamento elástico e térmico de meios elásticos e condutores de calor, em particular, as ações recíprocas entre as tensões elásticas e diferenças de temperatura (Khalifa *et al.*, 2004).

A termoelasticidade vem sendo empregada em diversas áreas, destacando-se a aplicação em problemas estáticos (Copetti, 1999; Shahani & Nabavi, 2007) e dinâmicos (Chen & Dargush, 1995; Norris, 2006; Shahani & Bashusqeh, 2014).

Outros métodos de análise têm sido adotados para lidar com problemas termoelásticos acoplados. Como por exemplo, Soler & Brull (1965) utilizaram técnicas de perturbação e, mais recentemente, Lychev *et al.* (2010) determinaram uma solução de forma fechada por uma expansão das próprias funções geradas pela condução de calor e equações de movimento.

Aproximações numéricas para equações termoelásticas são comumente encontradas utilizando-se o MEF. Modelos de MEF termoelástico transiente foram desenvolvidos por Nickell & Sackman (1968) e Ting & Chen (1982), sendo comparados com soluções analíticas para problemas unidimensionais. Rand & Givoli (1995) desenvolveram modelos dinâmicos termoelásticos de MEF.

Para materiais ortotrópicos, a descrição do comportamento termoelástico pode ser visto nos estudos de Lu & Pister (1975), Vujosevic & Lubarda (2002) e Lubarda (2004). Outra área de pesquisa, bastante difundida, é o estudo de estruturas com comportamento anisotrópico (Deb *et al.*, 1991; Li, 1992; Clayton, 2013; Mahmoud *et al.*, 2015)

Xia *et al.* (2014) desenvolveu um estudo focado na resposta dinâmica termoelástica bidimensional para um corpo isotrópico homogêneo submetido a uma fonte de calor. Serra & Bonaldi (2009) apresentaram uma formulação de elementos finitos para amortecimento termoelástico, onde o mesmo é obtido a partir do fluxo de entropia irreversível devido aos fluxos térmicos causados por variações de tensões volumétricas.

3.1.1 Lei de Fourier

A transmissão de calor pode ser interpretada como a propagação de energia entre regiões em um mesmo meio, decorrente da diferença de temperatura entre as mesmas. A condução é uma forma típica de transmissão de calor, consistindo na transferência de energia devido a interação entre as partículas que compõem o sistema.

A Equação (3.1) define a lei fundamental da transmissão de calor por condução, denominada de lei de Fourier, onde a mesma afirma que o fluxo de calor devido a condução térmica é proporcional a magnitude do gradiente térmico.

$$q_i = -k \frac{\partial T}{\partial n_i} \quad (3.1)$$

Onde q é o fluxo de calor pela superfície, n é a normal à superfície considerada, T é a temperatura e k é o coeficiente de condutividade térmica.

O sinal negativo da Equação (3.1) refere-se ao fato da transferência de energia positiva ocorrer em direção da diminuição da temperatura, ou melhor, na direção negativa do gradiente de temperatura.

3.1.2 Primeira lei da termodinâmica

A primeira lei da termodinâmica (Lei da conservação de energia) afirma que o acréscimo de calor e/ou trabalho, em um sistema inicialmente em repouso, resulta em acréscimos de energia do sistema. A partir de tal afirmação, o princípio da conservação da energia é expresso pela seguinte equação:

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta W \quad (3.2)$$

Sendo, ΔU a variação de energia, ΔQ a variação de calor e ΔW a variação de trabalho mecânico do sistema.

A primeira lei da termodinâmica estabelece que durante um processo cíclico qualquer, percorrido por um sistema, a integral cíclica (somatório sobre todo o ciclo), do calor é proporcional a integral cíclica do trabalho. A partir disto, tem-se:

$$\sum_{\text{ciclo}} Q = \sum_{\text{ciclo}} W \quad (3.3)$$

$$\oint Q = \oint W \quad (3.4)$$

A fim de obter uma forma mais adequada para a lei da conservação de energia, reescreve-se a mesma em termos do fluxo de calor. Logo:

$$\dot{Q} = \frac{du}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d(mv^2)}{dt} + \frac{d(mgz)}{dt} + W \quad (3.5)$$

Onde \dot{Q} representa o fluxo total de calor, m é a massa do sistema, v é a velocidade, g é a aceleração da gravidade e z é a altura em relação ao referencial do sistema.

A primeira parcela da Equação (3.5) refere-se a energia interna, enquanto que a segunda e terceira parcela representam, na devida ordem, a energia cinética e energia potencial.

A Equação (3.6) define o fluxo total de calor em um sistema. A primeira parcela corresponde ao fluxo de calor que entra ou sai da superfície, enquanto que a segunda parcela representa o calor gerado internamente.

$$\oint_A \dot{Q} dA = - \oint_A q_i n_i dA + \int_m R dm \quad (3.6)$$

Onde A e R definem a área e o calor gerado, respectivamente.

A expressão (3.7) expõe a equação de energia, obtida através da manipulação das Equações (3.5) e (3.6). A taxa de trabalho \dot{W} é definida pela soma das taxas de trabalho provenientes das forças externas, em virtude da consideração do peso próprio nas equações das forças de corpo. A velocidade fica definida pela primeira derivada das posições em relação ao tempo, indicada por \dot{x}_i .

$$\frac{d}{dt} \int_m u dm + \frac{d}{dt} \int_m \frac{1}{2} \dot{x}_i \dot{x}_i dm = \int_m R dm - \oint_A q_i n_i dA + \int_m F_i \dot{x}_i dm + \oint_A f_i \dot{x}_i dA \quad (3.7)$$

O primeiro e segundo termos do lado esquerdo da Equação (3.7) representam, nessa ordem, a energia interna do sistema e a energia cinética. O lado direito da Equação (3.7) abrange as fontes de calor interna, o fluxo de calor pela superfície do corpo e a taxa de trabalho das forças externas, respectivamente.

3.1.3 Equação diferencial de condução de calor

A determinação do campo de temperatura em um corpo é realizada através da solução da equação diferencial da condução de calor, sujeita a determinadas condições

iniciais e de contorno. A lei da conservação de energia (Equação (3.2)) pode ser reescrita contemplando somente a variação de energia calórica do sistema. Logo, tem-se a igualdade:

$$\Delta U = \Delta Q \quad (3.8)$$

Sendo o volume arbitrário (V), a variação de energia pode retratada da seguinte maneira:

$$\Delta U = \int_V \rho \frac{du}{dt} dV \quad (3.9)$$

Sendo ρ a densidade do material.

O calor específico é determinado pela variação de energia interna em relação a temperatura, expresso por:

$$c_e = \frac{du}{dT} \quad (3.10)$$

A partir das Equações (3.9) e (3.10), tem-se:

$$\Delta U = \int_V \rho \frac{du}{dT} \frac{dT}{dt} dV = \int_V \rho c_e \frac{dT}{dt} dV \quad (3.11)$$

Conforme mencionado anteriormente, a variação de calor é caracterizada por duas parcelas, referentes ao fluxo de calor que entra ou sai da superfície e o calor gerado internamente. A partir da lei de Fourier e do teorema de Gauss, o fluxo de calor pela superfície pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$-\oint_A q_i n_i dA = \int_V k \nabla^2 T dV \quad (3.12)$$

A Equação (3.13) é fruto do balanço de energia obtido pela combinação das Equações (3.6), (3.11) e (3.12), além da aplicação do teorema da conservação de massa.

$$\int_V \left(\rho c_e \frac{dT}{dt} - k \nabla^2 T - \rho R \right) dV = 0 \quad (3.13)$$

Para um volume arbitrário:

$$\rho c_e \frac{dT}{dt} - k \nabla^2 T - \rho R = 0 \quad (3.14)$$

3.1.4 Princípio da taxa de trabalho

Conforme o princípio da taxa de trabalho, a taxa da mudança de energia cinética é igual a taxa de trabalho de todas as forças externas e internas, definido por:

$$\frac{d}{dt} \int_m \frac{1}{2} \dot{x}_i \dot{x}_i dm = \int_m F_i \dot{x}_i dm + \oint_A f_i \dot{x}_i dA - \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV \quad (3.15)$$

Sendo $\dot{\epsilon}_{ij}$ o tensor de taxa de deformação e σ_{ij} o tensor de tensões.

A última parcela da Equação (3.15) representa o trabalho realizado pelas forças internas. Substituindo a Equação (3.15) em (3.7), aplicando-se o teorema de Gauss e o teorema da conservação de massa, tem-se:

$$\int_V (\dot{u} - R) \rho dV = \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV - \int_V q_{i,i} dV \quad (3.16)$$

3.1.5 Segunda lei da termodinâmica

A Equação (3.17) é denominada inequação de Clausius e diz que o trabalho é gerado a partir de uma diferença de temperatura entre dois corpos ou através do calor gerado por um meio externo, onde o calor irá fluir do corpo com maior calor para o corpo com menor calor.

$$\int_m \dot{S} dm \geq - \int_A \frac{q_i n_i}{T} dA + \int_m \frac{R}{T} dm \quad (3.17)$$

Onde S é a entropia, sendo sua taxa de mudança dada por \dot{S} , e T a temperatura absoluta.

A partir do teorema da conservação da massa e de Gauss, a inequação pode ser expressa por:

$$\int_V \dot{S} \rho dV \geq \int_V \frac{R}{T} \rho dV - \int_V \left(\frac{q_i}{T} \right)_{,i} dV \quad (3.18)$$

Para um volume arbitrário, a Equação (3.19) é obtida derivando-se a última parcela da Equação (3.18) em relação a posição.

$$\rho T \dot{S} \geq \rho R - q_{i,i} + \frac{q_i}{T} T_{,i} \quad (3.19)$$

A partir da combinação das Equações (3.19) e (3.16) tem-se a Equação (3.20), denominada inequação de Clausius-Duhem (Holzapfel, 2000; Santaoja, 2004).

$$\rho(\dot{u} - T\dot{S}) \leq \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{q_i}{T} T_{,i} \quad (3.20)$$

3.1.6 Energia livre de Helmholtz

A energia livre de Helmholtz é uma grandeza que mensura a quantidade de energia de um sistema que pode ser transformada em trabalho. As expressões (3.21) e (3.22) definem, respectivamente, a energia livre de Helmholtz (Φ) e sua taxa ($\dot{\Phi}$).

$$\Phi(\varepsilon_{ij}, T) = U - TS \quad (3.21)$$

$$\dot{\Phi}(\varepsilon_{ij}, T) = \dot{U} - T\dot{S} - \dot{T}S = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial \Phi}{\partial T} \dot{T} \quad (3.22)$$

Substituindo a Equação (3.22) em (3.16) e (3.20), nessa ordem, tem-se:

$$\left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}} - \sigma_{ij}\right) \dot{\varepsilon}_{ij} + \rho \left(\frac{\partial \Phi}{\partial T} + S\right) \dot{T} + \rho(T\dot{S} - R) + q_{i,i} = 0 \quad (3.23)$$

$$\left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}} - \sigma_{ij}\right) \dot{\varepsilon}_{ij} + \rho \left(\frac{\partial \Phi}{\partial T} + S\right) \dot{T} - \frac{q_i}{T} T_{,i} \leq 0 \quad (3.24)$$

Os termos $\dot{\varepsilon}_{ij}$ e \dot{T} são arbitrários, onde $q_{i,i}$, q_i e as expressões dentro dos parênteses devem respeitar a igualdade. Sendo assim,

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (3.25)$$

$$S = -\frac{\partial \Phi}{\partial T} \quad (3.26)$$

$$q_{i,i} = -\rho(T\dot{S} - R) \quad (3.27)$$

$$q_i T_{,i} \leq 0 \quad (3.28)$$

As Equações (3.25) e (3.26) são equações constitutivas do material, sendo que expressam a relação tensão-deformação e a entropia do sistema, respectivamente. A Equação (3.27) indica a equação de condução de calor. Substituindo as Equações (3.26) e (3.27) em (3.22), tem-se:

$$q_{i,i} = \rho T \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial T^2} \dot{T} \right) + \rho R \quad (3.29)$$

3.1.7 Potencial elástico

O potencial elástico (Ψ) define as propriedades elásticas de um corpo mediante a relação tensão-deformação. A relação tensão-deformação da Equação (3.25) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (3.30)$$

A expressão (3.31) apresenta a relação entre o potencial elástico e a energia livre de Helmholtz.

$$\Psi = \rho \phi \quad (3.31)$$

A partir da concepção que diferenças de temperatura provocam esforços internos e da lei de Hooke, tem-se a Equação (3.32).

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left(\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) + \alpha \theta \delta_{ij} \quad (3.32)$$

Onde ν é o coeficiente de Poisson, G é o módulo de elasticidade transversal, α é o coeficiente de expansão térmica e θ é a variação de temperatura.

A partir da inversa da Equação (3.32), com o objetivo de isolar as tensões, tem-se:

$$\sigma_{ij} = 2G \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \theta \delta_{ij} \right) \quad (3.33)$$

O delta de Kronecker (δ_{ij}) refere-se a deriva do traço do tensor de deformações ($\partial \varepsilon_{kk} / \partial \varepsilon_{ij}$). Logo, o potencial elástico é obtido através da integração da Equação (3.33) em relação a ε_{ij} , dado por:

$$\Psi = G \left(\varepsilon_{ij}^2 + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk}^2 - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \alpha \theta \varepsilon_{kk} \right) + f(\theta) \quad (3.34)$$

O termo $f(\theta)$ expressa uma característica não-linear térmica do material, onde tal termo pode assumir a configuração de uma função dependente somente da temperatura e de qualquer ordem (Carrazedo, 2009).

3.1.8 Equação de condução de calor termoelástica

O calor específico pode ser definido da seguinte maneira:

$$c_e = T \frac{\partial S}{\partial T} \quad (3.35)$$

A partir das Equações (3.26), (3.29) e (3.35) obtém-se a seguinte expressão para a condução de calor:

$$kT_{,ii} = \rho \left(c_e \dot{T} - R - T \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T} \dot{\varepsilon}_{ij} \right) \quad (3.36)$$

Lembrando-se que a temperatura absoluta (T) é equivalente a soma da temperatura de referência (θ_0) com a variação de temperatura (θ), onde a temperatura de referência é constante e não varia no tempo nem no espaço. Para uma pequena variação de temperatura, considera-se que a temperatura absoluta é a própria temperatura de referência. Sendo assim, a Equação (3.36) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$k\theta_{,ii} = \rho \left(c_e \dot{\theta} - R - \theta_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \theta} \dot{\varepsilon}_{ij} \right) \quad (3.37)$$

Substituindo a Equação (3.34) em (3.37), tem-se:

$$k\theta_{,ii} = 2G \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} \alpha \theta_0 \dot{\varepsilon}_{kk} + \rho c_e \dot{\theta} - \rho R \quad (3.38)$$

Por simplificação, o termo $f(\theta)$, quando derivado foi considerado constante em relação a temperatura.

3.1.9 Equação de equilíbrio termoelástica

Para apresentar a equação de equilíbrio termoelástica é necessário retomar o princípio da taxa de trabalho (Equação (3.15)). Sendo assim, para materiais com comportamento elástico, integra-se a parcela referente ao trabalho realizado pelas forças internas e aplica-se o teorema da divergência, respectivamente, conforme a Equação (3.39).

$$\begin{aligned} \int_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV &= \int_V \sigma_{ij} \dot{x}_{i,j} dV = \int_V (\sigma_{ij} \dot{x}_i)_{,j} dV - \int_V \sigma_{ij,j} \dot{x}_i \\ &= \oint_A \sigma_{ij} \dot{x}_i n_j dA - \int_V \sigma_{ij,j} \dot{x}_i dV \end{aligned} \quad (3.39)$$

Substituindo a Equação (3.39) em (3.15) e organizando os termos, tem-se:

$$\int_V (\sigma_{ij,j} + F_i - \dot{x}_i \rho) \dot{x}_i dV + \oint_A (f_i - \sigma_{ij} n_j) \dot{x}_i dA = 0 \quad \forall \dot{x}_i \quad (3.40)$$

A igualdade da Equação (3.40) deve ser atendida, para qualquer \dot{x}_i , logo:

$$\sigma_{ij,j} + F_i - \dot{x}_i \rho = 0 \quad \forall \dot{x}_i \in V \quad (3.41)$$

$$f_i = \sigma_{ij} n_j \quad \forall \dot{x}_i \in A \quad (3.42)$$

A expressão (3.41) define a equação de movimento, e a Equação (3.42) define o vetor de tensões. A partir da relação constitutiva termoelástica (Equação (3.33)), a equação do movimento pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\left[2G \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \theta \delta_{ij} \right)_{,j} \right] + F_i - \dot{x}_i \rho = 0 \quad (3.43)$$

O comportamento termomecânico de um corpo elástico e condutor de calor é descrito pelas equações de condução de calor transiente (Equação (3.38)) e equilíbrio

dinâmico local (Equação (3.43)), sendo estas as principais equações da teoria da termoelasticidade acoplada (Carrazedo, 2009).

3.2 Termoplasticidade

Desde os trabalhos experimentais de Farren & Taylor (1925) e Taylor & Quinney (1934) percebeu-se que parte do trabalho plástico era convertido em calor. Tais autores, através de vários experimentos, mensuraram o trabalho mecânico plástico convertido em calor. Destacando-se assim, a necessidade de estudar o comportamento termoplástico dos materiais.

Dillon Jr. (1963) e Perzyna & Sawczuk (1973) foram pioneiros no estudo da termoplasticidade, apresentando as primeiras tentativas em desenvolver modelos constitutivos contemplando o trabalho plástico e os efeitos térmicos. Posteriormente, Lemonds & Needleman (1986), Simo & Miehe (1992) e Canadija & Brnic (2004) apresentaram formulações para o mesmo problema lidando com grandes deformações. Embora as investigações no campo da termoplasticidade já estejam ativas por um longo tempo, a abordagem atual sobre tal tema, foi apresentada inicialmente por Simo & Miehe (1992).

Em Simo & Miehe (1992), uma formulação termodinamicamente consistente do problema acoplado foi apresentada, abordando detalhadamente o desempenho e os aspectos numéricos que envolve a implementação do MEF, através de um amplo conjunto de simulações numéricas.

O objetivo da análise termoplástica é descrever a evolução da temperatura e a geração de calor em um corpo sujeito a deformações inelásticas. Para tal, faz-se uso de princípios básicos, como equações de equilíbrio, leis da termodinâmica e potenciais associados às variáveis internas (Rosakis *et al.*, 2000).

3.2.1 Primeira e segunda lei da termodinâmica

A equação de calor da termoplasticidade firma-se na primeira e segunda lei da termodinâmica. Na forma da inequação de Clausius-Duhem, tem-se:

$$\rho\dot{u} - \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + q_{i,i} - \rho R = 0 \quad (3.44)$$

$$\rho\theta\dot{S} - \rho R + q_{i,i} - \frac{q_i}{\theta}\theta_{,i} \geq 0 \quad (3.45)$$

Trazendo novamente o conceito de energia livre de Helmholtz e a combinando com as Equações (3.44) e (3.45), obtém-se:

$$-\rho\dot{\Phi} - \rho S\dot{\theta} + \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{q_i}{\theta}\theta_{,i} \geq 0 \quad (3.46)$$

Logo,

$$-\rho\dot{\Phi} - \rho S\dot{\theta} + \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} = \Lambda \quad (3.47)$$

Sendo Λ e $\frac{q_i}{\theta}\theta_{,i}$ a dissipação interna e térmica, respectivamente.

Logo, a expressão (3.48) define a equação de conservação de energia em termos da dissipação interna.

$$\rho\theta\dot{S} = \Lambda - q_{i,i} + \rho R \quad (3.48)$$

3.2.2 Teoria das variáveis internas

Conforme Carrazedo (2009), a forma mais comum de desenvolver a plasticidade é adicionar as relações constitutivas variáveis internas que representam a deformação plástica e/ou superfície de escoamento. Introdz-se aqui duas variáveis, que são a deformação plástica (ε_{ij}^p) e a variável de endurecimento (ξ_i).

Neste trabalho a decomposição do tensor de deformação é definido de forma aditiva, onde a deformação total é resultado da soma das parcelas elástica e plástica, conforme visto no capítulo anterior. Relembrando, o tensor das deformações elásticas é definido por:

$$\varepsilon_{ij}^e = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p \quad (3.49)$$

A partir da Equação (3.49), tem-se que a taxa da energia livre de Helmholtz pode ser expressa pela Equação (3.50). Por questão de praticidade, a partir desse momento o gradiente de temperatura $\theta_{,i}$ passa a ser definido por Θ .

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \dot{\varepsilon}_{ij}^p + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i} \dot{\xi}_i + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \Phi}{\partial \Theta} \dot{\Theta} \quad (3.50)$$

Substituindo a Equação (3.50) em (3.46), tem-se:

$$\left(\sigma_{ij} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \right) \dot{\varepsilon}_{ij} - \rho \left(S + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) \dot{\theta} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \Theta} \dot{\Theta} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \dot{\varepsilon}_{ij}^p - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i} \dot{\xi}_i - \frac{q_i}{\theta} \Theta \geq 0 \quad (3.51)$$

A expressão (3.51) deve ser respeitada para qualquer processo termomecânico, desta forma, para qualquer valor de $\dot{\varepsilon}_{ij}$, $\dot{\theta}$ e $\dot{\Theta}$ os termos com os quais estão relacionados devem manter a igualdade, então:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \Theta} = 0 \rightarrow \Phi = \Phi(\varepsilon_{ij}^e, \xi_i, \theta) \quad (3.52)$$

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \quad (3.53)$$

$$S = - \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \quad (3.54)$$

A partir das considerações (3.52), (3.53) e (3.54) e substituindo-se (3.51) em (3.48), obtém-se:

$$-\rho\theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \sigma_{ij} \partial \dot{\varepsilon}_{ij}^p - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i} \dot{\xi}_i - q_{i,i} + \rho R \quad (3.55)$$

Derivando o primeiro termo da Equação (3.55), tem-se:

$$-\rho\theta \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta \partial \varepsilon_{ij}^e} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta \partial \xi_i} \dot{\xi}_i + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \dot{\theta} \right) = \sigma_{ij} \partial \dot{\varepsilon}_{ij}^p - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i} \dot{\xi}_i - q_{i,i} + \rho R \quad (3.56)$$

Durante o processo de plastificação uma grande quantidade de energia mecânica de carácter plástico é dissipada na forma de calor. Entretanto, o trabalho plástico não é completamente transformado em energia térmica, em vez disso, parte do trabalho é dissipado, devido a interação entre as interfaces das microestruturas que constituem o material. A quantidade de energia interna armazenada devido a criação e rearranjo das imperfeições cristalinas, definida como trabalho frio (\bar{E}), é dado por:

$$\bar{E} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i} - \theta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta \partial \xi_i} \quad (3.57)$$

Com base na lei de Fourier e nas definições de calor específico e trabalho frio, pode-se reescrever a Equação (3.56) da seguinte forma:

$$\rho c_e \dot{\theta} = k \theta_{,ii} + \rho R + \theta \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \theta} \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p - \rho \frac{\partial \bar{E}}{\partial \xi_i} (\xi) \dot{\xi}_i \quad (3.58)$$

Sendo,

$$H_{elast} = \theta \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \theta} \dot{\varepsilon}_{ij}^e \quad (3.59)$$

$$H_{plast} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (3.60)$$

$$H_{tf} = \rho \frac{\partial \bar{E}}{\partial \xi_i} (\xi) \dot{\xi}_i \quad (3.61)$$

As Equação (3.59), (3.60) e (3.61) referem-se, respectivamente, a geração de calor devido as deformações elásticas, a dissipação de trabalho plástico em forma de calor e a energia retida como trabalho frio.

Os mecanismos de dissipação são motivo de diversas pesquisas. Referente ao trabalho frio, destaca-se os estudos teóricos e experimentais de Bever *et al.* (1973), Oliferuk *et al.* (1993), Rittel (1999), Rosakis *et al.* (2000), Mroz & Oliferuk (2002), Benzerga *et al.* (2005), Rittel *et al.* (2012) e Kolupaeva & Semenov (2015). Tais estudos enfatizam a complexidade de caracterizar o trabalho frio, pois o mesmo é altamente dependente das deformações plásticas acumuladas. Devido à falta de informações sobre o comportamento microestrutural dos materiais, para ser mais preciso, quais variáveis influenciam no processo e em que quantidade, torna-se conveniente utilizar um fator constante para representar a dissipação de energia (Candija & Brnic, 2004).

Portanto, para este trabalho, supõe-se que a relação entre o trabalho plástico e o trabalho frio é definida por um fator constante, aqui denotado por ϑ . Isto posto, tem-se a seguinte simplificação:

$$\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^p - \rho \frac{\partial \bar{E}}{\partial \xi_i}(\xi)\dot{\xi}_i = \vartheta \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (3.62)$$

O termo ϑ define a quantidade de trabalho mecânico plástico convertido em calor. Normalmente, a literatura especializada adota ϑ sendo constante, tipicamente escolhido entre 0,80 e 1,0 (por exemplo, Simo & Miehe, 1992; Zhou *et al.*, 1996; Kapoor & Nemat-Nasser, 1998).

Combinando as Equações (3.62) e (3.58), tem-se a expressão final que define a transferência de calor para problemas termoplásticos, dada por:

$$\rho c_e \dot{\theta} = k \theta_{,ii} + \rho R + \theta \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \theta} \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \vartheta \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (3.63)$$

CAPÍTULO 4

Método dos Elementos Finitos Aplicado a Termodinâmica

Os primeiros estudos referentes ao Método dos Elementos Finitos visavam a solução de problemas relacionados a resistência dos materiais, destacando-se na determinação de deslocamentos e para análise de certos estados de tensão que se mostravam complexos para serem tratados por meio de ferramentas analíticas da teoria da elasticidade. Atualmente o MEF é umas das ferramentas numéricas mais estudadas e utilizadas para análise de estruturas, sendo um método versátil e poderoso que pode ser utilizado em diversas áreas de estudo, tais como: mecânica dos sólidos, mecânica dos fluidos, eletromagnetismo, transferência de calor e acústica, entre muitos outros.

A concepção do MEF consiste na divisão do domínio de um meio contínuo em um número discreto de subdomínios interligados entre si por pontos, com determinadas posições, denominadas de nós. O conjunto de subdomínios se comporta de forma análoga ao do meio contínuo original.

A Figura 4.1 apresenta um exemplo de discretização de um sólido, onde Ω representa o domínio do sólido com contorno Γ , sendo Γ_1 e Γ_2 partes diferentes do contorno, onde $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$ e $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$.

Neste capítulo serão apresentadas as equações algébricas pelo MEF para aproximar o problema de condução de calor. A literatura especializada no assunto é vasta, sendo que a formulação exposta nesta seção segue em grande parte apresentada em Hsu (1986), Lewis *et al.* (2004) e Nicholson (2008).

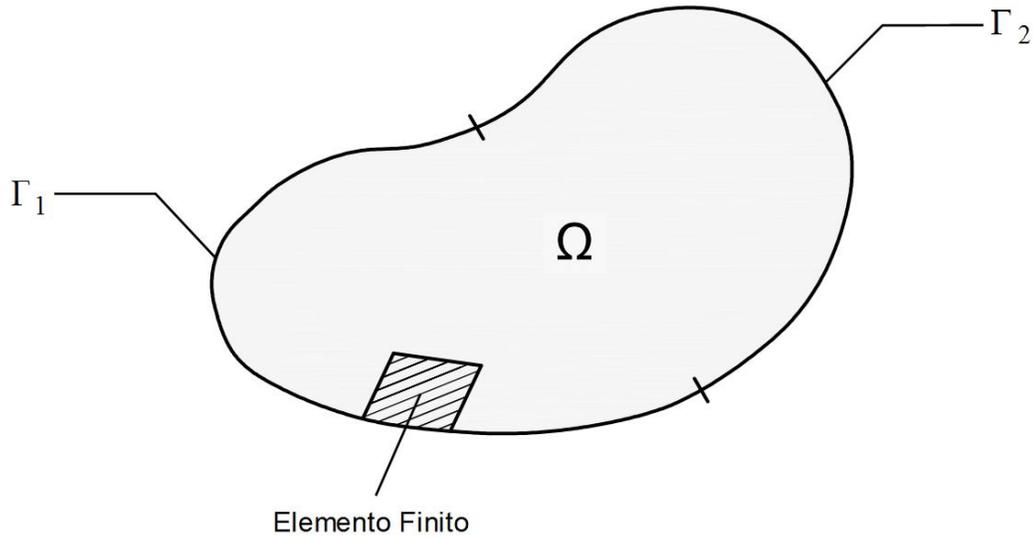


Figura 4.1: Discretização de um sólido qualquer.

4.1 Discretização do problema de condução de calor

Recordando-se as Equações (3.38) e (3.63), o comportamento termodinâmico de um corpo condutor de calor é descrito pela equação diferencial de condução de calor, escrita da seguinte maneira:

$$k\theta_{,ii} - \rho c_e \dot{\theta} + \rho R - 2G \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \theta_0 \dot{\epsilon}_{kk} + \vartheta \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p = 0 \quad (4.1)$$

Reescrita como:

$$k\theta_{,ii} - \rho c_e \dot{\theta} + \rho R + R_m = 0 \quad (4.2)$$

Em que R_m define o calor gerado devido as deformações mecânicas, expresso por:

$$R_m = -2G \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \theta_0 \dot{\epsilon}_{kk} + \vartheta \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (4.3)$$

O problema térmico é solucionado antes do problema mecânico, desta forma, emprega-se a fonte de calor mecânica do passo de tempo anterior (t). Isto posto, para o passo de tempo atual ($t + \Delta t$), a expressão (4.2) é reescrita do seguinte modo:

$$k\theta_{,ii} - \rho c_e \dot{\theta} + \rho R + R_m^t = 0 \quad (4.4)$$

A equação diferencial da condução de calor deve satisfazer as condições iniciais e as condições de contorno essencial (Condição de Dirichlet) e natural (Condição de Neumann), definidas, respectivamente, por:

$$\theta = \theta_0(x_i) \quad \forall \quad x_i \in \Omega, t = 0 \quad (4.5)$$

$$\theta = \theta(x_i, t) \quad \forall \quad x_i \in \Gamma_1, t > 0 \quad (4.6)$$

$$q(x_i, t) = -k\theta_{,n} \quad \forall \quad x_i \in \Gamma_2, t > 0 \quad (4.7)$$

Sendo,

$\theta(x_i, t)$: Temperatura no contorno Γ_1 ;

$q(x_i, t)$: Fluxo de calor em Γ_2 ;

n : Normal à superfície Γ_2 ;

$\theta_0(x_i)$: Temperatura no domínio Ω .

A variável da temperatura é aproximada por uma série de funções denominadas funções de forma, conforme a Equação (4.8).

$$\theta = \theta_i \phi_i \quad (4.8)$$

Onde, θ_i e ϕ_i definem a temperatura e as funções de forma no nó i , respectivamente.

Para aproximar a Equação (4.4), utiliza-se o método dos resíduos ponderados, especificamente o método de Galerkin, sendo assim:

$$\int_V W k \theta_{,ii} dV - \int_V W \rho c_e \dot{\theta} dV + \int_V W \rho R dV + \int_V W R_m^t dV = 0 \quad (4.9)$$

Onde,

$$W = w_j \phi_j \quad (4.10)$$

Onde, ϕ_j são as funções de ponderação e w_j representa constantes arbitrárias relacionadas aos nós j dos elementos.

Fazendo uso das Equações (4.8), (4.9) e (4.10), para qualquer valor de w_j e sendo θ_i constante, tem-se:

$$\int_V k(\theta_i \phi_i)_{,kk} \phi_j dV - \int_V \rho c_e \dot{\theta}_i \phi_i \phi_j dV + \int_V \rho R \phi_j dV + \int_V R_m^t \phi_j dV = 0 \quad (4.11)$$

Manipulando a Equação (4.11), obtém uma expressão equivalente, definida por:

$$\begin{aligned} \int_V k \theta_i \phi_{i,k} \phi_{j,k} dV - \int_V k \theta_i (\phi_{i,k} \phi_j)_{,k} dV + \int_V \rho c_e \dot{\theta}_i \phi_i \phi_j dV \\ - \int_V \rho R \phi_j dV - \int_V R_m^t \phi_j dV = 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Aplica-se o teorema da divergência na terceira parcela da Equação (4.12):

$$\int_V k \theta_i (\phi_{i,k} \phi_j)_{,k} dV = \int_A k \theta_i \phi_{i,n} \phi_j dA \quad (4.13)$$

A Equação (4.13) expressa as forças termodinâmicas aplicadas no contorno. Sendo assim, através da combinação das Equações (4.7), (4.12) e (4.13), tem-se:

$$\int_V k \theta_i \phi_{i,k} \phi_{j,k} dV + \int_V \rho c_e \dot{\theta}_i \phi_i \phi_j dV - \int_V \rho R \phi_j dV - \int_V R_m^t \phi_j dV + \int_A q \phi_j dA = 0 \quad (4.14)$$

A Equação (4.14) resulta no sistema global de equação para todo domínio, que pode ser representa em forma matricial do seguinte modo:

$$C_{ij} \dot{\theta}_i + K_{ij} \theta_i = F_j \quad (4.15)$$

Sendo que,

$$C_{ij} = \int_V \rho c_e \phi_i \phi_j dV \quad (4.16)$$

$$K_{ij} = \int_V k \phi_{i,k} \phi_{j,k} dV \quad (4.17)$$

$$F_j = \int_V \rho R \phi_j dV + \int_V R_m^t \phi_j dV - \int_A q \phi_j dA \quad (4.18)$$

Onde,

K_{ij} : Matriz de condução de calor;

C_{ij} : Matriz de capacitância de calor;

F_j : Vetor de carregamento térmico.

4.2 Integração temporal

A discretização temporal da equação de transferência de calor por condução é baseada no método HHT- α , amplamente empregado em tais problemas (Hughes, 1987; Real, 1988; Cornwell & Malkus, 1992; Lewis *et al.*, 2004).

Para aproximar a temperatura são utilizadas as seguintes equações:

$$\dot{\theta}_i^{t+\Delta t-\bar{\alpha}} = \frac{(\theta_i^{t+\Delta t} - \theta_i^t)}{\Delta t} \quad (4.19)$$

$$\theta_i^{t+\Delta t-\bar{\alpha}} = (1 - \bar{\alpha})\theta_i^t + \bar{\alpha}\theta_i^{t+\Delta t} \quad (4.20)$$

Onde, $\bar{\alpha}$ é o parâmetro da aproximação temporal, sendo estabelecido conforme a necessidade.

Substituindo as Equações (4.19) e (4.20) em (4.15), obtém-se o sistema de equação que define a variação de temperatura nodal. Logo:

$$C_{ij} \frac{(\theta_i^{t+\Delta t} - \theta_i^t)}{\Delta t} + K_{ij}[(1 - \bar{\alpha})\theta_i^t + \bar{\alpha}\theta_i^{t+\Delta t}] = \bar{\alpha}F_j^{t+\Delta t} + (1 - \bar{\alpha})F_j^t \quad (4.21)$$

Portanto, organizando o sistema obtém-se:

$$[C_{ij} + \Delta t \bar{\alpha} K_{ij}] \theta_i^{t+\Delta t} = [C_{ij} - \Delta t (1 - \bar{\alpha}) K_{ij}] \theta_i^t + \Delta t [\bar{\alpha} F_j^{t+\Delta t} + (1 - \bar{\alpha}) F_j^t] \quad (4.22)$$

CAPÍTULO 5

Formulação Posicional Aplicada a Problemas Não Lineares

Em particular, a pesquisa aqui desenvolvida faz uso da formulação do Método dos Elementos Finitos Posicional (MEFP), apresentada inicialmente por Coda (2003). O MEFP tem como diferencial a utilização das posições nodais como variável ao invés de deslocamentos, como é feito usualmente na literatura.

Apesar do MEFP ser recente, existem vários estudos na literatura que empregam a formulação posicional. Greco (2004) apresentou um estudo referente ao impacto bidirecional entre estruturas reticuladas com comportamento não linear. Dando continuidade ao trabalho de Greco (2004), Marques (2006) estudou o comportamento dinâmico não linear geométrico de sólidos bidimensionais, destacando os problemas de impacto.

Maciel (2008) abordou os efeitos da não linearidade geométrica em problemas dinâmicos envolvendo pórticos planos e sólidos tridimensionais. Enquanto Coda & Paccola (2008), estudaram a não linearidade geométrica de cascas via MEFP, incluindo a taxa de variação linear da espessura e o possível uso de elementos curvos. Pascon (2008) implementou modelos constitutivos hiperelásticos para a análise não linear geométrica de cascas. Posteriormente, Pascon (2012) investigou modelos constitutivos elásticos e elastoplásticos para materiais com gradação funcional em regime de grandes deslocamentos e elevadas deformações.

Carrazedo (2009) e Carrazedo & Coda (2010), considerando os efeitos da não linearidade física e geométrica, aplicou MEFP a problemas térmicos, enfatizando o acoplamento termomecânico em problemas de impacto. Dentre outros trabalhos que

empregam a formulação posicional, pode-se destacar os estudos de Minski (2008), Ferreira (2009), Rigobello (2011), Sanches (2011), Reis (2012), Oliveira (2012), Lacerda (2014) e Sampaio (2014).

5.1 Funcional de energia potencial total

A análise dinâmica objetiva determinar os deslocamentos, posições, velocidades e acelerações dos graus de liberdade, como funções do tempo, ocasionados por determinado carregamento externo, que apresenta distribuição conhecida no espaço e variação conhecida no tempo, além da magnitude dos esforços internos desenvolvidos nos membros da estrutura.

Alguns textos sobre dinâmica estrutural foram selecionados como referência, desse modo, além dos estudos citados anteriormente, a formulação matemática apresentada nesta seção apoia-se nos trabalhos de Hughes (1987), Bathe (1996), Cook *et al.* (2002), Humar (2002) e Chopra (2012).

5.1.1 Balanço de energia

Primeiramente, para o problema estático em um sistema conservativo, o funcional de energia potencial total (Π) é descrito por dois tipos de energia, a energia total de deformação (U_e) e a energia potencial das forças aplicadas (P), Equação (5.1).

$$\Pi = U_e - P \quad (5.1)$$

Como é possível observar na expressão (5.2), a energia mecânica total para problemas dinâmicos é dado pelo acréscimo da energia cinética (K_c) e energia de dissipação (K_d) na Equação (5.1). A energia de dissipação (ou perda de energia por amortecimento) é a energia que um sistema mecânico perde para o meio através da conversão em outra forma de energia.

$$\Pi = U_e + K_c + K_a - P \quad (5.2)$$

Conforme as Equações (5.3) e (5.4), respectivamente, a energia total de deformação é definida pela integral da energia de deformação específica (u_e) ao longo do volume inicial, e a energia potencial das forças aplicadas é expressa em função das forças externas aplicadas (F_i) e do conjunto de posições (x_i). O índice i refere-se ao grau de liberdade que as forças e posições estão associadas.

$$U_e = \int_{V_0} u_e dV_0 \quad (5.3)$$

$$P = F_i x_i \quad (5.4)$$

A energia cinética é dada por:

$$K_c = \int_{V_0} \rho \frac{\dot{x}_i \dot{x}_i}{2} dV_0 \quad (5.5)$$

Substituindo as Equações (5.3), (5.4) e (5.5) em (5.2), tem-se:

$$\Pi = \int_{V_0} u_e dV_0 + \int_{V_0} \rho \frac{\dot{x}_i \dot{x}_i}{2} dV_0 + K_a - F_i x_i \quad (5.6)$$

Desta forma, relativo a cada instante de tempo t , a posição de equilíbrio dinâmico é definida pela minimização da energia mecânica total através do teorema da mínima energia potencial total, dada por:

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} \right|_t = \int_{V_0} \frac{\partial u_e}{\partial x_i} dV_0 + \int_{V_0} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho \frac{\dot{x}_i \dot{x}_i}{2} \right) dV_0 + \frac{\partial K_a}{\partial x_i} - \frac{\partial (F_i x_i)}{\partial x_i} \quad (5.7)$$

Referente a parcela que representa a perda de energia por amortecimento, a integral resultante da derivada em relação as posições, é dada por:

$$\frac{\partial K_a}{\partial x_i} = \int_{V_0} \frac{\partial K_a}{\partial x_i} dV_0 = \int_{V_0} c_m \rho \dot{x}_i dV_0 \quad (5.8)$$

Onde c_m é o coeficiente de amortecimento.

Substituindo a Equação (5.8) em (5.7), tem-se:

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} \right|_t = \int_{V_0} \frac{\partial u_e}{\partial x_i} dV_0 + \int_{V_0} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho \frac{\dot{x}_i \dot{x}_i}{2} \right) dV_0 + \int_{V_0} c_m \rho \dot{x}_i dV_0 - F_i \quad (5.9)$$

As variáveis posição, velocidade e aceleração são aproximadas pelas funções de forma presentes nas Equações (5.10), (5.11) e (5.12), respectivamente.

$$x_i = \phi_i X_i^j \quad (5.10)$$

$$\dot{x}_i = \phi_i \dot{X}_i^j \quad (5.11)$$

$$\ddot{x}_i = \phi_i \ddot{X}_i^j \quad (5.12)$$

A partir de tais aproximações, para o passo de tempo $t + \Delta t$, a equação de equilíbrio que descreve a resposta dinâmica pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial X} \right|_{t+\Delta t} = \left. \frac{\partial U_e}{\partial X} \right|_{t+\Delta t} + M \ddot{X}_{t+\Delta t} + C \dot{X}_{t+\Delta t} - F_{t+\Delta t} = 0 \quad (5.13)$$

Sendo C a matriz de amortecimento e M a matriz de massa.

Vale destacar que a parcela $M \ddot{X}_{t+\Delta t}$ define as forças inerciais, enquanto que $C \dot{X}_{t+\Delta t}$ representa as forças de amortecimento. Os carregamentos dinâmicos podem ser definidos como variáveis com o tempo, ou seja, carregamentos cujo sentido e magnitude variam com o tempo.

5.1.2 Energia total de deformação

Considerando o acoplamento termomecânico, a deformação total do problema é dada pela soma das parcelas elástica, plástica e térmica, conforme a equação:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p + \varepsilon^\theta \quad (5.14)$$

A energia de deformação potencial total, contemplando o comportamento não linear físico e os efeitos térmicos é definida por:

$$\begin{aligned} U_e &= \int_{V_0} \int_{\varepsilon} \sigma d\varepsilon dV_0 = \int_{V_0} \left(\int_{\varepsilon} E\varepsilon d\varepsilon - \int_{\varepsilon} E\varepsilon^p d\varepsilon - \int_{\varepsilon} E\varepsilon^\theta d\varepsilon \right) dV_0 \\ &= \int_{V_0} \left(\frac{1}{2} E\varepsilon^2 - E\varepsilon\varepsilon^p - E\varepsilon\varepsilon^\theta \right) dV_0 \end{aligned} \quad (5.15)$$

Na Equação (5.15), ε^θ descreve o comportamento térmico, enquanto que o termo ε^p descreve o comportamento plástico do elemento, obtidas a partir do modelo constitutivo do material, conforme apresentado nos capítulos anteriores.

As Equações (5.16), (5.17) e (5.18) descrevem a cinemática do elemento de treliça no espaço, conforme apresentado na Figura 5.1, sendo a geometria do elemento mapeada em função da variável adimensional ξ (variando de 0 até 1).

$$x = X_1 + (X_2 - X_1)\xi \quad (5.16)$$

$$y = Y_1 + (Y_2 - Y_1)\xi \quad (5.17)$$

$$z = Z_1 + (Z_2 - Z_1)\xi \quad (5.18)$$

Conforme ilustrado na Figura 5.1, o par de coordenadas (X_1^0, Y_1^0, Z_1^0) e (X_2^0, Y_2^0, Z_2^0) representam a configuração inicial do elemento (coordenadas de referência), sendo que após a mudança de configuração, o elemento passa a ter o novo par de coordenadas (X_1^t, Y_1^t, Z_1^t) e (X_2^t, Y_2^t, Z_2^t) .

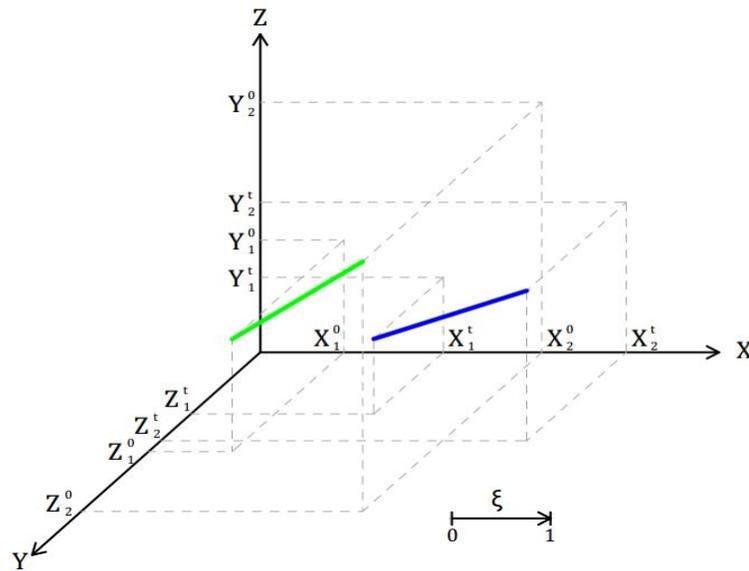


Figura 5.1: Parametrização espacial do elemento treliça.

Há várias medidas de deformação convenientes para análise não linear de treliças. Neste trabalho será utilizada a deformação de engenharia. Considerando a deformação térmica, tem-se:

$$\varepsilon = \frac{ds - ds_0}{ds_0} + \alpha\theta \quad (5.19)$$

Onde ds_0 é o comprimento inicial (ou referencial) e ds é o comprimento final (ou atual) do elemento.

A expressão (5.20) consiste na medida de deformação, apresentada na equação anterior, escrita em função da variável adimensional.

$$\varepsilon = \frac{\frac{ds}{d\xi} - \frac{ds_0}{d\xi}}{\frac{ds_0}{d\xi}} + \alpha\theta \quad (5.20)$$

Os termos $ds/d\xi$ e $ds_0/d\xi$ são trechos auxiliares, definidas pelas seguintes equações:

$$\frac{ds_0}{d\xi} = \left(\sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2} \right)_0 = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2} = l_0 \quad (5.21)$$

$$\frac{ds}{d\xi} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2} = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2} = l \quad (5.22)$$

Tendo em vista as Equações (5.21) e (5.22), a integral no volume que define a energia potencial total de deformação (Equação (5.15)) é dividida em uma integral no comprimento e outra na área, desta forma, tem-se:

$$U_e = l_0 \int_0^1 \left(\frac{1}{2} EA \varepsilon^2 - E \int_A \varepsilon \varepsilon^p dA - E \int_A \varepsilon \varepsilon^\theta dA \right) d\xi = l_0 \int_0^1 u_e d\xi \quad (5.23)$$

Sendo u_e a energia de deformação específica.

5.1.3 Matriz de massa

As forças inerciais empregam o caráter dinâmico a formulação, sendo definidas pelo produto da aceleração com a matriz de massa, conforme a Equação (5.13). A matriz de massa é um mecanismo utilizado para transferir a massa de cada elemento para seus respectivos nós.

Para estruturas treliçadas, a matriz de massa é de ordem quadrada e tem dimensão igual a duas vezes a quantidade de graus de liberdade de cada nó, sendo que somadas individualmente em superposição formam a matriz de massa da estrutura. As expressões (5.24) e (5.25) expõe as matrizes de massa discreta e consistente, respectivamente.

Segundo Cook *et al.* (2002), por motivos de precisão e economia, a utilização da matriz de massa discreta (ou concentrada) é mais indicada quando são empregados algoritmos explícitos de integração temporal. Tais autores ainda ressaltam que, embora haja acréscimo do custo computacional, por questão de precisão, a matriz de massa

consistente é mais conveniente para resolução problemas que utilizam algoritmos implícitos.

$$M = \frac{\rho Al}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

$$M = \frac{\rho Al}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

Referente a solução das equações de equilíbrio, devido a diagonalização, o modelo de massa discreta tem como principal vantagem a redução do número de operações, desta forma, resultando na redução do custo computacional por instante de tempo.

Mullen e Belytschko (1982) confrontaram ambos os modelos e discutiram suas diferenças. Os resultados de tal estudo revelaram que, devido a diagonalização da matriz, a utilização do modelo de massa discreta ocasiona redução no desempenho do modelo numérico, originando erros no cálculo da velocidade de fase, aproximadamente duas vezes maior do que os erros atingidos pelo modelo de massa consistente.

5.1.4 Amortecimento

O amortecimento estrutural é uma medida de dissipação de energia, que conduz a estrutura de um estado vibratório para um estado em repouso. A estimativa da dissipação de energia em sistemas estruturais é um dos problemas mais complexos da

dinâmica estrutural. A principal consequência do amortecimento é a diminuição dos picos dos deslocamentos da estrutura, sendo seu comportamento visivelmente constatado quando comparado a sua vibração livre. Nestas circunstâncias, o amortecimento estrutural consiste na transformação da energia dissipada para outra forma de energia, conseqüentemente, redução de energia do sistema de vibração. A conversão da energia depende do sistema e dos mecanismos físicos que promovem a dissipação.

Ao contrário das características da rigidez e massa de um sistema estrutural, o amortecimento não se refere a um único fenômeno físico, no qual a complexidade da situação é reforçada pela simples realidade de que as propriedades dos materiais muitas vezes diferem de amostra para amostra, conseqüentemente, resultando em significativas diferenças de perdas de energia entre os membros distintos de um sistema estrutural, onde a seleção de um valor adequado de amortecimento é tema de controvérsia na concepção de projetos (Kareem & Gurley, 1996).

Na literatura destaca-se o amortecimento do material, onde o mesmo está relacionado com a dissipação de energia devido a interação entre as interfaces das microestruturas que constituem o material. Na dinâmica estrutural, as equações de movimento geralmente descrevem um comportamento macroscópico, enquanto os processos de amortecimento dos materiais surgem a partir de fenômenos microscópicos. Desta forma, em virtude das diversas formas de dissipação de energia, a literatura atual dispõe de vários modelos que representam os efeitos do amortecimento, cada um com suas particularidades.

Portanto, a dissipação de energia é um fenômeno intensamente complexo devido os inúmeros aspectos que influenciam sua quantificação, sendo ao longo dos anos, tema de diversos estudos teóricos e experimentais, onde podemos mencionar as pesquisas de Hu & Dokainish (1993), Gibson & Austin (1993), Jeary (1997), Bowyer *et al.* (2012) e Chen & Ferguson (2014).

De acordo com Kuhl & Crisfield (1999), devido à escassez de referências, existe grande dificuldade na análise e geração de parâmetros relacionados aos mecanismos de amortecimento das estruturas, implicando em aproximações simplistas, ou até mesmo, no desprezo das forças de amortecimento do sistema. Na prática, é muito difícil, senão

impossível, a determinação da matriz de amortecimento para um modelo de elementos finitos, uma vez que as propriedades associadas ao amortecimento são dependentes da frequência (Silveira, 2001). Em virtude disto, a matriz de amortecimento, em geral, é estabelecida utilizando as matrizes de massa e/ou de rigidez dos elementos. Neste trabalho a matriz de amortecimento será proporcional a matriz de massa.

Desta forma, a matriz de amortecimento é definida por:

$$C = 2c_m M \quad (5.26)$$

O coeficiente de amortecimento é uma representação da eficiência com a qual a estrutura dissipa a energia de entrada.

5.2 Método de Newton-Raphson

Devido ao caráter não linear da expressão (5.13), é muito difícil explicitar ou obter diretamente uma solução precisa. Desta forma, para dissipar as forças residuais é inevitável a utilização de uma estratégia numérica para solucionar tal problema. Uma maneira conveniente de resolver problemas não lineares é linearizar a equação e empregar um algoritmo de correção iterativo, de modo que a convergência da solução seja garantida. No presente trabalho utiliza-se o método de Newton-Raphson.

Desta maneira, o problema dinâmico não linear é alcançado combinando-se o procedimento iterativo de Newton-Raphson com os esquemas de integração temporal. O procedimento de Newton-Raphson é um método numérico clássico empregado na engenharia, no qual a implementação é realizada pela aproximação da trajetória de equilíbrio da estrutura por tangentes à mesma, até a condição de convergência, conforme a Figura 5.2.

Tendo em vista o comportamento não linear do vetor de forças internas em relação as posições, um vetor de desbalanceamento será gerado pela Equação (5.13). Desta forma, o sistema não está em equilíbrio e existe a necessidade de corrigir o vetor de forças internas.

Considerando que as cargas externas independem das forças residuais, a configuração de equilíbrio da Equação (5.13) é determinada por:

$$g(X) = 0 \cong g(X_0) + \nabla g(X_0)\Delta X \quad (5.27)$$

Onde X é o vetor posição incógnito e X_0 representa o vetor posição de tentativa, normalmente definido anteriormente.

O termo $g(X)$ é o vetor dos resíduos e define o equilíbrio do sistema. A Figura 5.2 mostra a trajetória de equilíbrio de $g(X)$, onde o processo iterativo é realizado até que as forças residuais sejam suficientemente pequenas. O termo $\nabla g(X_0)$ é denominado de matriz hessiana, sendo determinada pela derivada de segunda ordem do funcional de energia potencial total em relação as posições nodais (Equação (5.13)):

$$\nabla g(X_0) = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial X^2} \quad (5.28)$$

O incremento de posição (ΔX) pode ser obtido pela inversa da matriz hessiana, dado por:

$$\Delta X = -[\nabla g(X_0)]^{-1}g(X_0) \quad (5.29)$$

As inclinações expostas na Figura 5.2 são definidas pela matriz hessiana. O processo iterativo prossegue até que um determinado valor de ΔX seja suficientemente pequeno, dentro de uma determinada precisão requerida.

Existem várias abordagens para verificar a convergência da solução ao final de cada iteração, neste trabalho, o critério de convergência fica definido por:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{coord} g^2(X_0)} \leq TOLERÂNCIA \quad (5.30)$$

Caso a Equação (5.30) não seja atendida, passa-se para próxima iteração, com $X = X_0$. Caso contrário, estando o critério de convergência satisfeito, as posições são corrigidas por:

$$X = X_0 + \Delta X \quad (5.31)$$

Dando sequência, avança-se para o próximo passo de tempo e repete-se o procedimento.

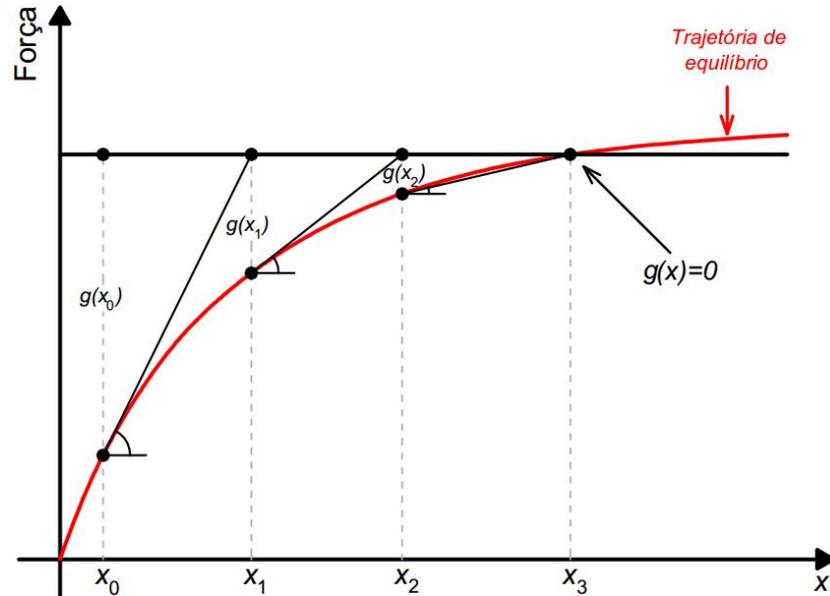


Figura 5.2: Método de Newton-Raphson resolvendo a equação de equilíbrio.

5.3 Passos algébricos necessários para a implementação da formulação

Conforme Greco *et al.* (2006), para executar o processo descrito na seção anterior, é necessário a determinação explícita das derivadas de primeira e segunda ordem da energia total de deformação, haja vista a necessidade das mesmas para o cálculo das forças residuais e da matriz hessiana. Vale lembrar que nesse trabalho utiliza-se a medida de deformação de engenharia. Recordando a Equação (5.23), e realizando as devidas considerações, tem-se:

$$l_0 u_e = \frac{EA l_0}{2} \left(\frac{\sqrt{B}}{l_0} - 1 \right)^2 - l_0 E \int_A \left(\frac{\sqrt{B}}{l_0} - 1 \right) \varepsilon^p dA - l_0 E \int_A \left(\frac{\sqrt{B}}{l_0} - 1 \right) \varepsilon^\theta dA \quad (5.32)$$

Onde,

$$B = (X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2 \quad (5.33)$$

A primeira derivada da Equação (5.32) em relação ao parâmetro nodal i (variando de 1 a 6) fica definida por:

$$l_0 u_{e,i} = \frac{EA}{2l_0} \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{B}}\right) B_{,i} - l_0 E \int_A \varepsilon_{,i} \varepsilon^p dA - l_0 E \int_A \varepsilon_{,i} \varepsilon^\theta dA \quad (5.34)$$

Sendo que,

$$\varepsilon_{,i} = \frac{B_{,i}}{2l_0 \sqrt{B}} \quad (5.35)$$

A expressão (5.36) registra a derivada da Equação (5.34) em relação ao parâmetro nodal k (variando de 1 a 6), dada por:

$$l_0 u_{e,ik} = \frac{EA}{2l_0} \left[\frac{l_0 B_{,i} B_{,k}}{2(\sqrt{B})^3} + \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{B}}\right) B_{,ik} \right] - l_0 E \int_A \varepsilon_{,ik} \varepsilon^p dA - l_0 E \int_A \varepsilon_{,ik} \varepsilon^\theta dA \quad (5.36)$$

Sendo que,

$$\varepsilon_{,ik} = \frac{1}{2l_0} \left(\frac{B_{,ik}}{\sqrt{B}} - \frac{B_{,i} B_{,k}}{2(\sqrt{B})^3} \right) \quad (5.37)$$

Vale destacar que $i = 1, 6$ e $k = 1, 6$ indicam as posições paramétricas. Os termos que envolvem ε^p e ε^θ são calculados somente quando o elemento apresentar comportamento plástico e térmico, respectivamente.

Conforme apresentado em Greco *et al.* (2006), a Tabela 5.1 expõe as derivadas de $B_{,i}$, $B_{,k}$ e $B_{,ik}$.

Tabela 5.1: Derivadas da variável B .

Derivada de 1º Ordem	Derivada de 2º Ordem	
$B_{,1} = -2(X_2 - X_1)$	$B_{,11} = 2$	$B_{,41} = -2$
$B_{,2} = -2(Y_2 - Y_1)$	$B_{,14} = -2$	$B_{,44} = 2$
$B_{,3} = -2(Z_2 - Z_1)$	$B_{,22} = 2$	$B_{,52} = -2$
$B_{,4} = 2(X_2 - X_1)$	$B_{,25} = -2$	$B_{,55} = 2$
$B_{,5} = 2(Y_2 - Y_1)$	$B_{,33} = 2$	$B_{,63} = -2$
$B_{,6} = 2(Z_2 - Z_1)$	$B_{,36} = -2$	$B_{,66} = 2$

5.4 Métodos de integração temporal

A análise dinâmica faz uso de integrais temporais, onde as equações de equilíbrio dinâmico são equações diferenciais parciais no espaço e no tempo, sendo que na formulação utiliza-se a hipótese de que as variáveis sejam separáveis. Portanto, os algoritmos de integração temporal são mecanismos que, gradativamente, em função do tempo, estabelecem soluções aproximadas para as equações diferenciais concebidas pelo MEFP.

Os procedimentos de integração temporal podem ser subdivididos em métodos explícitos e implícitos, cada qual com suas vantagens e desvantagens. Nos métodos explícitos, a solução do passo de tempo atual ($t + \Delta t$) é alcançada considerando as condições de equilíbrio dos passos anteriores, isto é:

$$X_{t+\Delta t} = f(X_t, \dot{X}_t, \ddot{X}_t, X_{t-\Delta t}, \dot{X}_{t-\Delta t}, \ddot{X}_{t-\Delta t}, \dots) \quad (5.38)$$

Enquanto que nos métodos implícitos, as posições no intervalo de tempo atual envolvem as velocidades e acelerações da própria etapa atual, $t + \Delta t$, ou seja:

$$X_{t+\Delta t} = f(\dot{X}_{t+\Delta t}, \ddot{X}_{t+\Delta t}, X_t, \dot{X}_t, \ddot{X}_t, \dots) \quad (5.39)$$

No que diz respeito a estabilidade, tais métodos podem ser definidos como estáveis ou instáveis, podendo ser classificados como condicional ou incondicional. Os métodos estáveis são aqueles que convergem, enquanto que os métodos instáveis apresentam crescente propagação de erros ao longo do tempo.

Normalmente, os métodos implícitos são incondicionalmente estáveis, isto é, referente a estabilidade do algoritmo, não existem restrições quanto ao tamanho do incremento de tempo. Sendo assim, o incremento de tempo empregado é prescrito pela precisão e não pela estabilidade do algoritmo.

Enquanto os métodos explícitos são condicionalmente estáveis, ou seja, para que a estabilidade do algoritmo seja preservada existe a necessidade de rigorosas restrições quanto a dimensão do incremento de tempo. Desta forma, ao contrário dos métodos implícitos, o incremento de tempo é governado pela estabilidade do algoritmo e não pela precisão.

Existem diversos critérios a serem utilizados para a escolha do algoritmo apropriado para a solução de um dado problema, onde tais critérios baseiam-se tanto em propriedades intrínsecas do algoritmo, como custo computacional, precisão, convergência, consistência, estabilidade e amortecimento numérico (Silveira, 2001).

Os procedimentos explícitos são mais adequados para resolução de problemas de propagação de onda, enquanto que os esquemas implícitos são mais eficazes para problemas inerciais, no entanto, o custo computacional de ambas as abordagens é influenciada pela topologia da malha de elementos finitos (Dokainish & Subbaraj, 1989a).

A escolha do intervalo de tempo merece uma atenção especial, pois o mesmo está diretamente relacionado ao esforço computacional e precisão dos resultados. Normalmente, quanto maior o intervalo menor será o custo computacional, entretanto, menor será a precisão dos resultados.

Dokainish & Subbaraj (1989a, 1989b) exibem uma visão abrangente sobre os aspectos dos esquemas de integração no tempo, explícitos e implícitos, onde são apresentados os procedimentos computacionais para a implementação de problemas dinâmicos de estruturas com comportamento linear e não linear.

A dificuldade na escolha de um algoritmo adequado está em conciliar robustez, precisão e estabilidade. Nesta seção serão introduzidos os algoritmos de integração temporal de Newmark, Houbolt, α -Generalizado, Wilson- θ , Diferenças Centrais, Souza & Moura (1997) e Chung & Lee (1994). Todos os métodos serão descritos em função das posições nodais. Cada algoritmo é caracterizado pela forma específica de atualização das equações das posições, velocidades e acelerações e pela equação de equilíbrio.

Para análises transientes de curta duração, como simulações de impacto, o método explícito da Diferença Central é bastante utilizado (Furlan, 2011). Entretanto, este método é incondicionalmente estável, necessitando de incrementos de tempo pequenos. Por consequência, em vários problemas, particularmente para análise de vibração estrutural, a abordagem implícita pode demonstra-se mais efetiva (Bathe, 1996).

A Figura 5.3 esboça o esquema de integração temporal associado ao procedimento de Newton-Raphson. Cada algoritmo possui características próprias no que se refere à estabilidade, consistência, precisão e eficiência. Para uma visão mais ampla e detalhada dos algoritmos de integração temporal e suas características, o leitor é direcionado ao trabalho de Tamma *et al.* (2000).

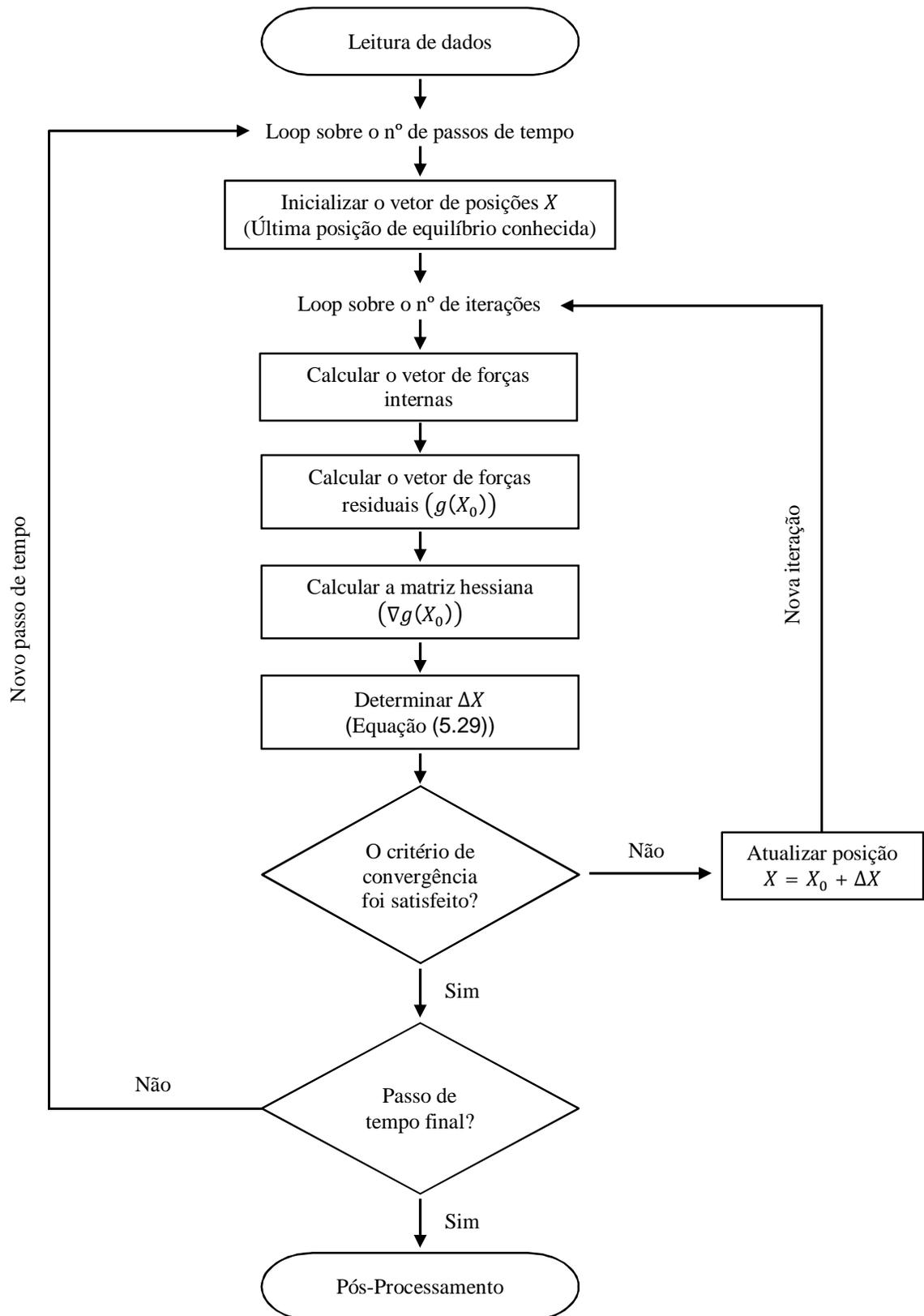


Figura 5.3: Fluxograma da discretização temporal associada ao procedimento iterativo.

5.4.1 Método implícito de Newmark

O esquema de Newmark é o método de integração temporal mais difundido na literatura (Wriggers, 2006). Newmark (1959) apresentou o método de passo simples representado pelas expressões:

$$X_{t+\Delta t} = X_t + \Delta t \dot{X}_t + \Delta t^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{X}_t + \beta \ddot{X}_{t+\Delta t} \right] \quad (5.40)$$

$$\dot{X}_{t+\Delta t} = \dot{X}_t + \Delta t(1 - \gamma) \ddot{X}_t + \gamma \Delta t \ddot{X}_{t+\Delta t} \quad (5.41)$$

As Equações (5.40) e (5.41) baseiam-se na simplificação da variável aceleração nos intervalos de tempo. Os termos γ e β são os coeficientes de Newmark, onde representam parâmetros de ajuste, responsáveis por estabelecer ao final do intervalo de tempo o quanto a aceleração pesa na estimativa da posição e velocidade nesse mesmo instante de tempo. Conforme Bottura (1997), pode-se dizer então que esses parâmetros ponderam "o quanto de implícito" o método apresenta, uma vez que tomados nulos, produzem um processo explícito.

Na família de Newmark existe diversas particularizações, distinguidos pela aplicação de diferentes valores para γ e β . A Tabela 5.2, expõe alguns métodos da família de Newmark e suas devidas características.

Tabela 5.2: Métodos da família de Newmark (Vieira, 2004).

Método	Tipo	β	γ	Condição de Estabilidade	Ordem de Precisão
Aceleração Média (Regra Trapezoidal)	Implícito	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	Incondicional	2
Aceleração Linear	Implícito	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	Condicional	2
Fox-Goodwin	Implícito	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$	Condicional	2
Diferença Central	Explícito	0	$\frac{1}{2}$	Condicional	2

Manipulando-se a Equação (5.40) obtém-se a aceleração, definida por:

$$\ddot{X}_{t+\Delta t} = \frac{X_{t+\Delta t} - X_t}{\beta \Delta t^2} - \frac{\dot{X}_t}{\beta \Delta t} - \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \ddot{X}_t \quad (5.42)$$

Assim, substituindo as Equações (5.41) e (5.42) em (5.13), tem-se:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial X} \Big|_{t+\Delta t} = \frac{\partial U_e}{\partial X} \Big|_{t+\Delta t} - F_{t+\Delta t} + \frac{M}{\beta \Delta t^2} X_{t+\Delta t} - M Q_t + \frac{\gamma C}{\beta \Delta t} X_{t+\Delta t} + C R_t - \gamma \Delta t C Q_t = 0 \quad (5.43)$$

Onde os vetores Q_t e R_t estão relacionados às contribuições anteriores, estabelecidas pelas seguintes expressões:

$$Q_t = \frac{X_t}{\beta \Delta t^2} + \frac{\dot{X}_t}{\beta \Delta t} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \ddot{X}_t \quad (5.44)$$

$$R_t = \dot{X}_t + \Delta t(1 - \gamma) \ddot{X}_t \quad (5.45)$$

Derivando-se a Equação (5.43) em relação as posições nodais para o passo atual, obtém-se a matriz hessiana para o problema dinâmico, dada por:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial X^2} \Big|_{t+\Delta t} = \nabla g(X_0) = \frac{\partial^2 U_e}{\partial X^2} \Big|_{t+\Delta t} + \frac{M}{\beta \Delta t^2} + \frac{\gamma C}{\beta \Delta t} \quad (5.46)$$

5.4.2 Método implícito de Houbolt

Neste método, apresentado por Houbolt (1950), as variáveis velocidade e aceleração são aproximadas por expressões em diferenças finitas descendentes, desta forma, concebendo um método multipasso. Trata-se de um método incondicionalmente estável e com precisão de segunda ordem. O amortecimento numérico está presente, crescente com o tamanho do passo e de forma brusca a partir de um determinado valor desse, não havendo um parâmetro livre que permita controlá-lo (Bottura, 1997; Hughes, 1987).

O método de Houbolt é obtido através da derivada de segunda ordem de polinômios cúbicos de Lagrange em relação ao tempo (Bathe, 1996). Desta maneira, os vetores da aceleração e velocidade são aproximados pelas Equações (5.47) e (5.48), respectivamente.

$$\ddot{X}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\Delta t^2} (2X_{t+\Delta t} - 5X_t + 4X_{t-\Delta t} - X_{t-2\Delta t}) \quad (5.47)$$

$$\dot{X}_{t+\Delta t} = \frac{1}{6\Delta t} (11X_{t+\Delta t} - 18X_t + 9X_{t-\Delta t} - 2X_{t-2\Delta t}) \quad (5.48)$$

Para avançar no movimento, as expressões (5.47) e (5.48) são conduzidas a equação de equilíbrio (5.13) referente ao instante $t + \Delta t$, resultando em:

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial X} \right|_{t+\Delta t} = \left. \frac{\partial U_e}{\partial X} \right|_{t+\Delta t} - F_{t+\Delta t} + \frac{2M}{\Delta t^2} X_{t+\Delta t} + M Q_t + \frac{11C}{6\Delta t} X_{t+\Delta t} + C R_t = 0 \quad (5.49)$$

Onde,

$$Q_t = \frac{1}{\Delta t^2} (-5X_t + 4X_{t-\Delta t} - X_{t-2\Delta t}) \quad (5.50)$$

$$R_t = \frac{1}{6\Delta t} (-18X_t + 9X_{t-\Delta t} - 2X_{t-2\Delta t}) \quad (5.51)$$

De forma análoga ao método anterior, a matriz hessiana para o problema dinâmico fica caracterizada pela derivada da Equação (5.49) em relação as posições nodais para o passo atual, determinada por:

$$\left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial X^2} \right|_{t+\Delta t} = \nabla g(X_0) = \left. \frac{\partial^2 U_e}{\partial X^2} \right|_{t+\Delta t} + \frac{2M}{\Delta t^2} + \frac{11C}{6\Delta t} \quad (5.52)$$

Dentre suas desvantagens destaca-se o fato de ser multipasso, impondo ajustes no tamanho dos passos de tempo. O método é exageradamente dissipativo nas frequências inferiores, exigindo passos relativamente pequenos para que esse efeito não

prejudique a resposta dos primeiros modos (Bottura, 1997). Outra inconveniência é a necessidade de lidar com um grande conjunto de dados de histórico.

5.4.3 Método implícito α -Generalizado

Hilber *et al.* (1977) apresentou um método de integração baseado no método de Newmark (Regra do Trapézio), denominado HHT- α , que consiste na inserção de um parâmetro de dissipação numérica (α_f) na equação de equilíbrio, desta forma, modificando a energia de deformação, o vetor de carregamento externo e as forças de amortecimento. Testes numéricos apresentados por Hilber *et al.* (1977) destacam que a escolha de α_f deve ser feita com cautela, pois as respostas são sensíveis ao parâmetro.

Wood *et al.* (1980), desenvolveram o algoritmo WBZ- α , que analogamente ao método HHT- α , consiste na modificação do esquema de Newmark através da inserção de um parâmetro de amortecimento numérico (α_m), alterando a parcela das forças inerciais.

Posteriormente, Chung & Hulbert (1993), apresentaram uma generalização dos algoritmos HHT- α e WBZ- α , intitulado de α -Generalizado, que consiste na combinação de ambos os métodos.

O objetivo da dissipação numérica é reduzir as respostas espúrias que são oscilações numéricas (não-físicas) provocadas por erros associados à utilização de um método numérico (Silveira, 2001). Para uma perspectiva mais abrangente sobre o amortecimento numérico, o leitor é referenciado ao artigo de Krenk & Hogsberg (2005).

Desta forma, a equação de equilíbrio é modificada da seguinte maneira:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial X} \Big|_{t+\Delta t} = \frac{\partial U_e}{\partial X} \Big|_{t+\Delta t-\alpha_f} + C \dot{X}_{t+\Delta t-\alpha_f} + M \ddot{X}_{t+\Delta t-\alpha_m} - F_{t+\Delta t-\alpha_f} = 0 \quad (5.53)$$

Neste método, admite-se que a aceleração, velocidade, posições, forças internas e forças externas sejam determinadas através da média ponderada dos seus respectivos

valores, para os passos de tempo t e $t + \Delta t$. Isto posto, as expressões que descrevem tais variáveis ficam definidas por:

$$\ddot{X}_{t+\Delta t-\alpha_m} = (1 - \alpha_m)\ddot{X}_{t+\Delta t} + \alpha_m\ddot{X}_t \quad (5.54)$$

$$\dot{X}_{t+\Delta t-\alpha_f} = (1 - \alpha_f)\dot{X}_{t+\Delta t} + \alpha_f\dot{X}_t \quad (5.55)$$

$$X_{t+\Delta t-\alpha_f} = (1 - \alpha_f)X_{t+\Delta t} + \alpha_fX_t \quad (5.56)$$

$$F_{t+\Delta t-\alpha_f} = (1 - \alpha_f)F_{t+\Delta t} + \alpha_fF_t \quad (5.57)$$

Onde α_f e α_m são parâmetros de ponderação pré-determinados, que descrevem a dissipação numérica.

Conforme a Equação (5.53), ressalta-se que o parâmetro α_m dissipa as forças inercias, ao mesmo tempo que α_f trata do vetor de carregamento externo, energia de deformação e das perdas de energia ocasionadas pelo amortecimento.

Desta forma, relacionando as Equações (5.54), (5.55), (5.56) e (5.57) com (5.53), tem-se:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Pi}{\partial X} \right|_{t+\Delta t} &= (1 - \alpha_f) \left. \frac{\partial U_e}{\partial X} \right|_{t+\Delta t} + (1 - \alpha_m)M\ddot{X}_{t+\Delta t} + (1 - \alpha_f)C\dot{X}_{t+\Delta t} \\ &= (1 - \alpha_f)F_{t+\Delta t} + \alpha_fF_t - \alpha_mM\ddot{X}_t - \alpha_fC\dot{X}_t - \alpha_f \left. \frac{\partial U_e}{\partial X} \right|_t \end{aligned} \quad (5.58)$$

As Equações (5.41) e (5.42) de Newmark são mantidas e substituídas na equação de equilíbrio (5.58), resultando em:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Pi}{\partial X} \right|_{t+\Delta t} &= (1 - \alpha_f) \left. \frac{\partial U_e}{\partial X} \right|_{t+\Delta t} + (1 - \alpha_m) \frac{M}{\beta \Delta t^2} X_{t+\Delta t} - (1 - \alpha_m)MQ_t \\ &\quad + (1 - \alpha_f) \frac{\gamma C}{\beta \Delta t} X_{t+\Delta t} + (1 - \alpha_f)CR_t - (1 - \alpha_f)\gamma \Delta t CQ_t \\ &\quad - (1 - \alpha_f)F_{t+\Delta t} - \alpha_fF_t + \alpha_mM\ddot{X}_t + \alpha_fC\dot{X}_t + \alpha_f \left. \frac{\partial U_e}{\partial X} \right|_t \end{aligned} \quad (5.59)$$

Os vetores Q_t e R_t , referente as contribuições do passado, são mantidos, conforme as Equações (5.44) e (5.45). A Equação (5.60) define a matriz hessiana.

$$\left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial X^2} \right|_{t+\Delta t} = \nabla g(X_0) = (1 - \alpha_f) \left. \frac{\partial^2 U_e}{\partial X^2} \right|_{t+\Delta t} + (1 - \alpha_m) \frac{M}{\beta \Delta t^2} + (1 - \alpha_f) \frac{\gamma C}{\beta \Delta t} \quad (5.60)$$

Conforme apresentado em Chung & Hulbert (1993), o método α -Generalizado é incondicionalmente estável e apresenta precisão de segunda ordem, além disso, permite uma máxima dissipação de altas frequências e mínima dissipação de baixas frequências para os parâmetros:

$$\gamma = \frac{1}{2} - \alpha_m + \alpha_f \quad (5.61)$$

$$\beta = \frac{1}{4} (1 - \alpha_m + \alpha_f)^2 \quad (5.62)$$

A dissipação de baixa frequência é minimizada quando:

$$\alpha_f = \frac{\alpha_m + 1}{3} \quad (5.63)$$

Para,

$$-1 \leq \alpha_m \leq 0 \quad (5.64)$$

$$0 \leq \alpha_f \leq \frac{1}{3} \quad (5.65)$$

Vale destacar que a escolha de $\alpha_f = 0$ implica no método WBZ- α , e $\alpha_m = 0$ resulta no método HHT- α . Enquanto que a adoção de $\alpha_m = 0$ e $\alpha_f = 0$ reduz o algoritmo ao método de Newmark (Regra Trapezoidal). Chung & Hulbert (1993) destacam que a escolha adequada dos parâmetros pode produzir um melhor desempenho no que se refere a precisão e dissipação numérica.

5.4.4 Método implícito de Wilson- θ

O método Wilson- θ é uma expansão do método da aceleração linear de maneira a torná-lo incondicionalmente estável. Em particular, o método Wilson- θ assume que a aceleração varia linearmente em um período de tempo estendido de t a $t + \theta_w \Delta t$, onde a escolha adequada do fator θ_w garante ao método precisão e estabilidade. A incorporação do parâmetro θ_w é motivada pela observação de que uma solução instável tende a oscilar sobre a verdadeira solução.

O fator θ_w deve ser, sempre, maior ou igual a 1. Se for igual a 1, o método de Newmark não é modificado. O método torna-se incondicionalmente convergente para valores superiores a 1,37. Diversos autores empregam θ_w igual a 1,4, porém, como demonstrado em Craig Jr. (1981), o valor ótimo de θ_w é 1,420815.

A utilização do parâmetro θ_w tende a introduzir um amortecimento numérico nos modos mais altos do sistema. No entanto, conforme Wilson (2002), em problemas que estes modos são relevantes, os erros introduzidos são significativos. Além disso, a equação de equilíbrio dinâmico não é exatamente satisfeita no momento $t + \Delta t$. Portanto, em tais casos, não se recomenda a utilização do método Wilson- θ (Wilson, 2002).

Seja τ um incremento no tempo, onde $0 \leq \tau \leq \theta_w \Delta t$, assume-se para o intervalo de tempo entre t e $t + \theta_w \Delta t$ que a aceleração é estabelecida por:

$$\ddot{X}_{t+\tau} = \ddot{X}_t + \frac{\tau}{\theta_w \Delta t} (\ddot{X}_{t+\theta_w \Delta t} - \ddot{X}_t) \quad (5.66)$$

Integrando-se a Equação (5.66) e empregando as devidas condições iniciais, tem-se:

$$\dot{X}_{t+\tau} = \dot{X}_t + \ddot{X}_t \tau + \frac{\tau^2}{2\theta_w \Delta t} (\ddot{X}_{t+\theta_w \Delta t} - \ddot{X}_t) \quad (5.67)$$

$$X_{t+\tau} = X_t + \dot{X}_t \tau + \frac{\ddot{X}_t \tau^2}{2} + \frac{\tau^3}{6\theta_w \Delta t} (\ddot{X}_{t+\theta_w \Delta t} - \ddot{X}_t) \quad (5.68)$$

Fazendo $\tau = \theta_w \Delta t$, reescreve-se as Equações (5.67) e (5.68) da seguinte maneira:

$$\dot{X}_{t+\theta_w \Delta t} = \dot{X}_t + \frac{\theta_w \Delta t}{2} (\ddot{X}_{t+\theta_w \Delta t} + \ddot{X}_t) \quad (5.69)$$

$$X_{t+\theta_w \Delta t} = X_t + \theta_w \Delta t \dot{X}_t + \frac{\theta_w^2 \Delta t^2}{6} (\ddot{X}_{t+\theta_w \Delta t} + 2\ddot{X}_t) \quad (5.70)$$

Resolvendo as Equações (5.69) e (5.70) para $\dot{X}_{t+\theta_w \Delta t}$ e $\ddot{X}_{t+\theta_w \Delta t}$ em termos de $X_{t+\theta_w \Delta t}$, obtém-se:

$$\ddot{X}_{t+\theta_w \Delta t} = \frac{6}{\theta_w^2 \Delta t^2} (X_{t+\theta_w \Delta t} - X_t) - \frac{6}{\theta_w \Delta t} \dot{X}_t - 2\ddot{X}_t \quad (5.71)$$

$$\dot{X}_{t+\theta_w \Delta t} = \frac{3}{\theta_w \Delta t} (X_{t+\theta_w \Delta t} - X_t) - 2\dot{X}_t - \frac{\theta_w \Delta t}{2} \ddot{X}_t \quad (5.72)$$

A determinação dos deslocamentos, velocidades e acelerações no instante $t + \Delta t$ são obtidos através do equilíbrio no instante $t + \theta_w \Delta t$, conseqüentemente, o vetor de forças externas será estimado para $t + \theta_w \Delta t$. Desta forma, a projeção das forças externas fica definida por:

$$F_{t+\theta_w \Delta t} = F_t + \theta_w (F_{t+\Delta t} - F_t) \quad (5.73)$$

Através das Equações (5.71) e (5.72), para o passo estendido $t + \theta_w \Delta t$, a expressão (5.13) pode ser reescrita do seguinte modo:

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial X} \right|_{t+\theta_w \Delta t} = \left. \frac{\partial U_e}{\partial X} \right|_{t+\theta_w \Delta t} - F_{t+\theta_w \Delta t} + \frac{6M}{\theta_w^2 \Delta t^2} X_{t+\theta_w \Delta t} + MQ_t + \frac{3C}{\theta_w \Delta t} X_{t+\theta_w \Delta t} + CR_t = 0 \quad (5.74)$$

Onde,

$$Q_t = - \left(\frac{6}{\theta_w^2 \Delta t^2} X_t + \frac{6}{\theta_w \Delta t} \dot{X}_t + 2\ddot{X}_t \right) \quad (5.75)$$

$$R_t = - \left(\frac{3}{\theta_w \Delta t} X_t + 2\dot{X}_t + \frac{\theta_w \Delta t}{2} \ddot{X}_t \right) \quad (5.76)$$

Derivando-se a Equação (5.74) tem-se a matriz hessiana do problema dinâmico, representada matematicamente pela expressão (5.77).

$$\left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial X^2} \right|_{t+\theta_w \Delta t} = \nabla g(X_0) = \left. \frac{\partial^2 U_e}{\partial X^2} \right|_{t+\theta_w \Delta t} + \frac{6M}{\theta_w^2 \Delta t^2} + \frac{3C}{\theta_w \Delta t} \quad (5.77)$$

Resolvendo-se as Equações (5.66), (5.67) e (5.68) para $\tau = \Delta t$, é possível atualizar as variáveis de interesse para o passo de tempo $t + \Delta t$. Logo:

$$\ddot{X}_{t+\Delta t} = \ddot{X}_t + \frac{1}{\theta_w} (\ddot{X}_{t+\theta_w \Delta t} - \ddot{X}_t) \quad (5.78)$$

$$\dot{X}_{t+\Delta t} = \dot{X}_t + \Delta t \ddot{X}_t + \frac{\Delta t}{2\theta_w} (\ddot{X}_{t+\theta_w \Delta t} - \ddot{X}_t) \quad (5.79)$$

$$X_{t+\Delta t} = X_t + \Delta t \dot{X}_t + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{X}_t + \frac{\Delta t^2}{6\theta_w} (\ddot{X}_{t+\theta_w \Delta t} - \ddot{X}_t) \quad (5.80)$$

5.4.5 Método explícito das Diferenças Centrais

Dentre os métodos explícitos de integração, o método das Diferenças Centrais é um dos mais utilizados em problemas de dinâmica estrutural. Entretanto, tal algoritmo expõe algumas deficiências comuns entre os métodos explícitos, como por exemplo, a necessidade de empregar incrementos de tempo relativamente pequenos, haja visto que problemas de instabilidade numérica surgem com o emprego de incrementos inadequados.

Sejam as posições nos pontos posterior e anterior, $t + \Delta t$ e $t - \Delta t$, respectivamente, representadas por séries de Taylor centradas em X_t , tem-se:

$$X_{t+\Delta t} = X_t + \Delta t \dot{X}_t + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{X}_t + \dots \quad (5.81)$$

$$X_{t-\Delta t} = X_t - \Delta t \dot{X}_t + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{X}_t - \dots \quad (5.82)$$

Cuja soma truncada nos termos de segunda ordem produz:

$$\dot{X}_t = \frac{1}{2\Delta t} (X_{t+\Delta t} - X_{t-\Delta t}) \quad (5.83)$$

Analogamente, da diferença entre as Equações (5.81) e (5.82), pode-se escrever:

$$\ddot{X}_t = \frac{1}{\Delta t^2} (X_{t+\Delta t} - 2X_t + X_{t-\Delta t}) \quad (5.84)$$

A aplicação das Equações (5.83) e (5.84) na Equação de equilíbrio (5.13) para o instante t permite a obtenção de $t + \Delta t$, resultando em:

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial X} \right|_{t+\Delta t} = \left. \frac{\partial U_e}{\partial X} \right|_{t+\Delta t} - F_{t+\Delta t} + \frac{M}{\Delta t^2} X_{t+\Delta t} + M Q_t + \frac{C}{2\Delta t} X_{t+\Delta t} + C R_t = 0 \quad (5.85)$$

Onde,

$$Q_t = -2X_t + X_{t-\Delta t} \quad (5.86)$$

$$R_t = -X_{t-\Delta t} \quad (5.87)$$

A partir da derivada da Equação (5.85), tem-se:

$$\left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial X^2} \right|_{t+\Delta t} = \nabla g(X_0) = \left. \frac{\partial^2 U_e}{\partial X^2} \right|_{t+\Delta t} + \frac{M}{\Delta t^2} + \frac{C}{2\Delta t} \quad (5.88)$$

O método é condicionalmente estável, ou seja, o tamanho do incremento de tempo deve ser suficientemente pequeno para que não haja propagação de erros ao longo dos passos de tempo (Chopra, 2012). Desta forma, existe um valor crítico utilizado para determinar um incremento de tempo adequado (Δt_{crit}), definido pela seguinte expressão:

$$\frac{\Delta t_{crit}}{T_\pi} \leq \frac{1}{\pi} \quad (5.89)$$

Onde,

$$T_{\pi} = \frac{2\pi}{\omega_{max}} \quad (5.90)$$

Sendo ω_{max} a maior frequência natural e T_{π} seu respectivo período. O método apresenta precisão de segunda ordem.

5.4.6 Método explícito de Souza & Moura (1997)

Souza & Moura (1997) apresentaram um algoritmo de integração explícita, no qual empregou-se diferenças finitas de quarta ordem com o objetivo de atenuar erros obtidos pelo método das Diferenças Centrais. Conforme os pesquisadores, esta abordagem, além de reduzir as oscilações numéricas espúrias, conserva as vantagens oferecidas pelo método das Diferenças Centrais.

A principal ideia do algoritmo consiste em escrever os deslocamentos (para este trabalho, as posições) como um polinômio de Lagrange de quatro graus. Logo:

$$\dot{X}_{t+\Delta t} = \frac{1}{2\Delta t}(X_{t+\Delta t} - X_{t-\Delta t}) - \frac{1}{12\Delta t}(X_{t-3\Delta t} - 6X_{t-2\Delta t} + 12X_{t-\Delta t} - 10X_t + 3X_{t+\Delta t}) \quad (5.91)$$

$$\ddot{X}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\Delta t^2}(X_{t+\Delta t} - 2X_t + X_{t-\Delta t}) - \frac{1}{12\Delta t^2}(X_{t+\Delta t} - 4X_t + 6X_{t-\Delta t} - 4X_{t-2\Delta t} + X_{t-3\Delta t}) \quad (5.92)$$

Substituindo as Equações (5.91) e (5.92) em (5.13), obtém-se:

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial X} \right|_{t+\Delta t} = \left. \frac{\partial U_e}{\partial X} \right|_{t+\Delta t} - F_{t+\Delta t} + \frac{11M}{12\Delta t^2} X_{t+\Delta t} + MQ_t + \frac{C}{4\Delta t} X_{t+\Delta t} + CR_t = 0 \quad (5.93)$$

Sendo que,

$$Q_t = \frac{1}{12\Delta t^2}(-20X_t + 6X_{t-\Delta t} + 4X_{t-2\Delta t} - X_{t-3\Delta t}) \quad (5.94)$$

$$R_t = \frac{1}{12\Delta t} (10X_t - 18X_{t-\Delta t} + 6X_{t-2\Delta t} - X_{t-3\Delta t}) \quad (5.95)$$

A matriz hessiana, é dada por:

$$\left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial X^2} \right|_{t+\Delta t} = \nabla g(X_0) = \left. \frac{\partial^2 U_e}{\partial X^2} \right|_{t+\Delta t} + \frac{11M}{12\Delta t^2} + \frac{C}{4\Delta t} \quad (5.96)$$

Logo, para que o esquema seja estável, exige-se que:

$$\Delta t_{crit} \leq \frac{2}{\omega_{max}} \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (5.97)$$

Onde ω_{max} é a maior frequência natural do problema.

Como é possível observar, a implementação deste método é semelhante ao das Diferenças Centrais. Para mais informações sobre o método, o leitor é referenciado aos estudos de Souza *et al.* (2004) e Souza & Moura (1997).

5.4.7 Método explícito de Chung & Lee (1994)

Chung & Lee (1994) apresentam uma nova família de métodos explícitos para solução de problemas dinâmicos lineares e não lineares. De maneira similar ao método α -Generalizado, para lidar com modos de alta frequência indesejados, o método de Chung & Lee (1994) apresenta dissipação numérica controlável. Este método apresenta precisão de segunda ordem. As posições e velocidades são aproximadas por:

$$X_{t+\Delta t} = X_t + \Delta t \dot{X}_t + \beta_1 \ddot{X}_t + \beta_2 \ddot{X}_{t+\Delta t} \quad (5.98)$$

$$\dot{X}_{t+\Delta t} = \dot{X}_t + \Delta t \ddot{X}_t + \gamma_1 \ddot{X}_t + \gamma_2 \ddot{X}_{t+\Delta t} \quad (5.99)$$

Onde,

$$\beta_1 = \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} - \beta_c \right) \quad (5.100)$$

$$\beta_2 = \Delta t^2 \beta_c \quad (5.101)$$

$$\gamma_1 = -\frac{1}{2} \Delta t \quad (5.102)$$

$$\gamma_2 = \frac{3}{2} \Delta t \quad (5.103)$$

O esquema de Chung & Lee (1994) apresenta somente um parâmetro livre, que é o parâmetro β_c . A partir de um estudo de precisão, convergência e estabilidade, tem-se:

$$1 \leq \beta_c \leq 28/27 \quad (5.104)$$

Isolando a aceleração na Equação (5.98) obtém-se:

$$\ddot{X}_{t+\Delta t} = \frac{(X_{t+\Delta t} - X_t)}{\beta_2} - \frac{\Delta t \dot{X}_t}{\beta_2} - \frac{\beta_1 \ddot{X}_t}{\beta_2} \quad (5.105)$$

Substituindo as Equações (5.99) e (5.105) em (5.13), tem-se:

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial X} \right|_{t+\Delta t} = \left. \frac{\partial U_e}{\partial X} \right|_{t+\Delta t} - F_{t+\Delta t} + \frac{M}{\beta_2} X_{t+\Delta t} + M Q_t + \frac{\gamma_2 C}{\beta_2} X_{t+\Delta t} + C R_t \quad (5.106)$$

Onde,

$$Q_t = -\frac{X_t}{\beta_2} - \frac{\Delta t \dot{X}_t}{\beta_2} - \frac{\beta_1 \ddot{X}_t}{\beta_2} \quad (5.107)$$

$$R_t = \dot{X}_t + \Delta t \ddot{X}_t + \gamma_1 \ddot{X}_t + \gamma_2 Q_t \quad (5.108)$$

Logo,

$$\left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial X^2} \right|_{t+\Delta t} = \nabla g(X_0) = \left. \frac{\partial^2 U_e}{\partial X^2} \right|_{t+\Delta t} + \frac{M}{\beta_2} + \frac{\gamma_2 C}{\beta_2} \quad (5.109)$$

O algoritmo de Chung & Lee (1994) apresenta características semelhantes ao método da Diferenças Centrais para $\beta_c = 1$. Enquanto que para valores próximos a 28/27, o método apresenta máxima dissipação numérica.

5.5 Impacto de estruturas contra anteparos rígidos

Nesta seção apresenta-se o esquema adotado para implementação computacional dos problemas de impacto unidirecional. A técnica aqui apresenta é implementada em Greco (2004), Marques (2006) e Maciel (2008), na qual consiste em restringir as posições nodais impactantes através da condição de penetração nula (CPN), onde:

$$X - \delta \geq 0 \quad (5.110)$$

O termo δ é a mínima distância entre o corpo e o anteparo rígido, conforme a Figura 5.4. Tal figura descreve o esquema de impacto unidirecional de uma estrutura A (estrutura projétil) distante δ de um anteparo B (anteparo rígido), conforme a situação I. Referente a situação II, fisicamente, para que haja impacto a Equação (5.110) deve ser satisfeita. Desta forma, restringe-se as posições nodais de maneira que:

$$X_{Nó} = X_{Anteparo} \quad (5.111)$$

Nessa situação, calcula-se o vetor de forças internas $F_{int} \neq 0$ nos pontos impactantes que contribuem diretamente no vetor de resíduos ($g = F_{cont} = F_{ext} - F_{int}$), de maneira a garantir a força de reflexão do corpo (Maciel, 2008). Neste trabalho, desconsidera-se o atrito entre estrutura e anteparo rígido.

Com relação a discretização temporal dos problemas de impacto, os trabalhos de Taylor & Papadopoulos (1993), Carpenter et al. (1991) e Solberg & Papadopoulos (1998) enfatizam que a formulação clássica de Newmark, isto é, com os parâmetros $\gamma = 0,5$ e $\beta = 0,25$, mostra-se ineficiente para problemas envolvendo altas frequências. Uma solução alternativa para corrigir tal instabilidade numérica pode ser averiguada em

Hu (1997). No mesmo foi apresentado um algoritmo da família de Newmark, que consiste no algoritmo clássico com os parâmetros $\gamma = 1,5$ e $\beta = 1,0$ (Greco, 2004). A Figura 5.5 ilustra as regiões de estabilidade do método de Newmark em função dos parâmetros γ e β .

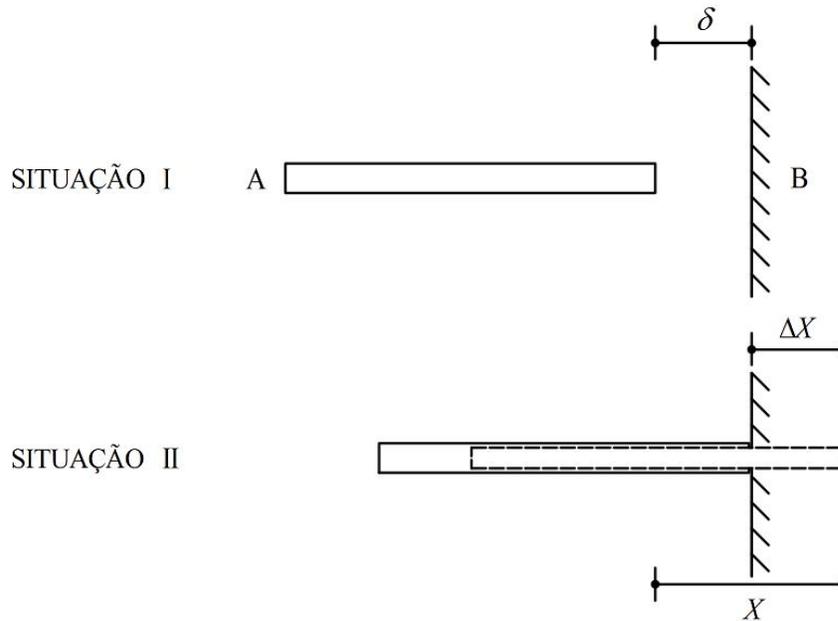


Figura 5.4: Condição de penetração nula.

Através da Figura 5.5, observa-se que os parâmetros indicados por Hu (1997) estão no limite da região de estabilidade sobre a curva β .

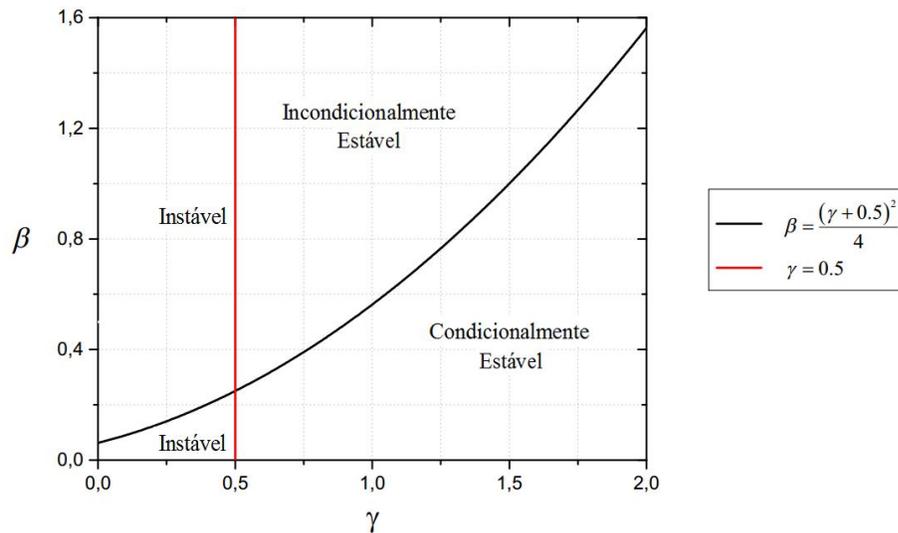


Figura 5.5: Regiões de estabilidade para os parâmetros de Newmark γ e β .

CAPÍTULO 6

Aplicações Numéricas

Este capítulo tem como finalidade a análise do comportamento mecânico e termomecânico de estruturas treliçadas, contemplando as não linearidades física e geométrica. Para isto, apresentam-se vários exemplos elucidativos.

Para avaliar a resposta dos métodos de integração temporal estudados, definiu-se um conjunto de exemplos, sendo os resultados obtidos comparados com os resultados presentes na literatura. Outro objetivo das análises numéricas foi o de apresentar, em um mesmo trabalho, casos clássicos contemplando os dois tipos de não linearidades abordadas, solucionados com o uso dos diferentes algoritmos.

Ainda referente aos algoritmos, por questões de praticidade, caso não seja dito o contrário, adota-se os seguintes parâmetros para todos os exemplos:

$$\begin{array}{ll} \gamma = 0,5 & \alpha_m = -0,97 \\ \beta = 0,25 & \alpha_f = 0,01 \\ \theta_w = 1,420815 & \beta_c = 1,03 \end{array}$$

Relativo ao método de Newmark, exclusivamente para os problemas de impacto, conforme mencionado no capítulo anterior, adota-se $\gamma = 1,5$ e $\beta = 1,0$ (Hu, 1997). Desta forma, destaca-se que o método α -Generalizado é ineficiente para problemas de impacto, pois baseia-se na regra do trapézio. Portanto, em tais problemas não será empregado o método α -Generalizado. Conforme mencionado anteriormente, nesse trabalho serão apresentados problemas de impacto sem atrito.

Seguindo o raciocínio de Duhamel, admite-se que existe um estado inicial submetido a uma determinada temperatura, positiva e constante com o decorrer do tempo,

aqui definida como temperatura de referência, em que não são observadas tensões, muito menos deformações. Para a discretização temporal adota-se $\bar{\alpha} = 0,5$.

Desta forma, a partir das fontes de calor termoelastoplásticas, as mudanças de temperatura são calculadas e, posteriormente, a configuração da estrutura é determinada. A cada nova iteração os carregamentos térmicos são atualizados, para assim, determinar a nova configuração estrutural. O processo iterativo prossegue até que variações de temperatura ou as deformações satisfaçam o critério de parada imposto.

6.1 Barra com temperatura restrita

Referente aos problemas térmicos, o aplicativo desenvolvido é confrontado com o estudo de Chen *et al.* (1987), que consta da análise térmica de uma barra unidimensional no decorrer do tempo. A barra tem comprimento equivalente a 1 metro. Pertinente a discretização temporal, a análise consta de 600 passos de tempo de 0,0001 *hr*. Referente as propriedades térmicas, admite-se que:

$$k = 1 \text{ BTU}/(\text{hr m } ^\circ\text{F})$$

$$\rho c_e = 1 \text{ BTU}/(\text{m}^3 \text{ } ^\circ\text{F})$$

A temperatura nas extremidades da barra é mantida constante com o decorrer do tempo, segundo as condições:

$$\theta(0, t) = 1000 \text{ } ^\circ\text{F} \quad (6.1)$$

$$\theta(1, t) = 0 \text{ } ^\circ\text{F} \quad (6.2)$$

As condições de contorno promovem a distribuição da temperatura entre os nós. Através da Figura 6.1 percebe-se que os resultados obtidos condizem com o trabalho de Chen *et al.* (1987), convergindo para a resposta analítica, onde é possível comparar a variação da temperatura ao longo da barra para diferentes quantidades de elementos.

Neste exemplo, a precisão dos resultados fica condicionada pela quantidade de elementos.

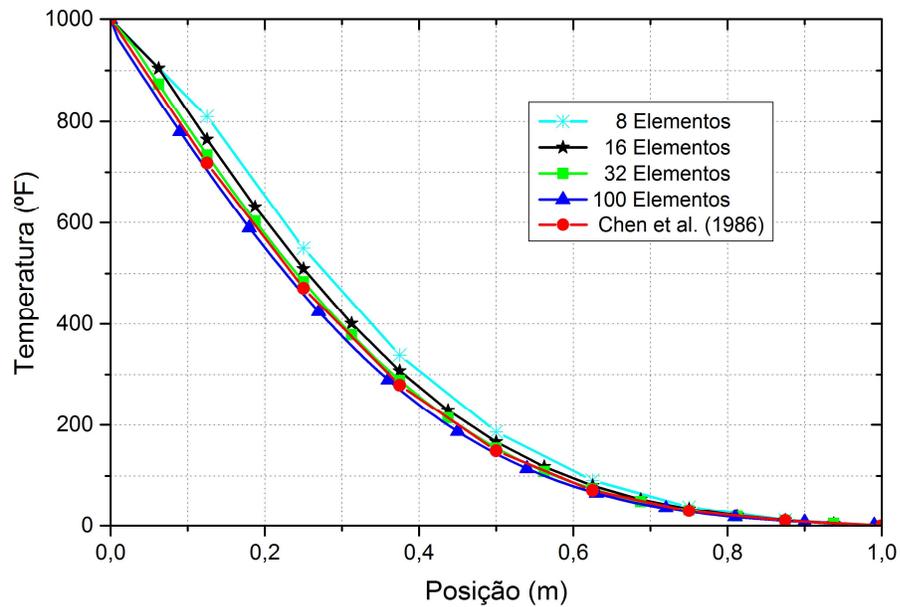


Figura 6.1: Temperatura ao longo da barra.

6.2 Barra com carregamento térmico

Neste exemplo, presente nos estudos de Carrazedo (2009) e Copetti (2002), avalia-se o comportamento térmico de uma barra unidimensional com carregamento térmico. A barra foi decomposta em 100 elementos de igual dimensão. Por questões de simplicidade, os autores adotam a condutividade térmica, o calor específico e a massa específica equivalente a 1. A discretização temporal é realizada com um intervalo de tempo igual a 0,0001.

A Figura 6.2 esboça o carregamento térmico ao longo da barra, descrito pela Equação (6.3).

$$p(x) = 10 \cos(2\pi x) \quad (6.3)$$

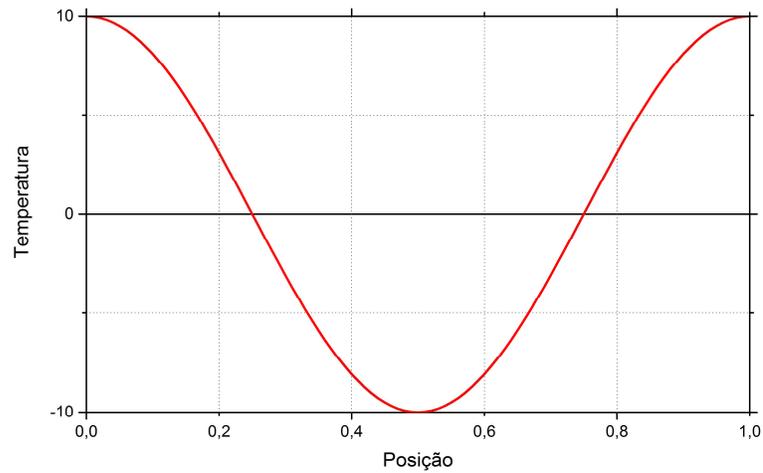


Figura 6.2: Carregamento térmico.

No decorrer da análise, relativo a posição $x = 0$, temperatura e deslocamento são restringidos, conforme as expressões:

$$\theta(0, t) = 10 \quad (6.4)$$

$$u(0, t) = 0 \quad (6.5)$$

As Figuras 6.3 e 6.4 esboçam um resumo das variações de temperatura ao longo do tempo, nos quais condizem com os resultados de Carrazedo (2009) e Copetti (2002).

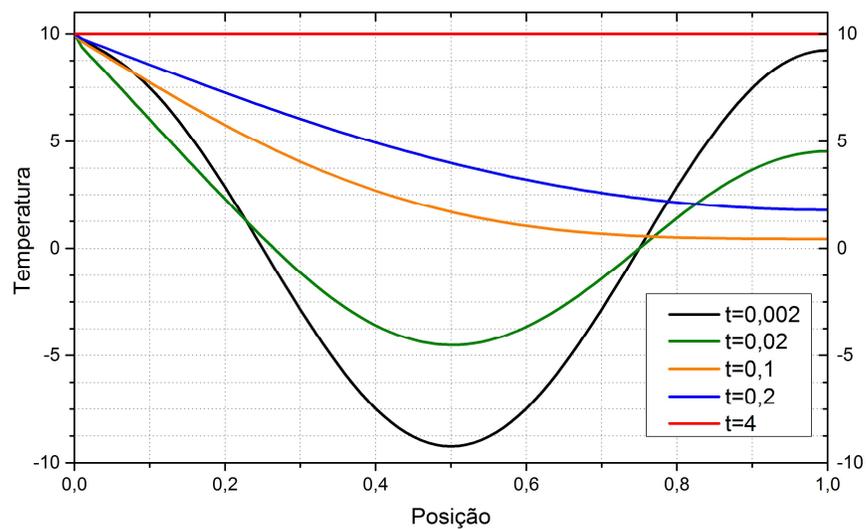


Figura 6.3: Mudança de temperatura ao longo da barra.

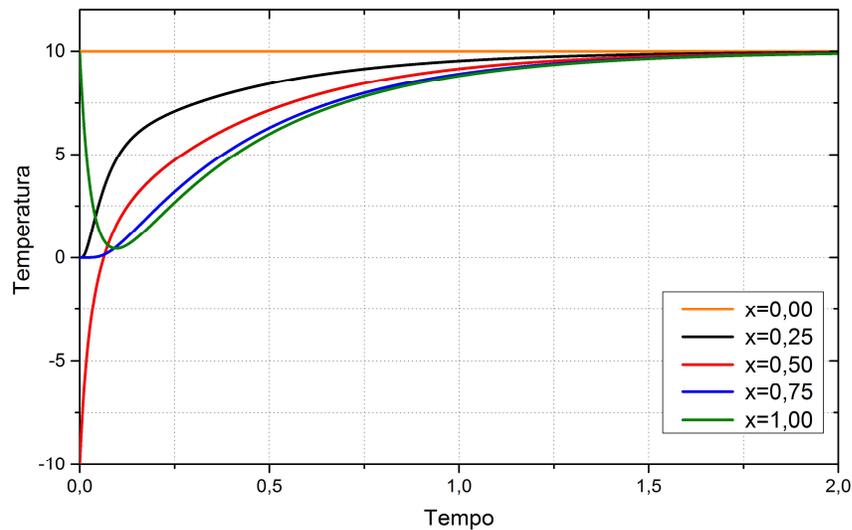


Figura 6.4: Mudança de temperatura em diferentes posições.

Através da Figura 6.3, percebe-se que, devido a temperatura restrita, a temperatura em todos nós tendem a entrar em equilíbrio com o decorrer do tempo, ficando constante em algum momento ($t = 4$). Observar-se que com o passar do tempo o carregamento térmico é dissipado entre os nós. Enquanto que a Figura 6.4, ilustra o caminho do equilíbrio térmico para diferentes posições da barra, onde os mesmos tendem a um ponto em comum ($\theta = 10$).

6.3 Treliça plana com temperaturas restritas

Neste exemplo, analisa-se o comportamento térmico de uma treliça plana com temperaturas restritas, conforme ilustrado na Figura 6.5. Além disso, não existe acoplamento entre as mudanças de temperatura e as deformações.

A discretização é realizada com intervalos de tempo de 0,01. A condutividade térmica, o calor específico e a massa específica são tomadas igual a 1. Na Figura 6.6 é possível visualizar a distribuição da temperatura na estrutura ao longo do tempo.

Observa-se, em conformidade com as leis da termodinâmica, que a temperatura se propaga dos pontos com temperatura mais elevada para as regiões mais baixas. Os elementos centrais, por estarem posicionados distantes dos nós com temperatura

restrita, apresentam uma variação de temperatura mais lenta quando comparados aos elementos próximos a fonte de calor. As temperaturas nodais continuam crescendo com o decorrer do tempo, buscando equilíbrio, até apresentarem o mesmo valor.

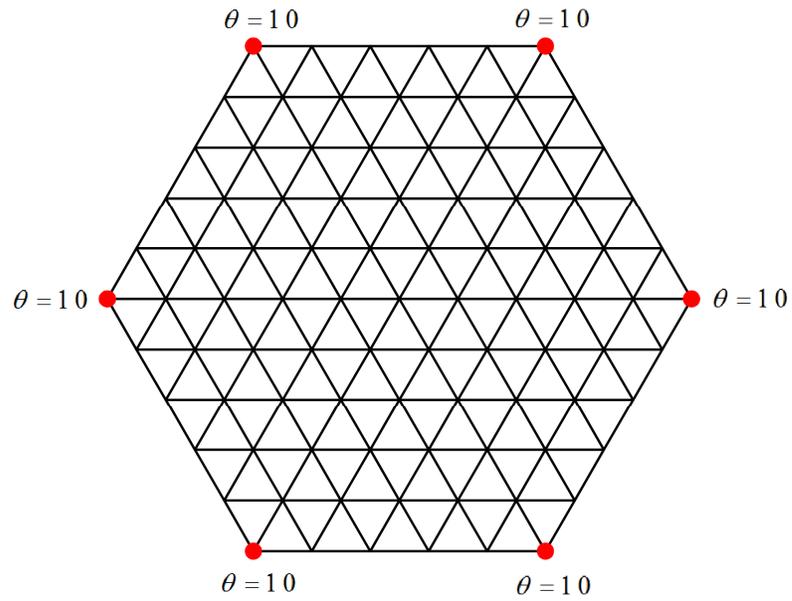


Figura 6.5: Treliça plana.

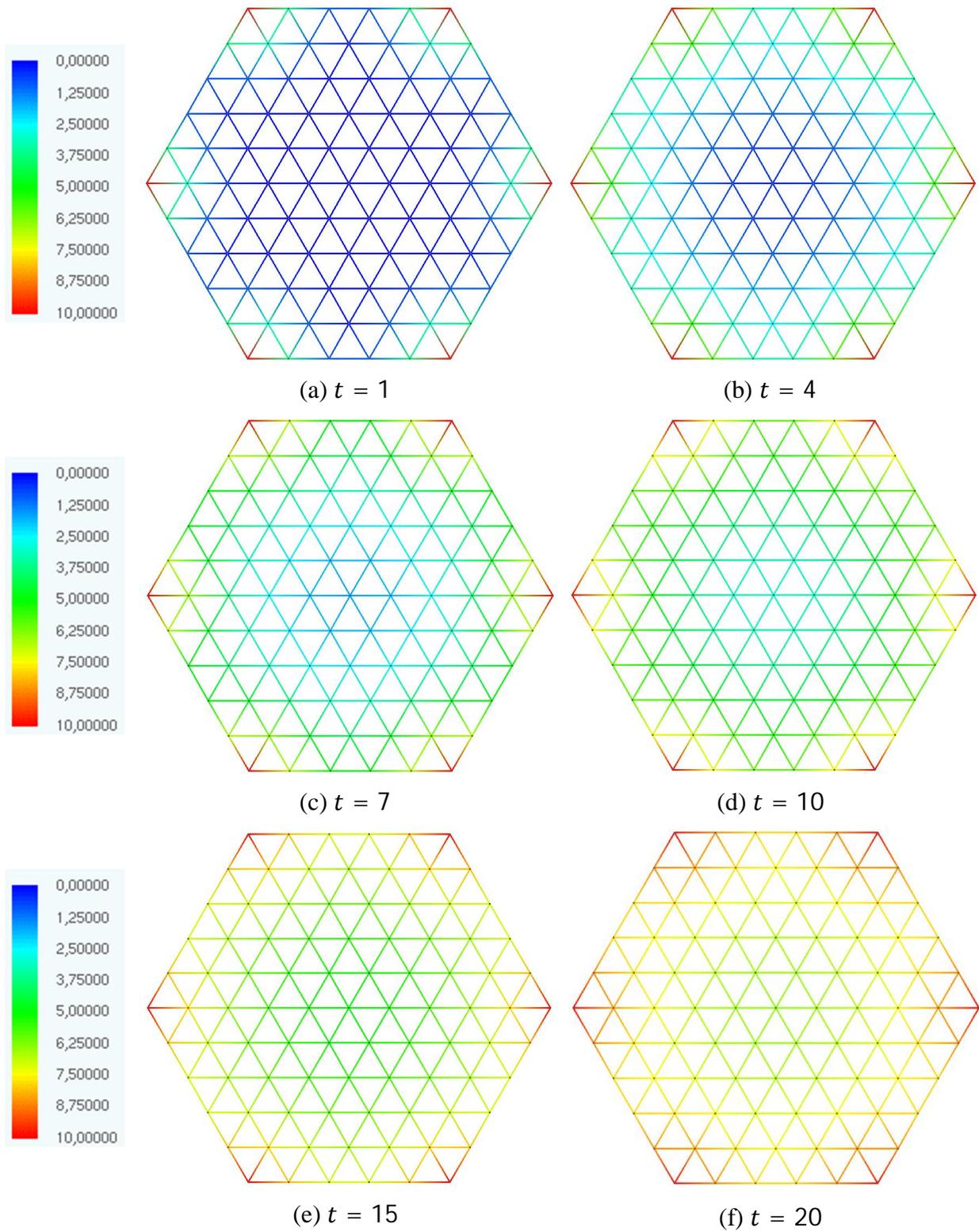


Figura 6.6: Mudanças de temperatura na treliça plana.

6.4 Treliza plana de duas barras

Neste exemplo, presente nos estudos de Kassimali & Bidhendi (1988), Zhu *et al.* (1994) e Ferreira (2009), a estrutura treliçada é composta por dois elementos finitos, solicitados inicialmente por uma força F , aplicada no nó de união entre os elementos (Figura 6.7). As características físicas e geométricas dos dois elementos são dadas por: $E = 20000 \text{ ksi}$, $A = 1 \text{ pol}^2$, $L = 100 \text{ pol}$ e $\rho = 11,85 \cdot 10^{-4} \text{ ksi s}^2$. O período natural (T_n) de vibração vertical da estrutura em sua configuração indeformada é $0,139 \text{ s}$. As propriedades de amortecimento da treliça foram desprezadas.

Referente a discretização temporal, adota-se três passos de tempo, equivalente a $T_n/50$, $T_n/500$ e $T_n/5000$. O objetivo deste exemplo é comparar o comportamento dos esquemas de integração temporal. A análise é realizada para três casos, diferenciados pelos carregamentos. O Caso 1 consta de um carregamento constante, enquanto que nos Casos 2 e 3, tem-se um carregamento decrescente, partindo de 200 e 1545 *kips*, respectivamente, conforme a Figura 6.7.

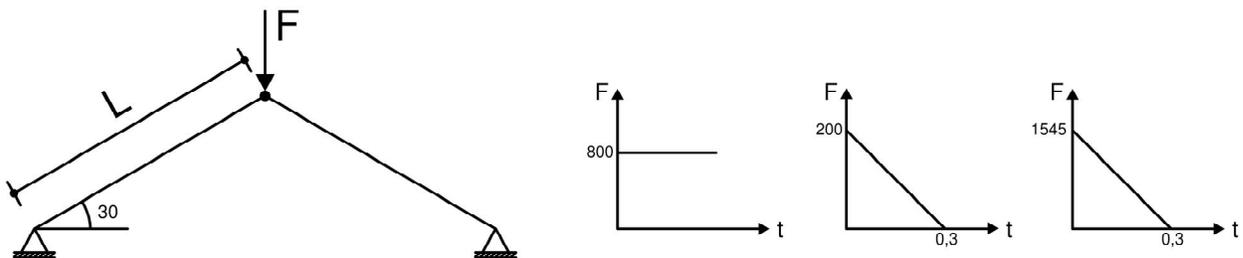


Figura 6.7: Treliza constituída por dois elementos finitos.

O primeiro passo na análise dinâmica é definir um valor apropriado para o intervalo de tempo, sendo que o mesmo está diretamente relacionado com o comportamento real da estrutura e problemas de instabilidade numérica (Bathe & Wilson, 1973). As Figuras 6.8, 6.9 e 6.10 comparam, diante diferentes algoritmos de integração temporal para distintos intervalos de tempo, o deslocamento vertical do nó onde o carregamento é aplicado.

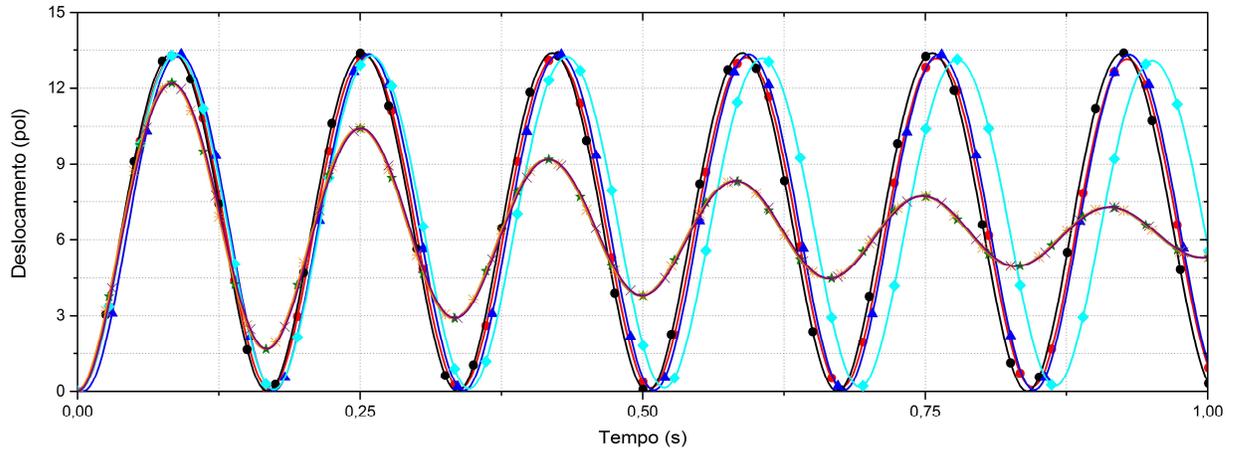
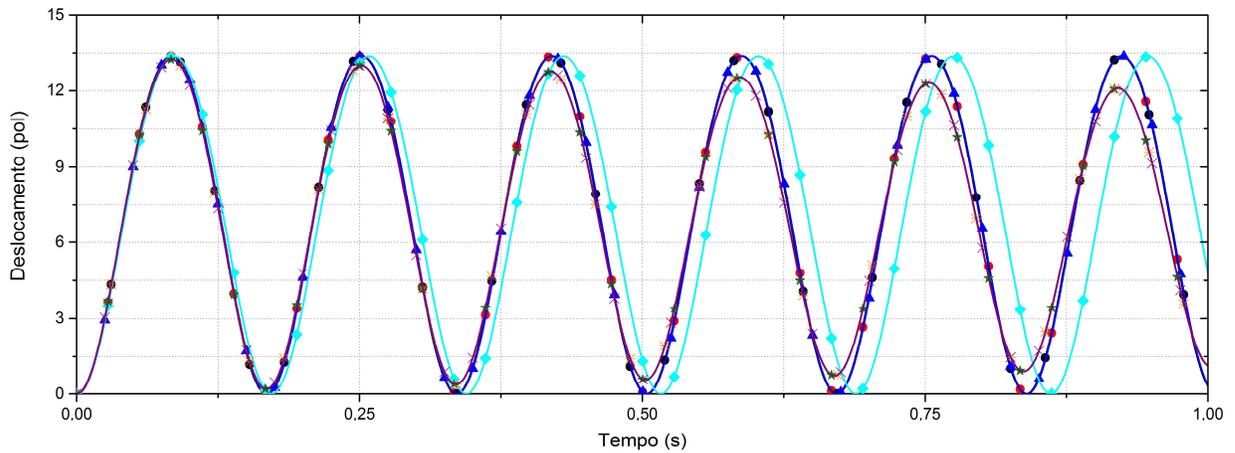
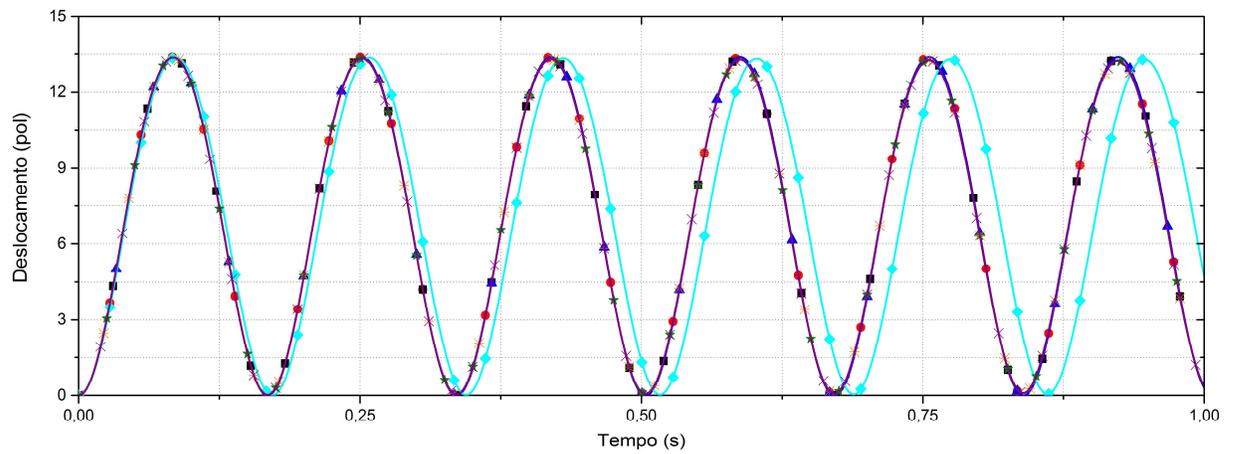
(a) $\Delta t = 0,00278$ s(b) $\Delta t = 0,000278$ s(c) $\Delta t = 0,0000278$ s

Figura 6.8: Caso 1.

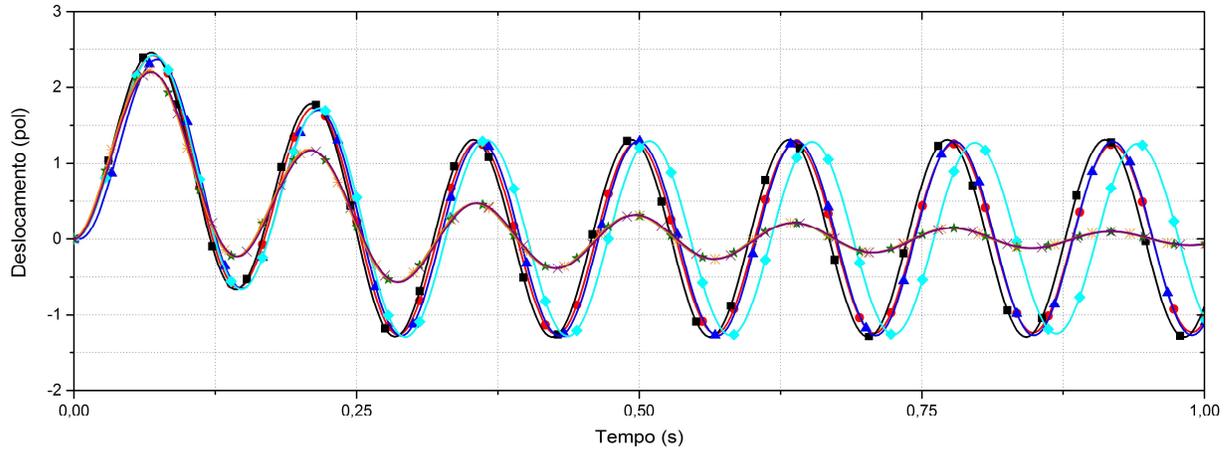
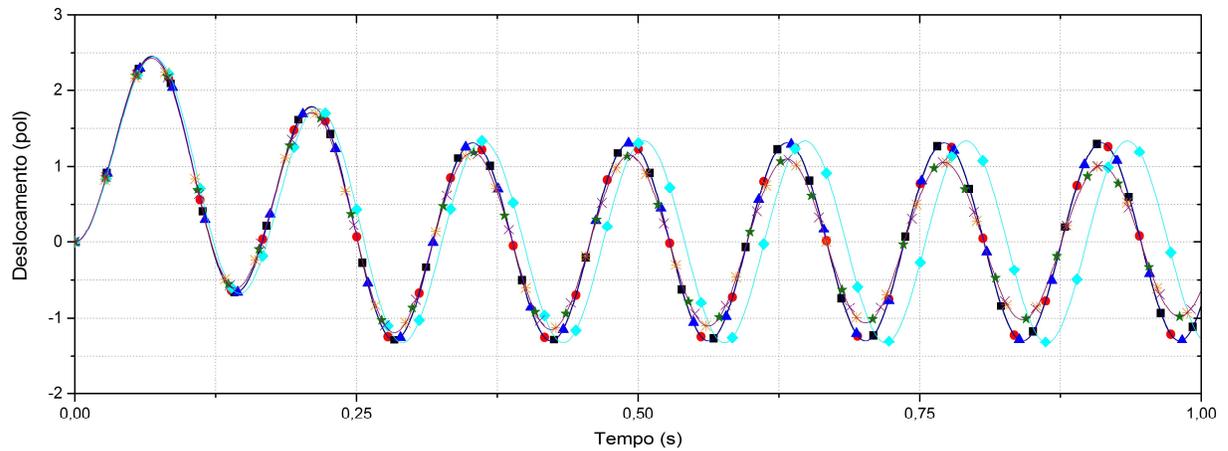
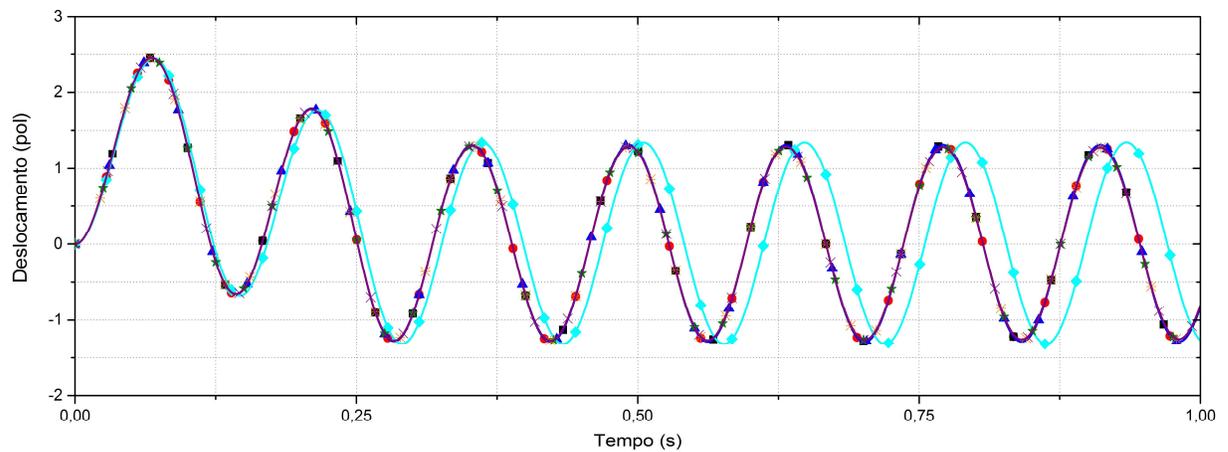
(a) $\Delta t = 0,00278$ s(b) $\Delta t = 0,000278$ s(c) $\Delta t = 0,0000278$ s

Figura 6.9: Caso 2.

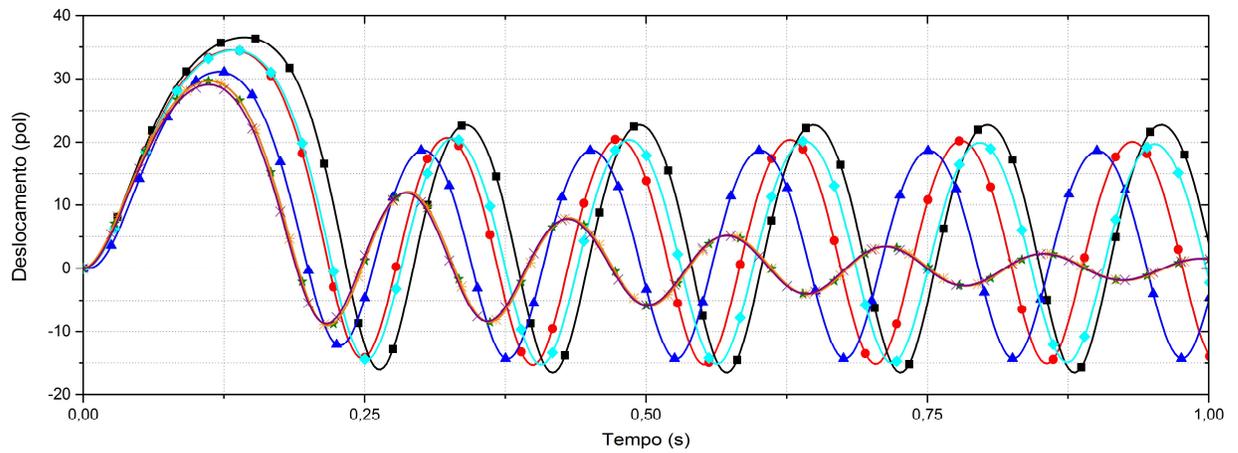
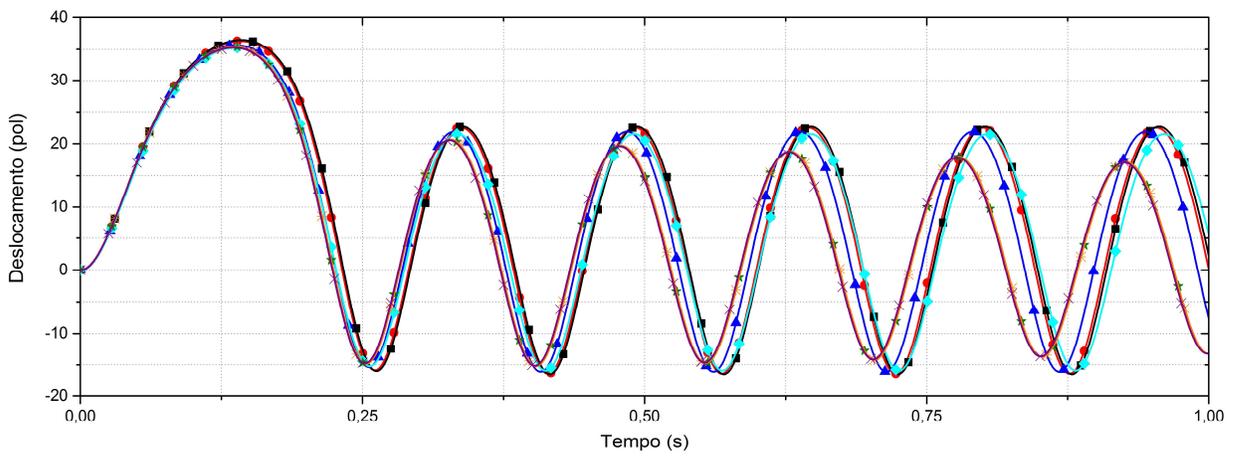
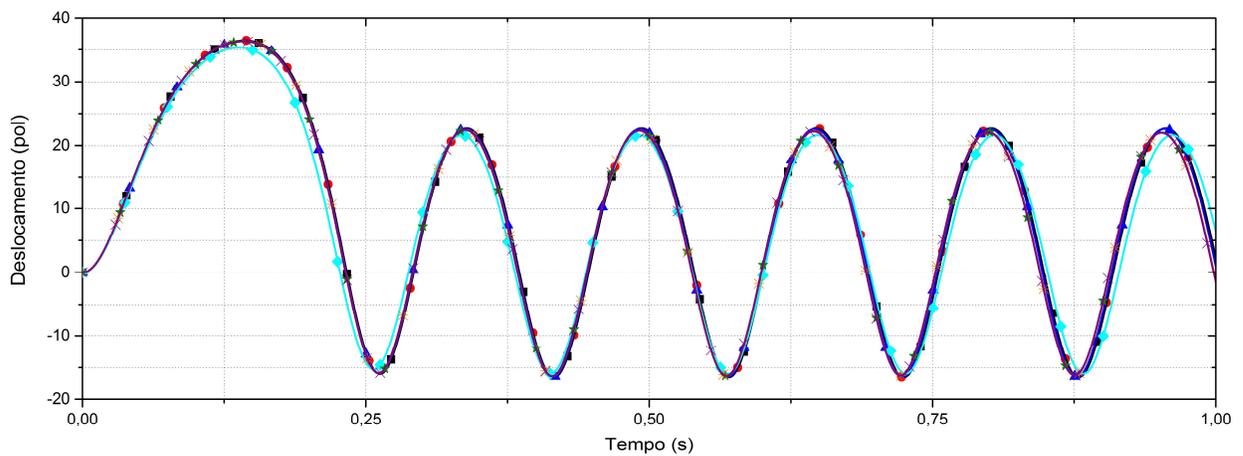
(a) $\Delta t = 0,00278 \text{ s}$ (b) $\Delta t = 0,000278 \text{ s}$ (c) $\Delta t = 0,0000278 \text{ s}$

Figura 6.10: Caso 3.

Em tais figuras é possível visualizar, principalmente nos métodos explícitos, a influência de Δt na resposta estrutural. Vale destacar que, neste exemplo, a adoção de intervalos menores que 0,0000278 s não implicará em mudanças perceptíveis no comportamento dos resultados.

Através das Figuras 6.8, 6.9 e 6.10 é possível visualizar a discrepância de resultados entre métodos. Os resultados dos métodos explícitos apresentaram, entre si, uma diferença relativamente pequena. Como esperado, o método de Chung & Lee (1994) apresentou um pequeno amortecimento numérico em relação aos algoritmos de Souza & Moura (1997) e Diferenças Centrais. Tal amortecimento é condicionado pela manipulação do parâmetro β_c .

Para os intervalos 0,00278 e 0,000278 s, os métodos explícitos apresentam certo amortecimento em relação aos métodos implícitos. A medida que se diminui os intervalos de tempo, diminui-se a dissipação dos métodos explícitos, enquanto que os resultados dos métodos implícitos não sofrem grandes mudanças com a variação do intervalo.

As Figuras 6.8, 6.9 e 6.10 destacam, com nitidez, o amortecimento numérico introduzido pelo método α -Generalizado. Além dos parâmetros, tal amortecimento está diretamente relacionado com a magnitude dos deslocamentos. Outra observação importante neste método, é que, o amortecimento numérico diminui com a diminuição do intervalo de tempo. O método de Newmark apresentou, praticamente, resultados idênticos ao dos pesquisadores referenciados anteriormente, independente do intervalo de tempo. Os métodos de Houbolt e Wilson- θ manifestaram um leve amortecimento para os intervalos 0,00278 e 0,000278 s.

O método α -Generalizado apresentou um comportamento incomum no Caso 3, onde esboçou redução do comprimento de onda e da amplitude dos deslocamentos, porém, com a diminuição do intervalo de tempo e com o decorrer do tempo, o método tende a recuperar seu comportamento típico.

A abordagem explícita exigiu menos esforço computacional, porém, existe a necessidade de um intervalo de tempo menor, como já esperado. Os métodos explícitos e implícitos praticamente condizem para o intervalo de tempo igual a 0,0000278 s.

6.5 Cúpula treliçada com 24 barras

Este exemplo, amplamente abordado na literatura (Meek & Tan, 1984; Zhu *et al.*, 1994; Wang *et al.*, 2006), consiste em uma cúpula treliçada em forma de estrela com comportamento não-linear. A geometria da estrutura é apresentada na Figura 6.11. O sistema possui 13 nós e 24 elementos. A discretização é executada com o intervalo de tempo igual a 0,001 s. A estrutura é solicitada por uma força constante ao longo do tempo. Cada elemento possui as seguintes características:

$$\begin{aligned}
 E &= 30000 \text{ N/cm}^2 & A &= 3,17 \text{ cm}^2 \\
 \sigma_Y &= 200 \text{ N/cm}^2 & c_m &= 3 \text{ s}^{-1} \\
 \rho &= 20 \text{ g/cm}^3
 \end{aligned}$$

As Figuras 6.12 e 6.13 ilustram, através do método de Houbolt, a variação da posição vertical do nó central com o decorrer do tempo, para carregamentos com diferentes magnitudes. A Figura 6.12 aborda somente a não linearidade geométrica, enquanto que a Figura 6.13 contempla o comportamento elastoplástico.

Para os carregamentos 25 N e 50 N a estrutura apresentou comportamento puramente elástico, desta forma, os resultados de ambas as figuras são os mesmos.

No instante que os esforços atingem a tensão de escoamento a estrutura passa a trabalhar no regime plástico. Na Figura 6.13 é possível visualizar uma mudança no comportamento da treliça após a plastificação, pois a estrutura não consegue regressar à posição de equilíbrio inicial, visto que o acúmulo de deformação plástica durante o processo plastificação tem caráter irreversível. Como consequência imediata, apesar do deslocamento máximo ser maior do que o deslocamento obtido sem a consideração da não linearidade física, tem-se a redução da amplitude das posições.

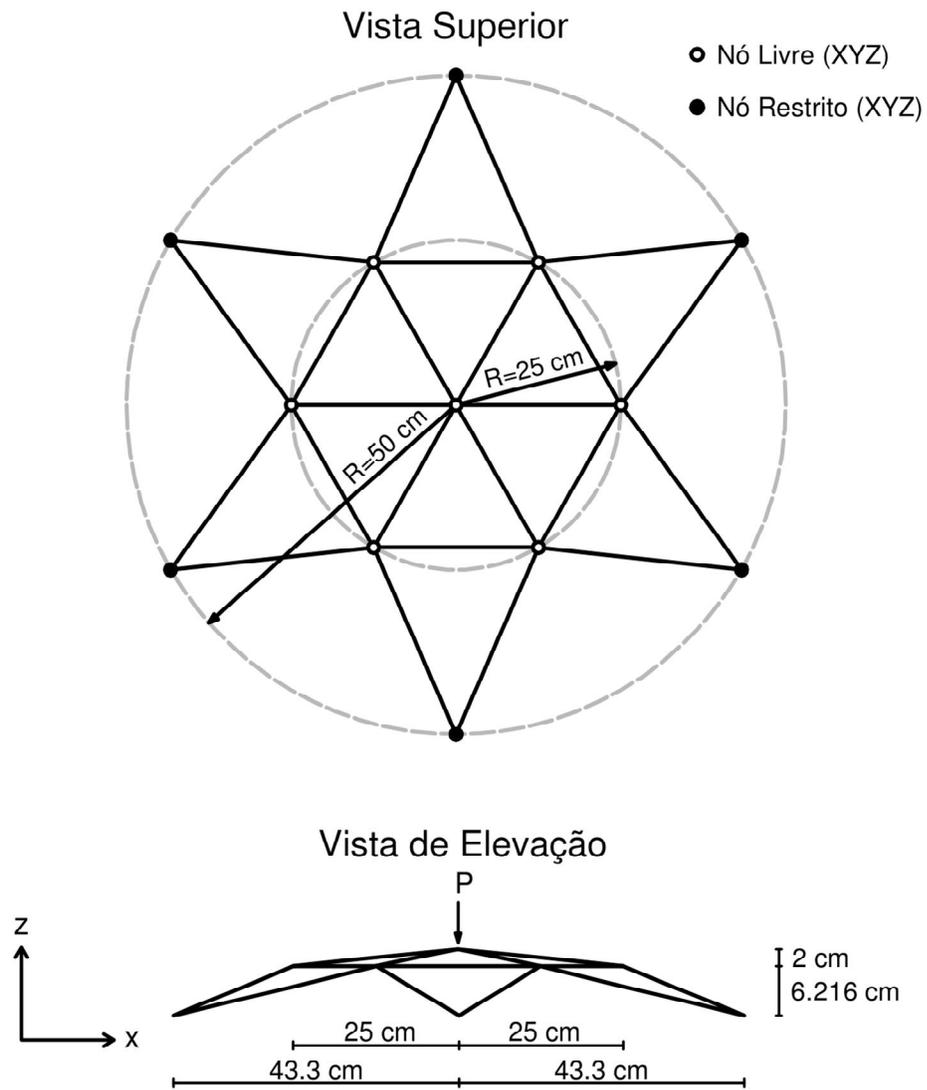


Figura 6.11: Cúpula treliçada com 24 barras.

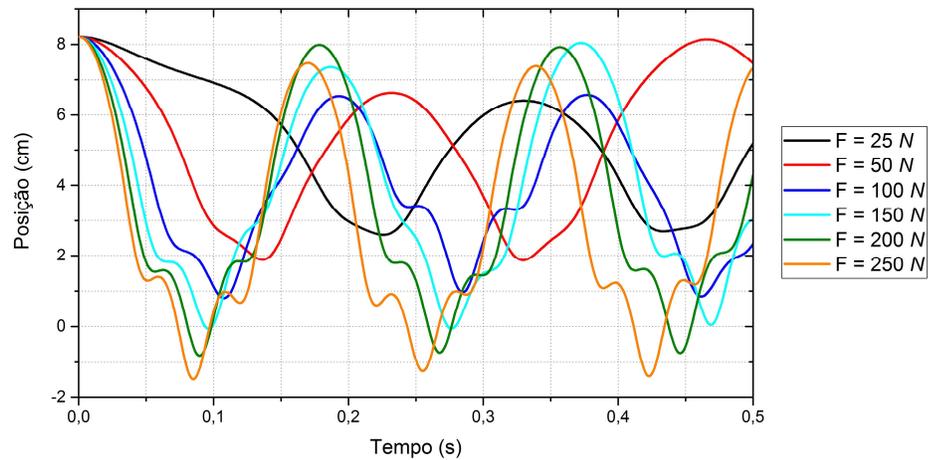


Figura 6.12: Posições (Não linearidade geométrica).

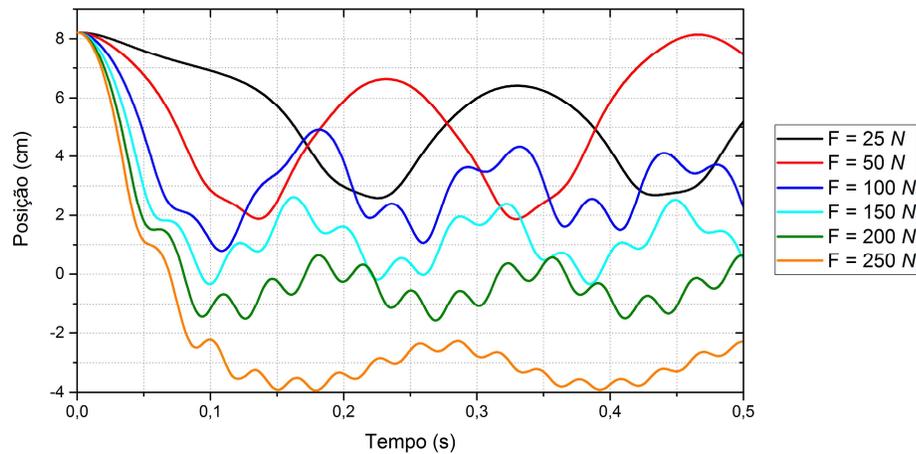


Figura 6.13: Posições (Não linearidade física).

As Figuras 6.14 e 6.15 comparam o comportamento elastoplástico da estrutura perante distintos esquemas de integração temporal, sem e com dissipação de energia, respectivamente. Tais figuras referem-se à variação das posições verticais do nó central para $F = 100\text{ N}$.

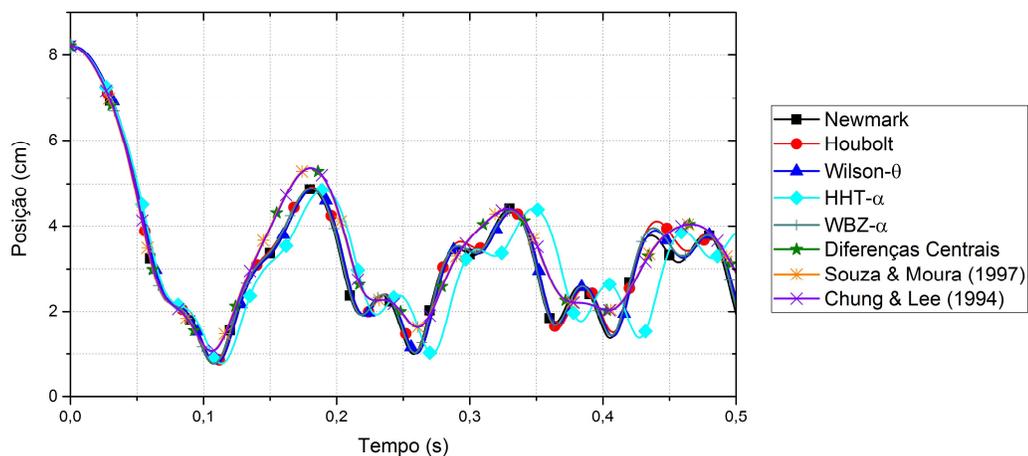


Figura 6.14: Posições (Sem dissipação de energia).

As Figuras 6.14 e 6.15 evidenciam, novamente, a necessidade de empregar um intervalo de tempo adequado para a discretização dos métodos explícitos. Referente a variação das posições, além do amortecimento, observa-se que os métodos explícitos apresentam determinada suavização dos picos, sendo tal comportamento relacionado ao valor de Δt .

Os métodos HHT- α e WBZ- α , casos particulares do método α -Generalizado, como esperado, introduzem certo amortecimento numérico, de acordo com os parâmetros α_f e α_m . Os demais métodos apresentam comportamento semelhante ao descrito no exemplo anterior.

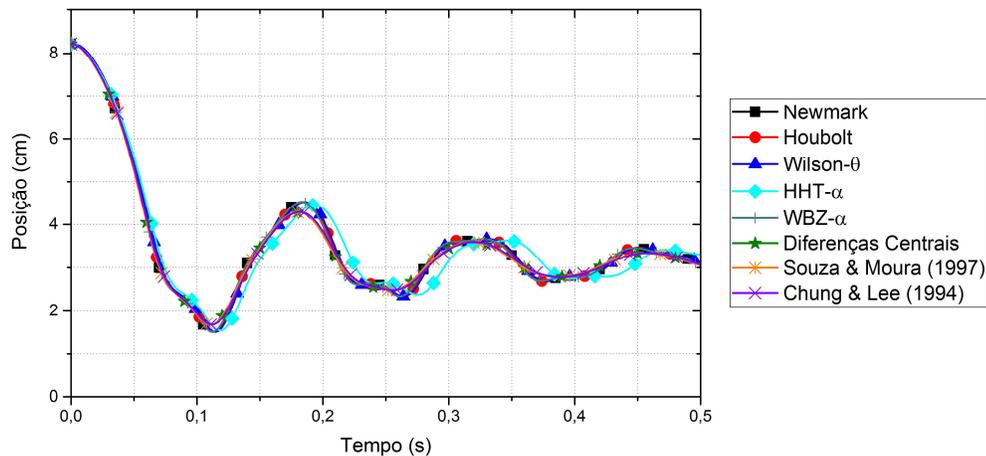


Figura 6.15: Posições (Com dissipação de energia).

Na Figura 6.15, com o passar do tempo, todos os métodos tendem para o mesmo resultado, onde a resposta dinâmica converge para a resposta estática.

6.6 Impacto unidirecional entre barra e anteparo rígido

Este exemplo, abordado inicialmente por Armero & Petocz (1998) e também reproduzido por Marques (2006) e Maciel (2008), trata do impacto uniaxial de uma barra, com velocidade constante, com um anteparo rígido (Figura 6.16). Os dados de entrada do problema são adimensionais, sendo $E=1$, $L=1$, $A=1$, $\rho=1$, $c_m=0$ e $\delta=0,05$.

Investiga-se o comportamento das forças de contato e velocidade dos nós impactantes diante diferentes métodos de integração temporal, explícitos e implícitos. Neste exemplo é investigada somente a não linearidade geométrica. A discretização temporal é realizada para 500 passos de tempo de 0,01. A barra foi discretizada em 20 elementos finitos de mesma dimensão.

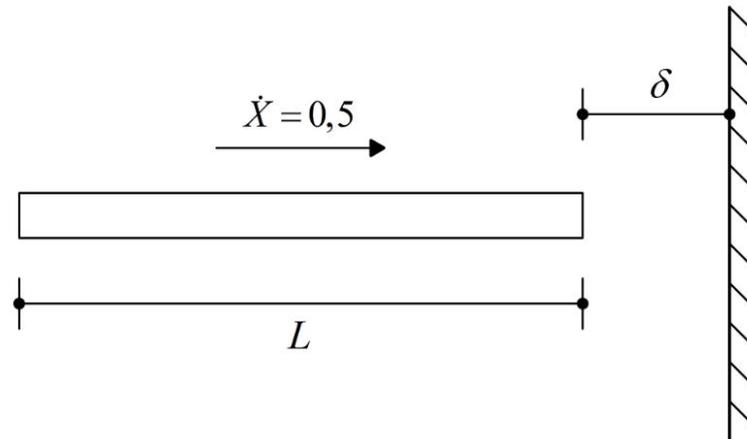


Figura 6.16: Esquema de impacto entre barra e anteparo rígido.

Constata-se que apenas o nó da extremidade sofre impacto. As Figuras 6.17 e 6.18 expõem a solução numérica da velocidade e força de contato do nó que sofre impacto.

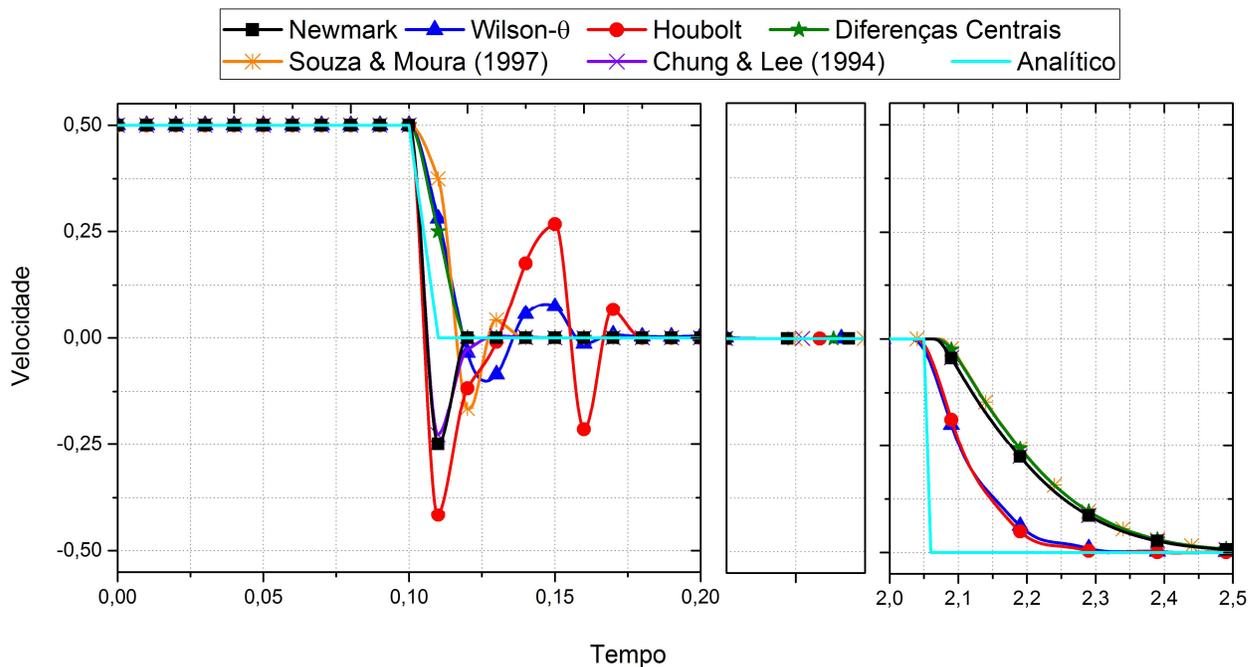


Figura 6.17: Velocidade do nó impactante.

Observa-se na Figura 6.17 que o impacto provoca um salto de velocidade na extremidade da barra. No primeiro trecho de tal figura, percebe-se que os algoritmos explícitos, principalmente o método das Diferenças Centrais, eliminam sensivelmente as

oscilações no momento do impacto quando comparados com os algoritmos implícitos, desta forma, aproximando-se do resultado analítico. Como consequência de ser um método multipasso, as velocidades obtidas pelo método de Houbolt apresentam elevadas perturbações em torno do instante de impacto. Os métodos de Chung & Lee (1994) e Newmark esboçam comportamento semelhante, nos quais apresentam um breve salto das velocidades do momento de impacto e rapidamente convergem para a resposta analítica. O método de Souza & Moura (1997) apresenta baixas oscilações, porém, para dissipá-las, leva mais tempo do que o método de Newmark.

Dentre todos os métodos, o esquema de Wilson- θ teve o pior desempenho, apesar de não ser visível, após o impacto, no segundo trecho, a resposta numérica apresenta leves oscilações em torno da resposta analítica, diminuindo com o passar do tempo. Com exceção do esquema de Wilson- θ , os resultados de todos os métodos coincidem no segundo trecho.

Referente ao terceiro trecho da Figura 6.17, os algoritmos de Houbolt e Wilson- θ , quando comparados com a resposta analítica, apresentam melhor desempenho. Os demais métodos apresentam resultados bastantes próximos.

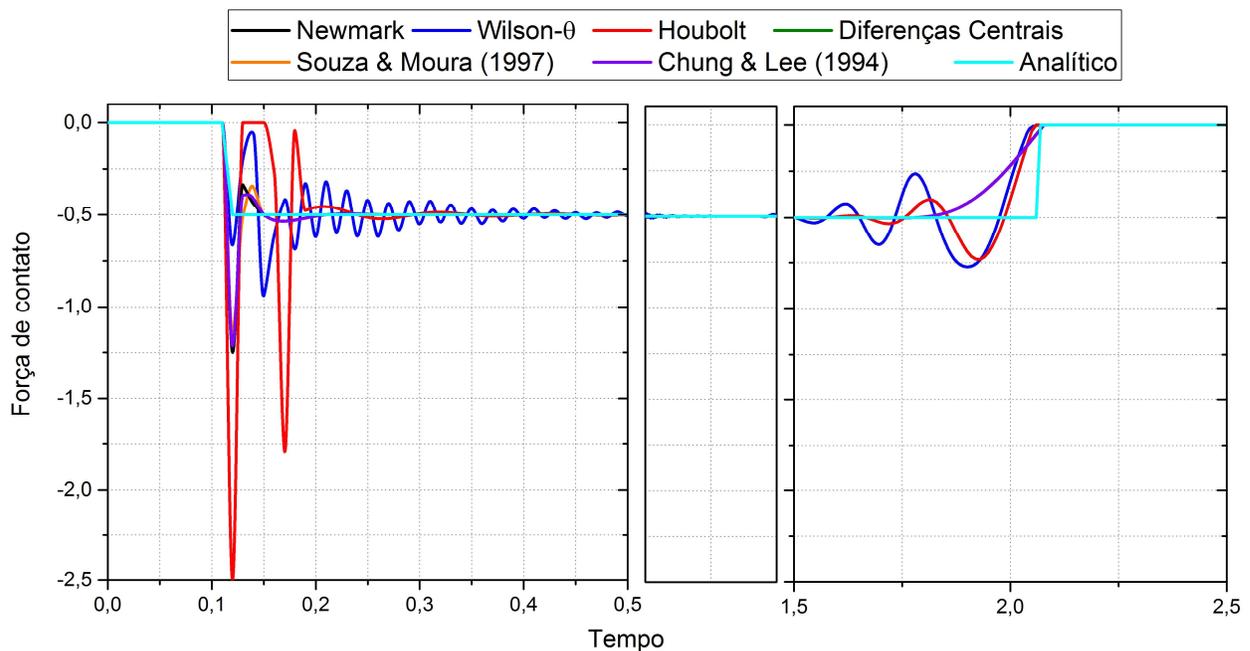


Figura 6.18: Força de contato do nó impactante.

A Figura 6.18 enfatiza a ineficiência dos métodos de Houbolt e Wilson- θ para problemas de impacto, onde é possível visualizar a propagação de perturbações com o decorrer do tempo.

Vale salientar que a solução analítica, baseada em conservação da quantidade de movimento, apresenta como velocidade de reflexão a velocidade média final do corpo e não do ponto em questão (Marques, 2006). Através das duas figuras mostradas anteriormente, conclui-se que os métodos explícitos e o esquema de Newmark são mais adequados para solução de problemas de impacto.

6.7 Viga treliçada

Neste exemplo analisa-se a influência do comportamento termoelástico na resposta estrutural. A treliça analisada é composta por 107 elementos e 48 nós. Além das condições de contorno e carregamento, a Figura 6.19 destaca os nós estudados (nó 2 e 16). Ao longo da análise, admite-se que os nós com deslocamentos restritos não apresentam variação de temperatura. A discretização temporal é realizada através do método de Newmark para 1000 passos de tempo com intervalo de 0,0001 s. A estrutura tem as seguintes características:

$$E = 68 \text{ GPa} \qquad c_e = 900 \text{ J}/(\text{°C kg})$$

$$\rho = 2700 \text{ kg}/\text{m}^3 \qquad k = 210 \text{ J}/(\text{°C m s})$$

$$A = 0,001 \text{ m}^2$$

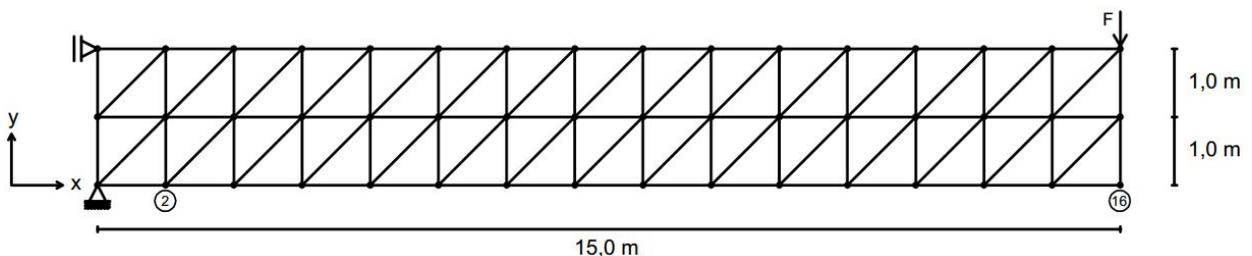


Figura 6.19: Viga Treliçada.

São analisados quatro casos distintos, onde varia-se a temperatura de referência e o coeficiente de expansão térmica. Logo:

$$\text{Caso 1: } \theta_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}, \quad \alpha = 0,0000240 \text{ m}/(\text{m }^\circ\text{C})$$

$$\text{Caso 2: } \theta_0 = 100 \text{ }^\circ\text{C}, \quad \alpha = 0,0000240 \text{ m}/(\text{m }^\circ\text{C})$$

$$\text{Caso 3: } \theta_0 = 300 \text{ }^\circ\text{C}, \quad \alpha = 0,0000255 \text{ m}/(\text{m }^\circ\text{C})$$

$$\text{Caso 4: } \theta_0 = 500 \text{ }^\circ\text{C}, \quad \alpha = 0,0000274 \text{ m}/(\text{m }^\circ\text{C})$$

Ressalta-se que os resultados apresentados neste exemplo não descrevem com fidelidade o comportamento do material, ou seja, são meramente ilustrativos, pois devido as extremas temperaturas de referência dos Casos 3 e 4, torna-se inevitável a consideração de leis constitutivas viscoelastoplásticas e hiperelastoplásticas.

A discrepância entre os resultados termoelástico e mecânico está diretamente relacionada com a magnitude das mudanças de temperatura. A Figura 6.20 (a-b) exibe a variação dos deslocamentos horizontal e vertical, respectivamente, do nó 16. O Caso 1 apresentou resultados bastante próximo da resposta mecânica. Em tais figuras é possível observar que temperaturas de referência mais elevadas promovem variações de temperatura mais relevantes.

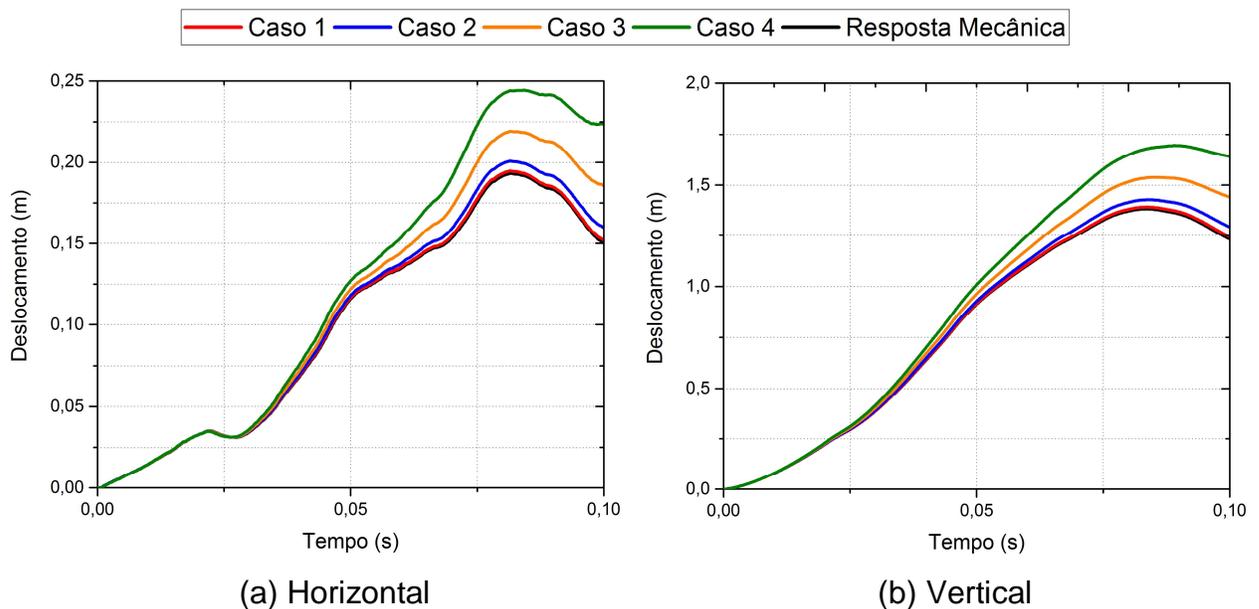


Figura 6.20: Deslocamentos do nó 16.

A diferença entre a resposta elástica e termoelástica aumentam com o decorrer do tempo. Isto mostra que, o acoplamento termoelástico não deve ser desprezado, pois, como é possível observar, tal comportamento pode apresentar contribuições significativas na resposta estrutural.

A Figura 6.21 apresenta a variação de temperatura no nó 2 ao longo do tempo. Observa-se, em todos os casos, que o nó 2 apresenta inicialmente uma variação negativa de temperatura e começa a aquecer rapidamente a partir de determinado momento. Para o Caso 1, devido a temperatura de referência ser relativamente baixa, tem-se pequenas variações de temperatura, atingindo um máximo de $0,14\text{ }^{\circ}\text{C}$. Comparando-se os Casos 1 e 2, sendo que os mesmos apresentam coeficiente de expansão térmica iguais, percebe-se a influência da temperatura de referência nos resultados. Para temperaturas de referência mais elevadas, Casos 3 e 4, tem-se um aumento considerável da magnitude das temperaturas.

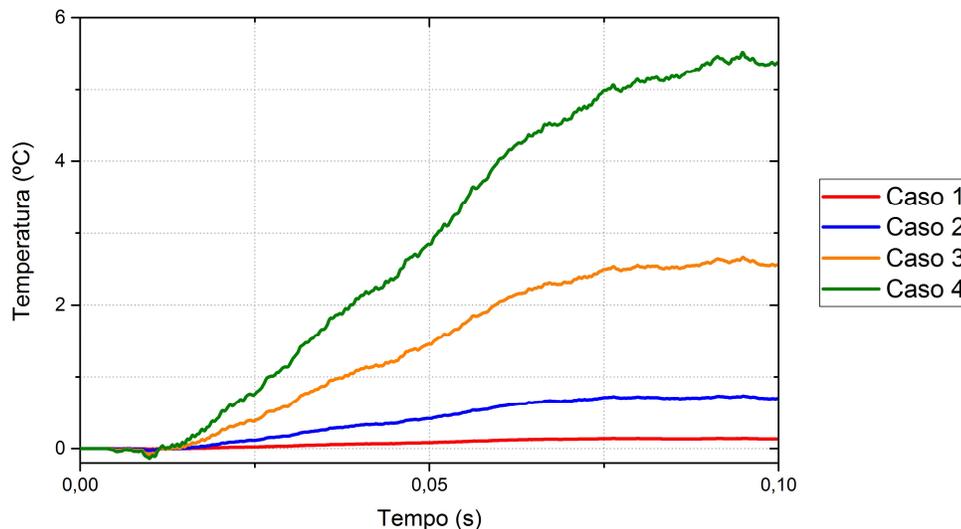


Figura 6.21: Variação de temperatura no nó 2.

A Figura 6.22 ilustra, para o Caso 4, a distribuição de temperatura na estrutura indeformada para 4 instantes de tempo, onde é possível observar a evolução de tais temperaturas para diferentes níveis de deformação. Constatase que as barras comprimidas aquecem, enquanto que as barras tracionadas apresentam variação de

temperatura negativa. Esse comportamento é denominado de efeito Gough-Joule (Holzapfel & Simo, 1996).

Todos os casos apresentam distribuições térmicas semelhantes a Figura 6.22, diferenciados somente pela magnitude das mesmas. Portanto, fica nítido a importância de se considerar o efeito das mudanças de temperatura decorrente das deformações, pois, dependendo do material, carregamento e condições iniciais, o acoplamento termoelástico pode apresentar contribuições predominantes na resposta estrutural.

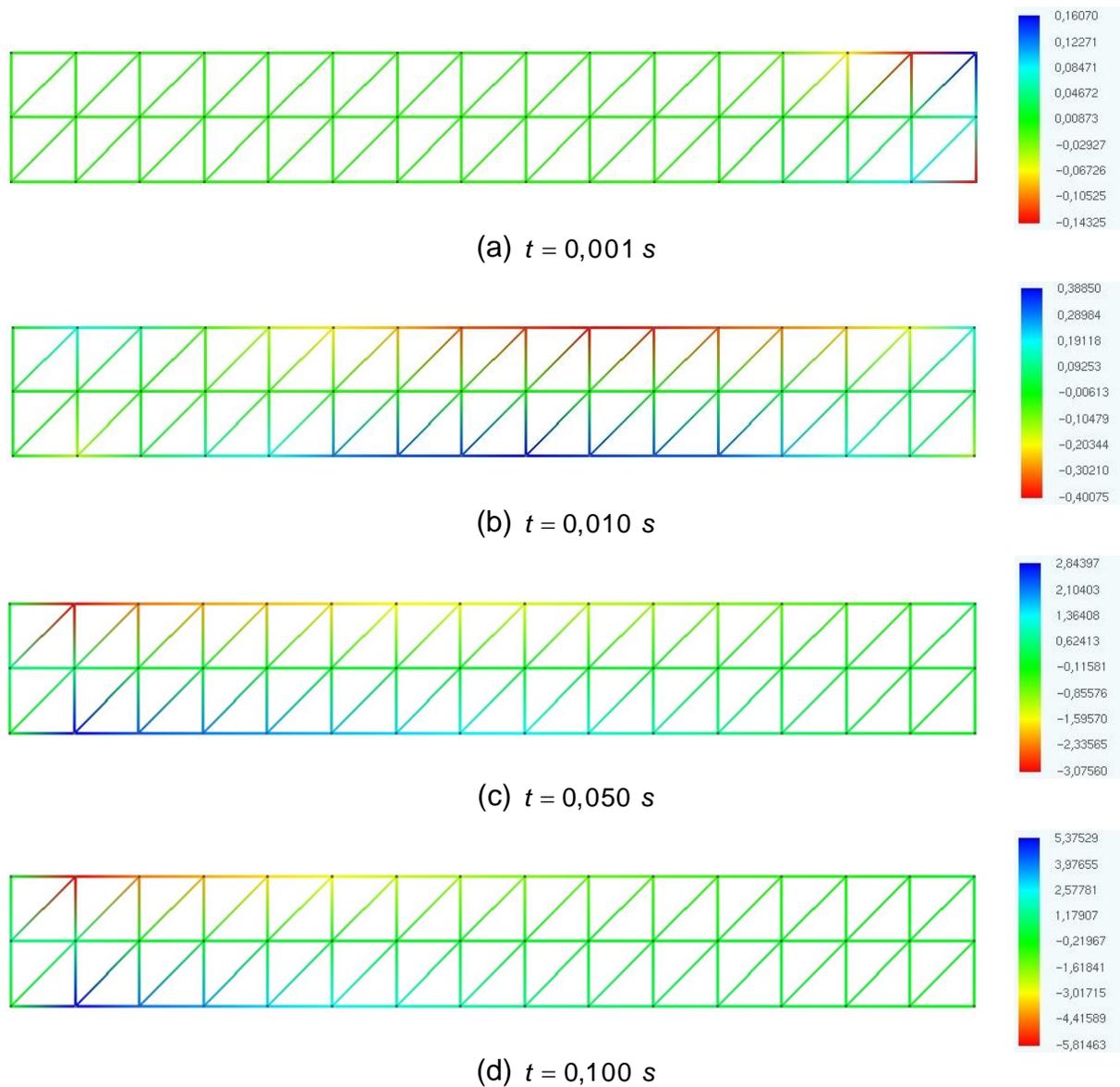


Figura 6.22: Distribuição de temperatura ao longo do tempo.

6.8 Barra sob carregamento elastoplástico

Este exemplo foi apresentado inicialmente por Kamlah & Haupt (1998), e posteriormente, por Carrazedo & Coda (2010). Consiste na análise da mudança de temperatura de uma barra isolada adiabaticamente com comportamento elastoplástico, sob as seguintes condições iniciais e de contorno:

$$\theta(x, 0) = 0 \quad (6.6)$$

$$\theta(0, t) = \theta(10, t) = 0 \quad (6.7)$$

A barra tem 10 cm de comprimento e temperatura de referência equivalente a 293 K, além disso, apresenta as seguintes propriedades termoelastoplásticas:

$$\begin{aligned} E &= 2 \cdot 10^{10} \text{ kgf/m}^2 & k &= 20 \text{ J/(K m s)} \\ H &= 3 \cdot 10^8 \text{ kgf/m}^2 & c_e &= 480 \text{ J/(K kg)} \\ \sigma_Y &= 2 \cdot 10^7 \text{ kgf/m}^2 & \alpha &= 0,000016 \text{ m/(K m)} \\ \rho &= 7800 \text{ kg/m}^3 \end{aligned}$$

Admite-se que todo trabalho plástico é convertido em calor, ou seja, despreza-se o trabalho frio. Uma consideração importante empregada pelos autores é que a temperatura não provoca deformações. Isso posto, a história das cargas é dada pelo histórico das deformações, sendo:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) &= 0,0001 \text{ s}^{-1} & \text{para} & \quad 0\% \leq \varepsilon \leq 1,5\% & \Rightarrow & \quad 0s \leq t \leq 150s \\ \dot{\varepsilon}(t) &= -0,0005 \text{ s}^{-1} & \text{para} & \quad 1,5\% \leq \varepsilon \leq -1,5 & \Rightarrow & \quad 150s \leq t \leq 210s \\ \dot{\varepsilon}(t) &= 0,0002 \text{ s}^{-1} & \text{para} & \quad -1,5\% \leq \varepsilon \leq 1,0 & \Rightarrow & \quad 210s \leq t \leq 335s \end{aligned}$$

Esse processo ainda é dividido em períodos de carregamento elástico e elastoplástico:

1. $0s \leq t < 10s$ Carregamento elástico (Tração)
2. $10s \leq t < 150s$ Carregamento elastoplástico (Tração)

3. $150s \leq t < 154s$ Carregamento elástico (Compressão)
4. $154s \leq t < 210s$ Carregamento elastoplástico (Compressão)
5. $210s \leq t < 220s$ Carregamento elástico (Tração)
6. $220s \leq t < 335s$ Carregamento elastoplástico (Tração)

Sendo assim, confrontam-se os resultados obtidos com os trabalhos mencionados anteriormente. Os diferentes períodos elásticos e elastoplásticos da história do carregamento podem ser facilmente identificados na Figura 6.23, que ilustra a fonte de calor termomecânica ao longo do tempo. Observa-se que o modelo elastoplástico com encruamento apresenta uma fonte de calor superior ao modelo elastoplástico perfeito e, conseqüentemente, mudanças de temperatura mais relevantes. Referente ao modelo elastoplástico perfeito, a fonte de calor e variação de temperatura obtidas nesse trabalho foram idênticas aos encontrados por Carrazedo & Coda (2010).

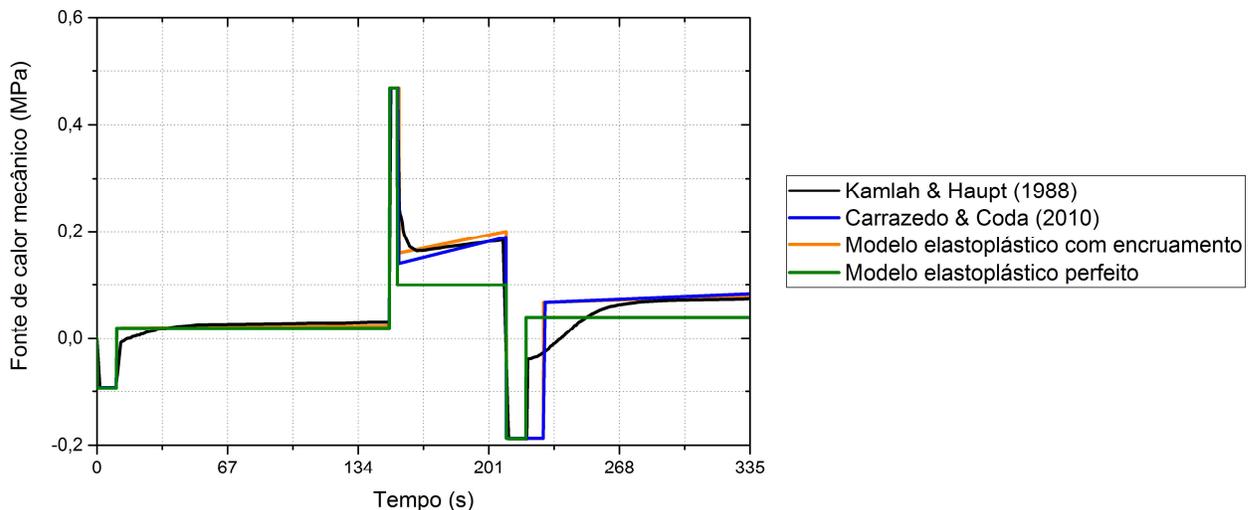


Figura 6.23: Fonte de calor mecânico.

A Figura 6.24 mostra as mudanças de temperatura no centro da barra, para os modelos elastoplástico perfeito e elastoplástico com encruamento cinemático. A partir de tal figura é possível visualizar que o trabalho plástico é a principal fonte de calor.

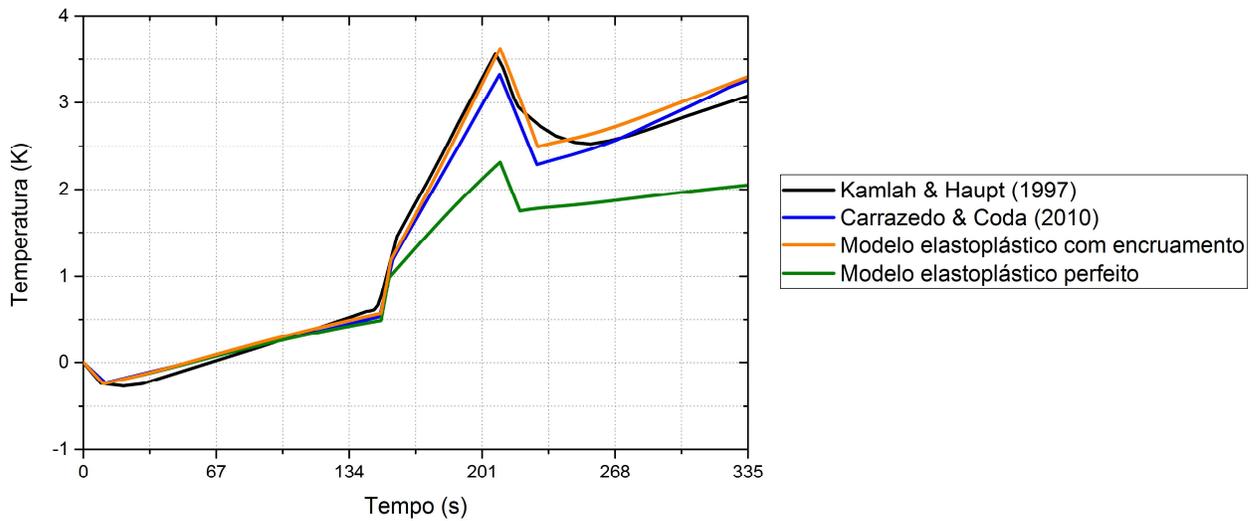
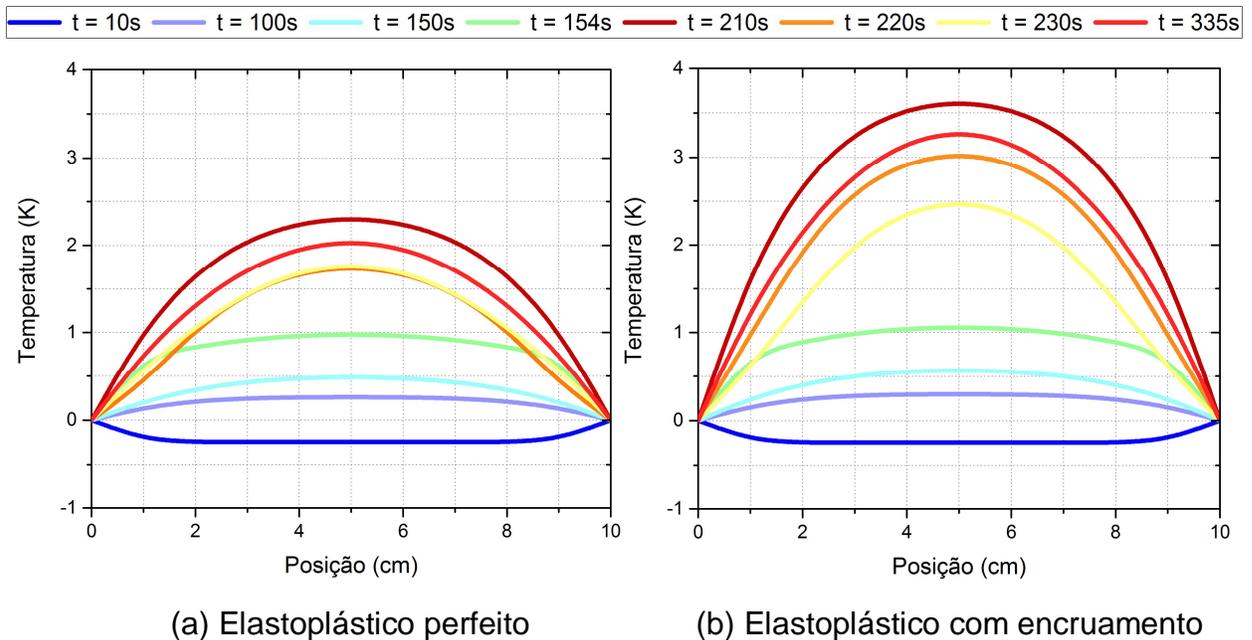


Figura 6.24: Mudança de temperatura no centro da barra.

A Figura 6.25 apresenta a variação de temperatura ao longo da barra para diferentes instantes de tempo. As mudanças nas fases de aquecimento e resfriamento são definidas pelas mudanças de estado do corpo. Como era esperado, percebe-se que o modelo elastoplástico com encruamento cinemático apresenta variações mais elevadas de temperatura do que o elastoplástico perfeito, haja visto que os níveis de tensões no modelo cinemático também são mais elevados.



(a) Elastoplástico perfeito

(b) Elastoplástico com encruamento

Figura 6.25: Distribuição de temperatura ao longo da barra.

6.9 Cúpula treliçada com 168 barras

A geometria da cúpula é apresentada na Figura 6.26, sendo a mesma composta por 73 nós e 168 barras. Este exemplo foi adaptado dos estudos de Papadrakakis (1981), Forde & Stierner (1987), Wang *et al.* (2006) e Lacerda (2014).

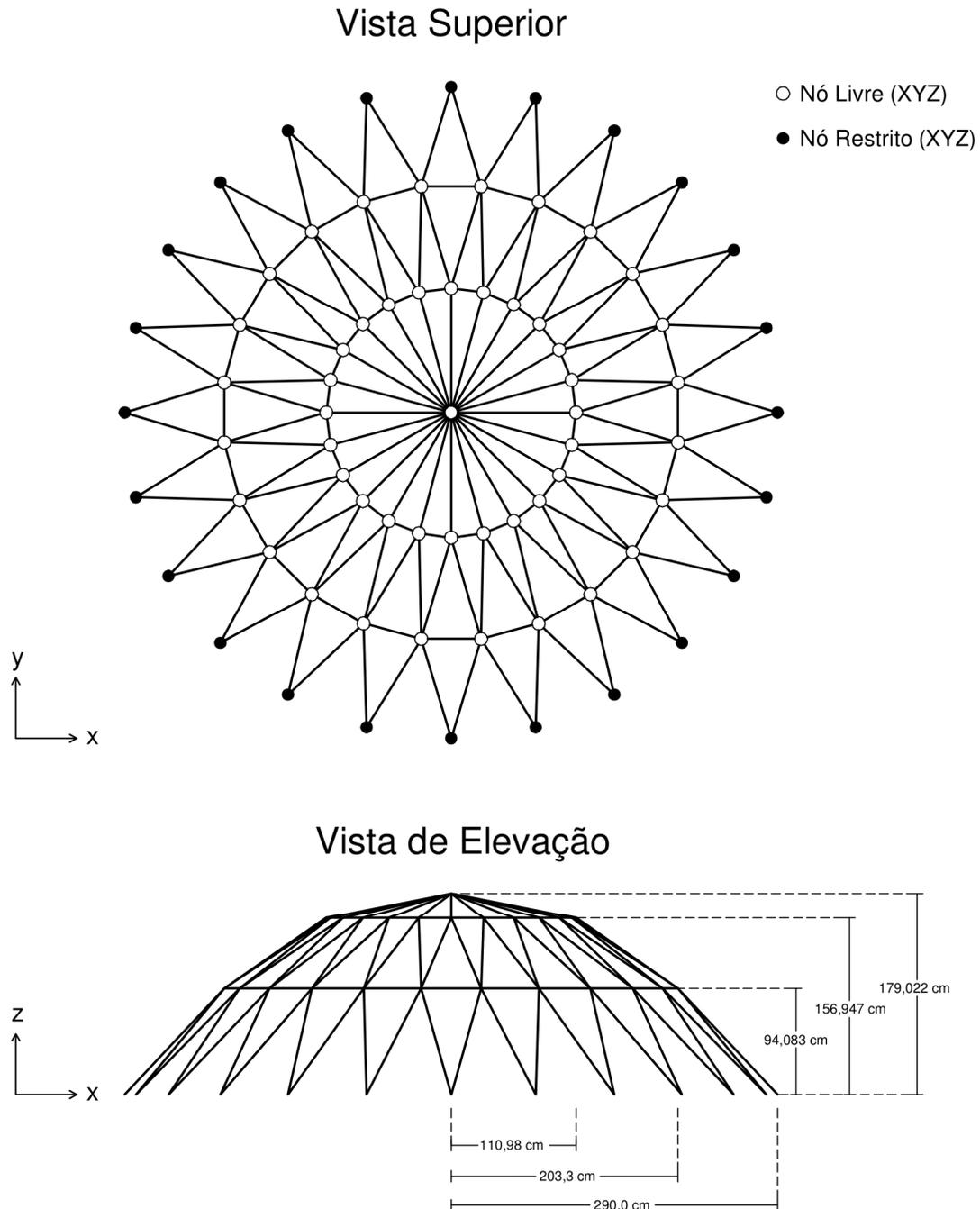


Figura 6.26: Cúpula treliçada com 168 barras.

Os nós com altura de 94,083 *cm* apresentam carregamento vertical de 5 *kN*, enquanto que os nós com altura de 156,947 e 179,022 *cm* apresentam carregamento vertical equivalente a 10 e 50 *kN*, respectivamente. Admite-se que os nós com deslocamentos restritos não apresentam variação de temperatura. A área da seção transversal é 1 *cm*².

A discretização temporal é realizada através do método de Newmark para 2000 passos de tempo de 0,0001 *s*, com temperatura de referência igual 300 *K*. Além disso, admite-se que todo trabalho plástico é convertido em calor. Adotou-se as seguintes propriedades termoelastoplásticas:

$$\begin{aligned}
 E &= 10000 \text{ N/cm}^2 & c_e &= 115 \text{ J/(K kg)} \\
 H &= 50 \text{ N/cm}^2 & k &= 0,2 \text{ J/(K cm s)} \\
 \sigma_Y &= 25 \text{ N/cm}^2 & \alpha &= 0,00013 \text{ cm/(K cm)} \\
 \rho &= 0,0054 \text{ kg/cm}^3
 \end{aligned}$$

Na Figura 6.27 é possível visualizar as mudanças de temperatura do nó central para três situações. Na primeira situação, considera-se somente a geração de calor devido as deformações elásticas, enquanto que na segunda tem-se que a geração de calor é motivada apenas pelas deformações plásticas, e por fim, na última situação, considera-se ambos os termos de geração de calor.

Ainda na Figura 6.27, na primeira situação, observa-se que a variação negativa de temperatura continua evoluindo com o passar do tempo, pois os esforços de tração continuam presentes com o decorrer da análise. A curva de geração de calor puramente plástica mantém-se nula até 0,01 *s*, sendo que a partir desse ponto a estrutura entra no regime elastoplástico, onde o acúmulo de deformações irreversíveis provoca mudanças de temperatura positivas. Já na terceira curva, tem-se, inicialmente, variação negativa de temperatura, sendo que a partir de determinado momento os efeitos da plastificação tornam-se predominantes e o nó central começa a aquecer.

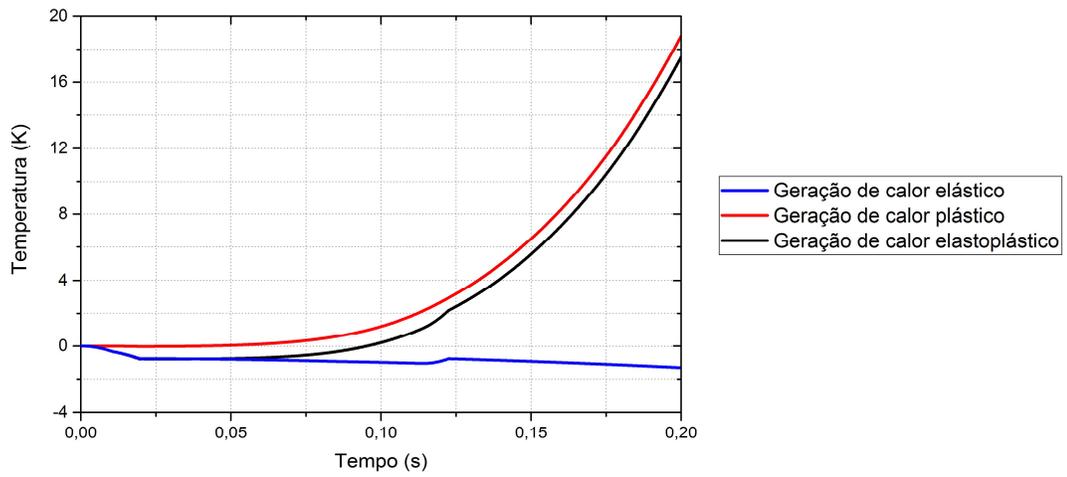


Figura 6.27: Variação de temperatura no nó central.

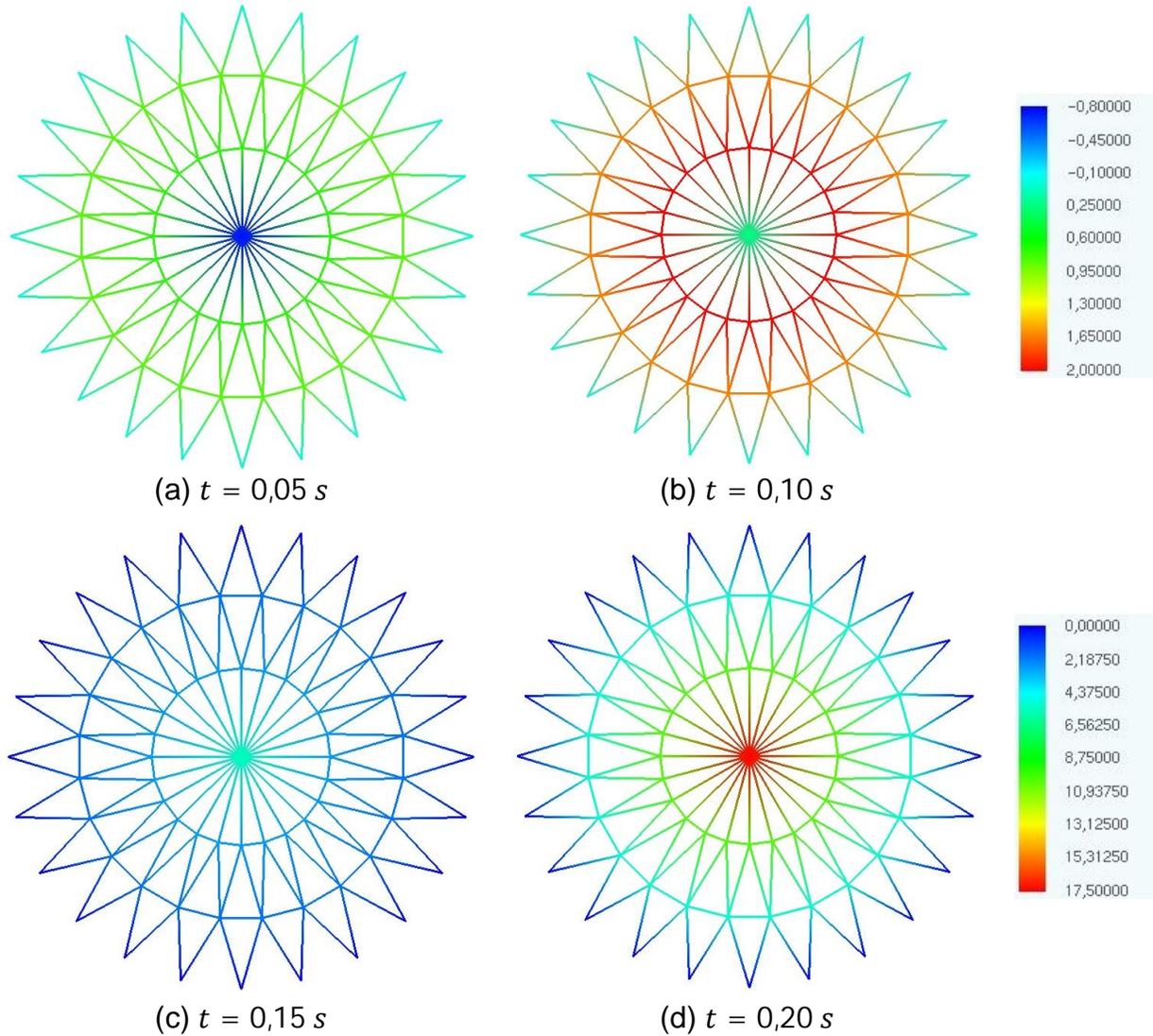


Figura 6.28: Distribuição de temperatura na cúpula.

Na Figura 6.28 tem-se a distribuição das temperaturas na cúpula, considerando o comportamento elastoplástico, para 4 instantes de tempo. Inicialmente, devido a distribuição das deformações, a região central da cúpula apresenta variação negativa de temperatura, e, devido ao acúmulo de deformações plásticas, começa a aquecer a partir de determinado momento, em conformidade com a Figura 6.27.

6.10 Impacto unidirecional com acoplamento termomecânico

Este exemplo consiste na inclusão do acoplamento termomecânico no exemplo abordado na Seção 6.6. De maneira análoga, trata do impacto uniaxial de uma barra com um anteparo rígido, onde investiga-se a geração de calor devido as deformações elásticas. A discretização temporal é realizada através do método de Newmark para uma temperatura de referência equivalente a 10. As demais informações são idênticas as apresentadas na Seção 6.6. Desta forma, considera-se as seguintes propriedades termoelásticas: $C_e=1$, $k=1$ e $\alpha=0,11$.

Da mesma forma, apenas o nó da extremidade sofre impacto. As Figura 6.29 e Figura 6.30 descrevem, respectivamente a velocidade e a força de contato, onde é possível comparar a resposta analítica com as respostas numéricas mecânica e termomecânica. Em ambas as figuras, antes do impacto, as resposta mecânica e termomecânica foram iguais, haja visto que a estrutura não sofre deformações em tal momento.

Os resultados mecânico e termomecânico das velocidades do nó impactante são praticamente idênticos até o instante 2,01. A partir deste ponto, a diferença entre os modelos aumenta com o decorrer do tempo. Como é possível observar na Figura 6.30, devido a geração de calor, tem-se forças de contato superiores a resposta mecânica e, conseqüentemente, o tempo de contato é reduzido.

As Figuras 6.31, 6.32 e 6.33 ilustram as mudanças de temperatura para a configuração indeformada da barra. Primeiramente, admite-se que as mudanças de temperatura não provocam deformações, e em seguida considera-se o termo de

acoplamento. Em tais figuras varia-se o coeficiente α . Quanto maior o valor de α maiores serão as mudanças de temperatura e menor será o tempo de contato.

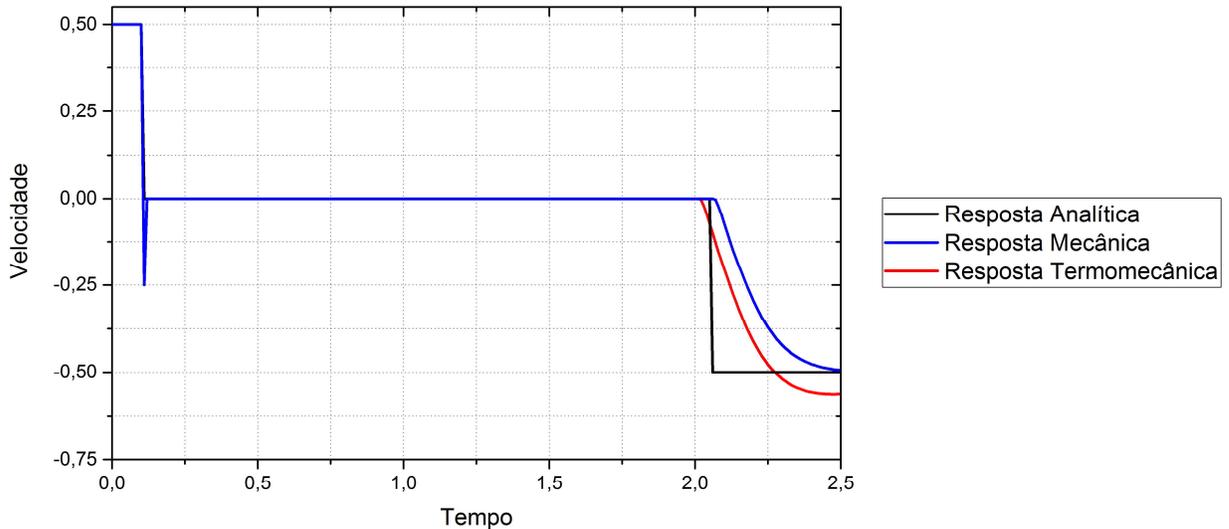


Figura 6.29: Velocidade do nó impactante.

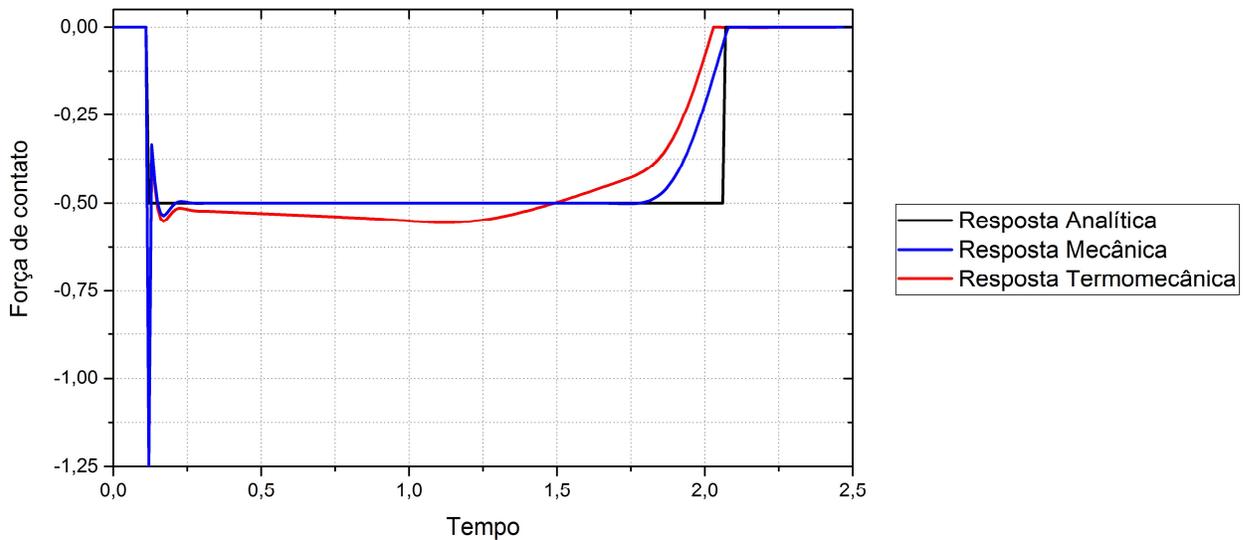
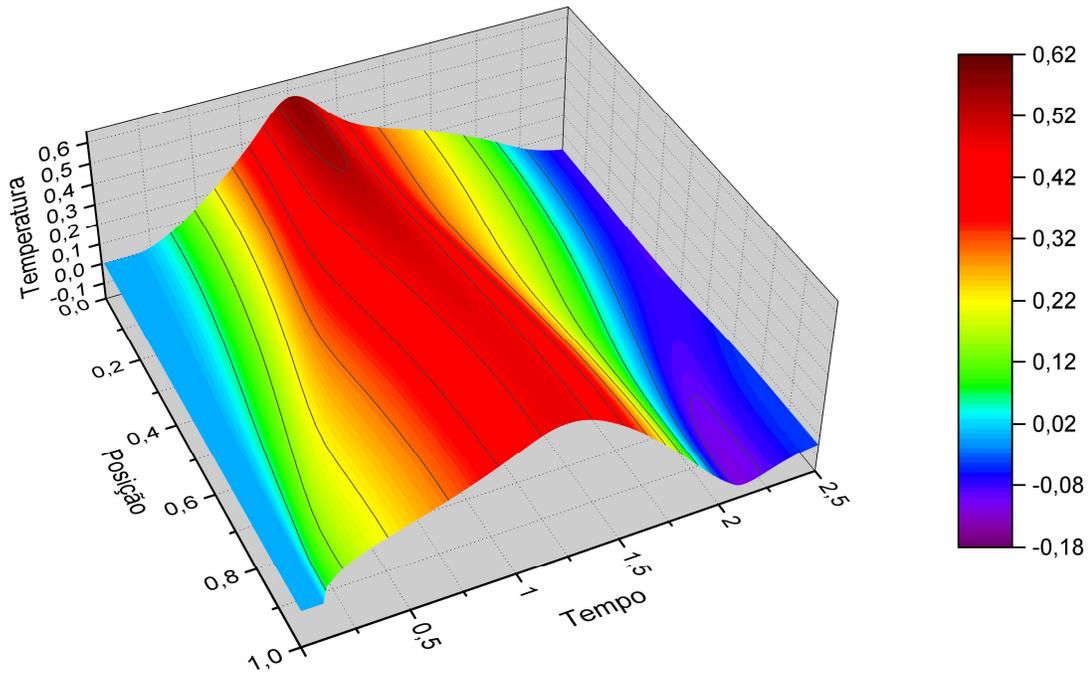
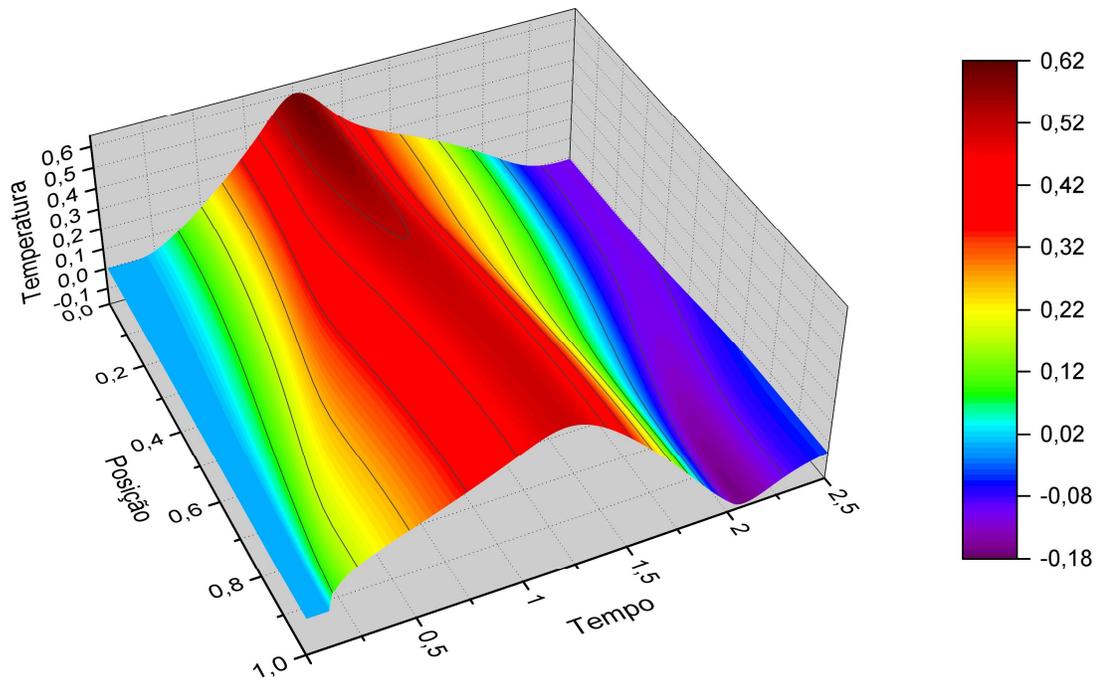


Figura 6.30: Força de contato do nó impactante.

Através das Figuras 6.31, 6.32 e 6.33 percebe-se que o acoplamento termomecânico promove um efeito secundário, onde as variações de temperatura foram mais relevantes quando se consideram que as mudanças de temperatura geram deformações. Em todos os casos, a barra atinge a temperatura máxima entre os instantes 1,0 e 1,5. Após a reflexão a barra começa a resfriar rapidamente.

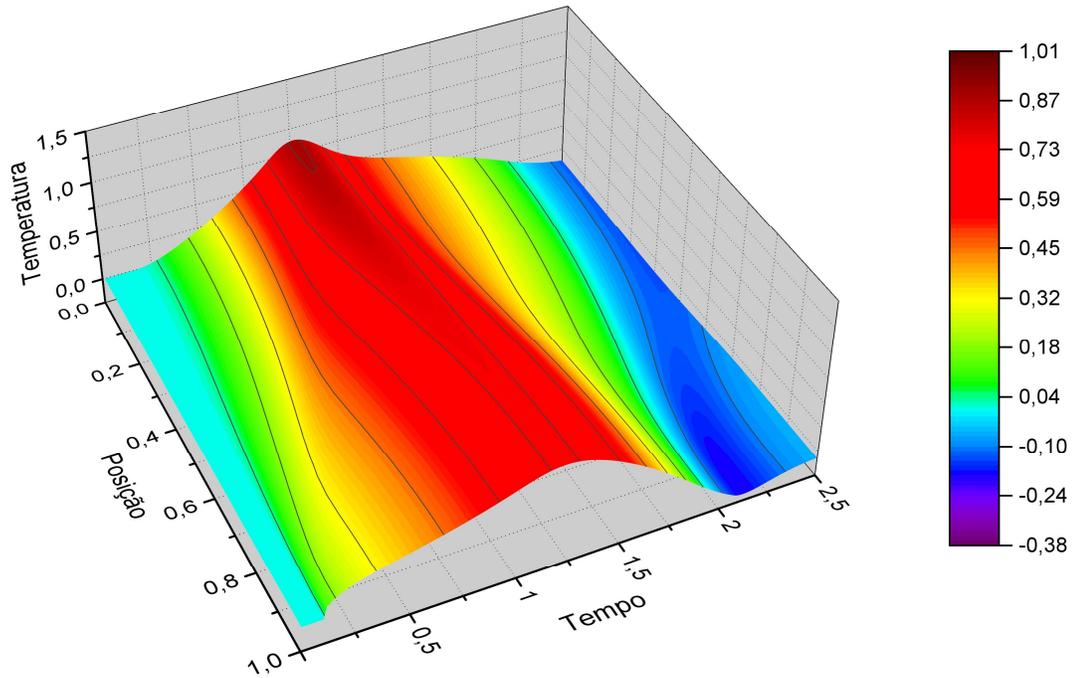


(a) Mudanças de temperatura não provocam deformações.

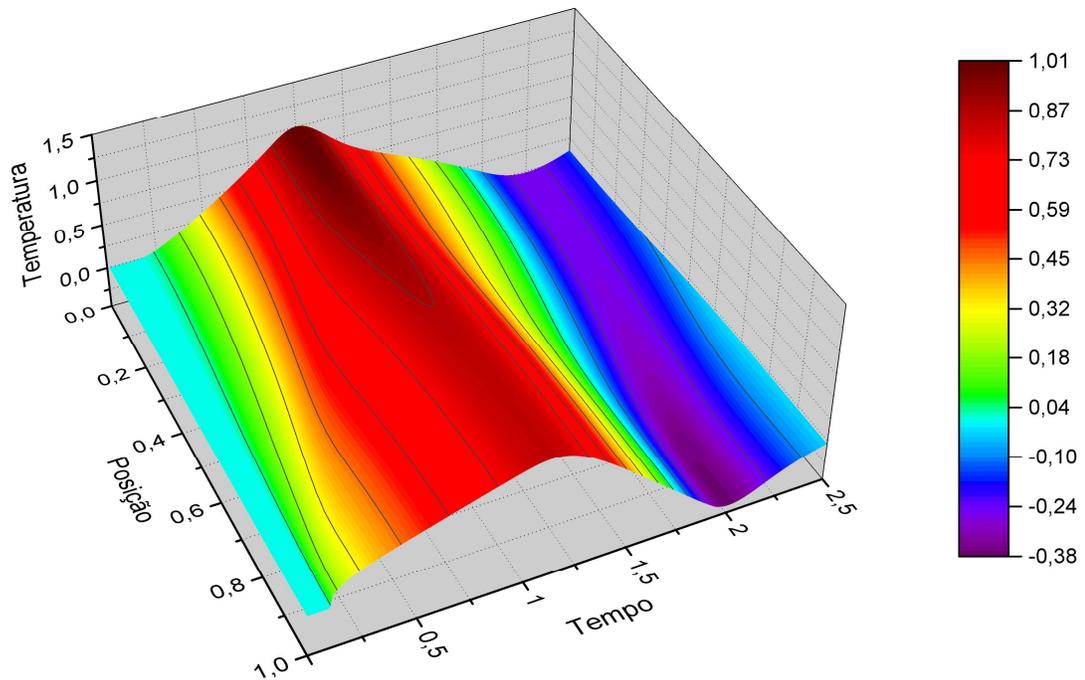


(b) Mudanças de temperatura provocam deformações.

Figura 6.31: Mudança de temperatura ($\alpha = 0,11$).

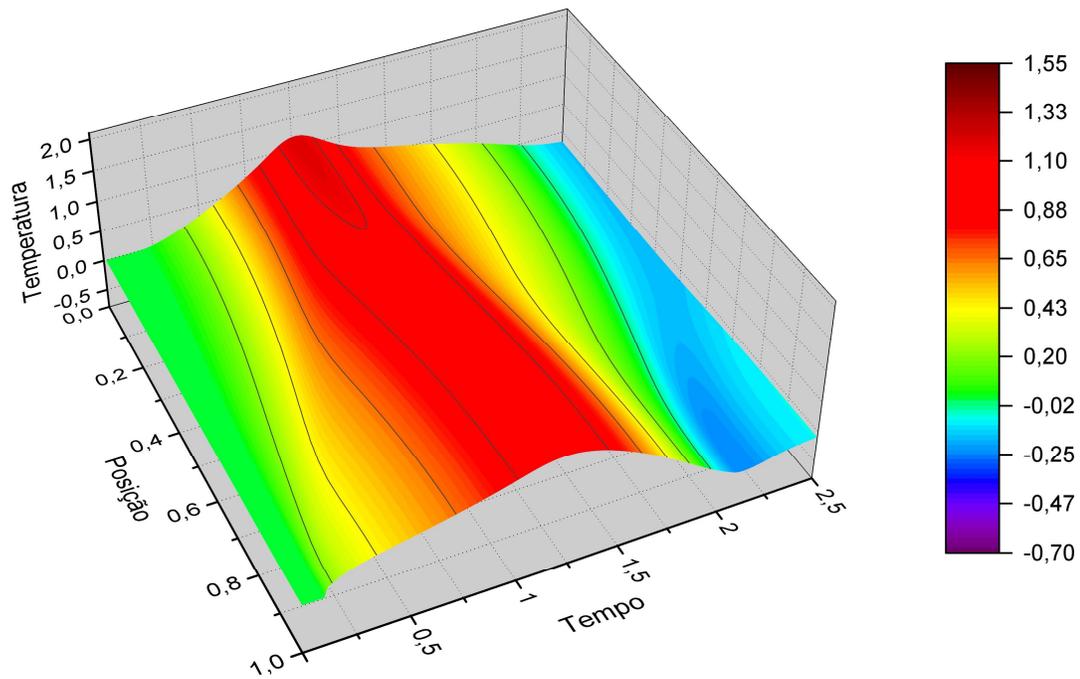


(a) Mudanças de temperatura não provocam deformações.

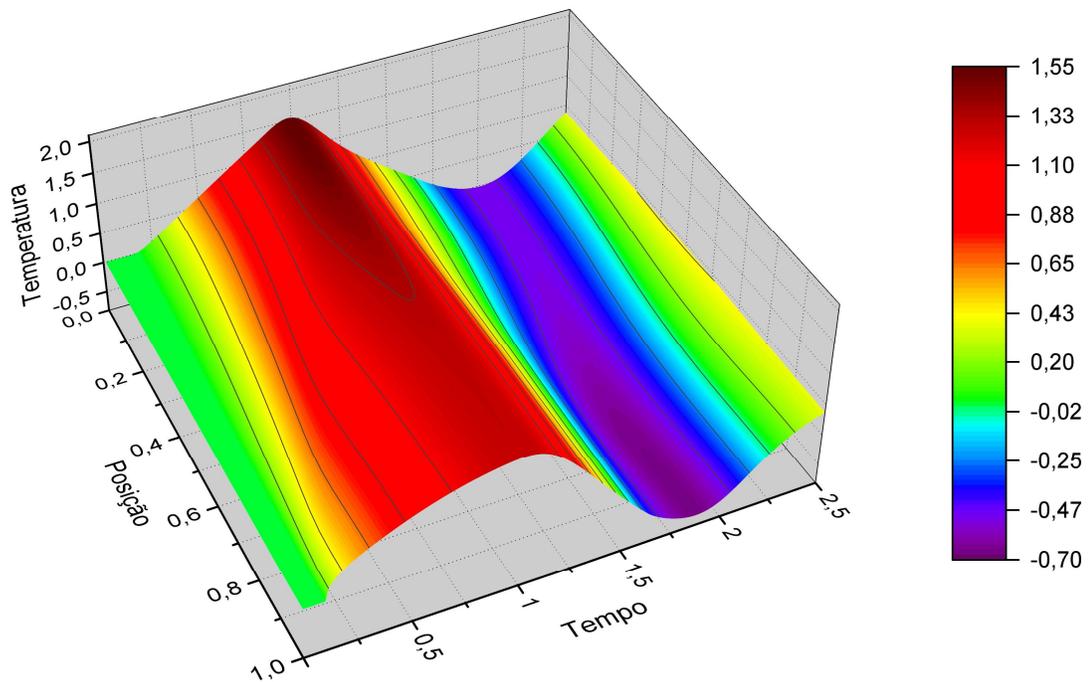


(b) Mudanças de temperatura provocam deformações.

Figura 6.32: Mudança de temperatura ($\alpha = 0,17$).



(a) Mudanças de temperatura não provocam deformações.



(b) Mudanças de temperatura provocam deformações.

Figura 6.33: Mudança de temperatura ($\alpha = 0,23$).

6.11 Impacto entre treliça plana e anteparo rígido

Este exemplo consiste no impacto entre uma treliça plana circular e um anteparo rígido (Figura 6.34). A estrutura é composta por 264 barras e 97 nós. A discretização temporal é realizada através do esquema de Newmark com intervalo de tempo de 0,00001 s. Isto posto, tem-se os seguintes dados do problema:

$$E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$$

$$A = 0,0036 \text{ m}^2$$

$$H = 5 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$$

$$k = 27 \text{ J/(K m s)}$$

$$\sigma_Y = 1 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$$

$$c_e = 480 \text{ J/(K kg)}$$

$$\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$$

$$\alpha = 0,000011 \text{ m/(K m)}$$

Admite-se que todo trabalho plástico é convertido em calor. Além disso, adota-se uma temperatura de referência equivalente a 300 K. A estrutura se move com velocidade equivalente a 35 m/s, com $\delta = 0,01 \text{ m}$.

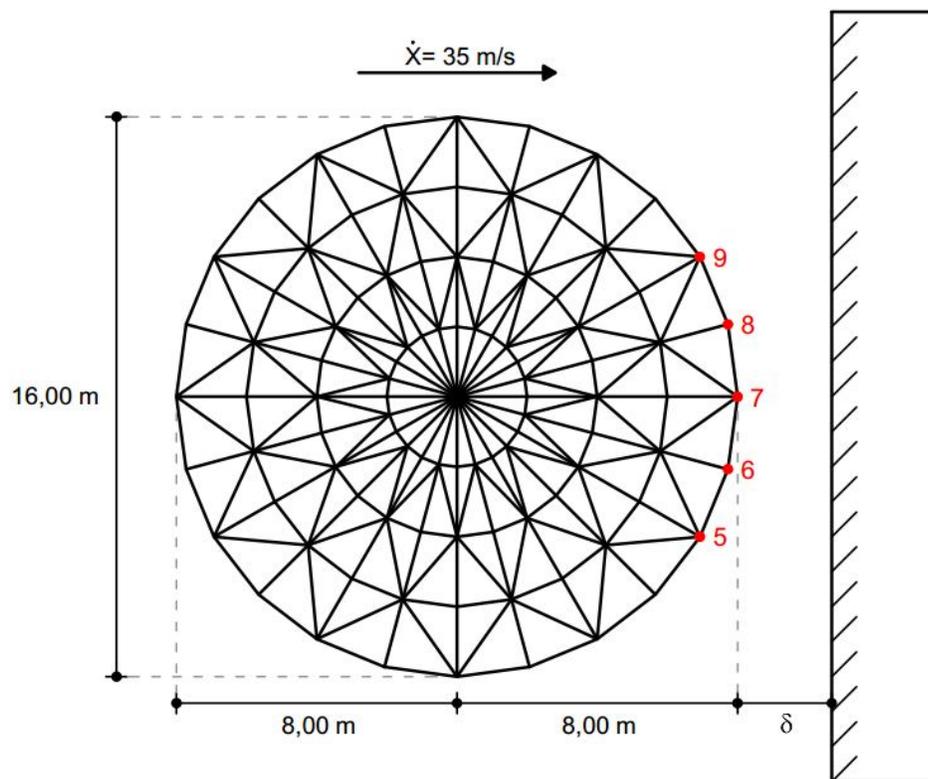


Figura 6.34: Esquema de impacto entre treliça plana e anteparo rígido.

Cinco nós sofrem impacto, conforme indicado na Figura 6.34. A Figura 6.35 apresenta a evolução das mudanças de temperatura dos nós impactantes ao longo tempo, sendo que tais nós começam a aquecer rapidamente a partir do instante de impacto. Além disso, a partir de determinado momento, observa-se uma suave redução nas variações das temperaturas, caracterizado pelo efeito Gough-Joule e/ou pela dissipação das temperaturas entre os nós.

A Figura 6.36 apresenta, para instantes de tempo diferentes, a distribuição das temperaturas na estrutura em sua configuração deformada.

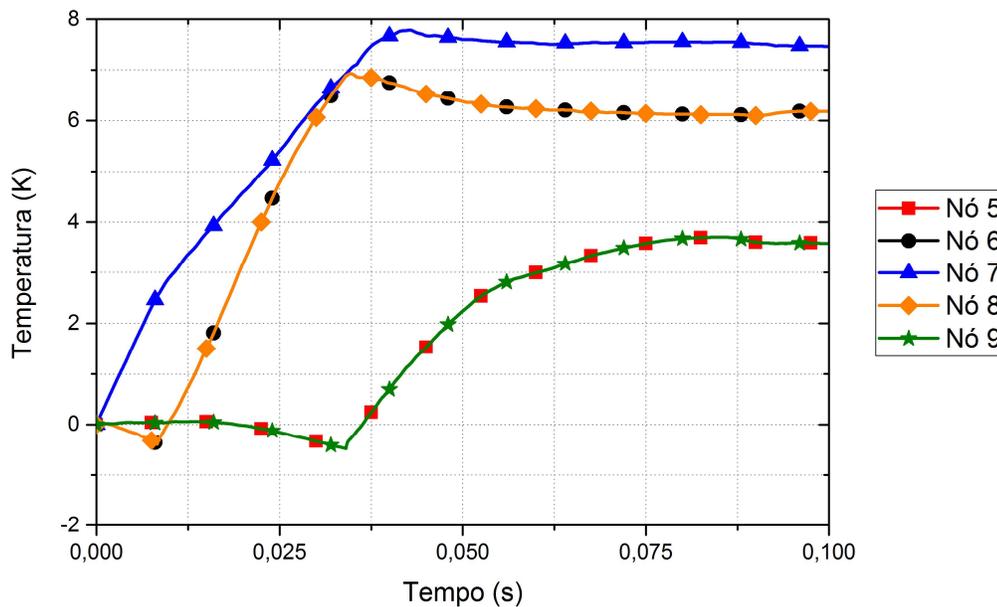


Figura 6.35: Variação de temperatura nos nós impactantes.

Portanto, em concordância com as Figuras 6.35 e 6.36, ressalta-se a importância de abordar o comportamento termomecânico em problemas de impacto, pois as altas taxas de deformação podem promover mudanças significativas na configuração estrutural do elemento.

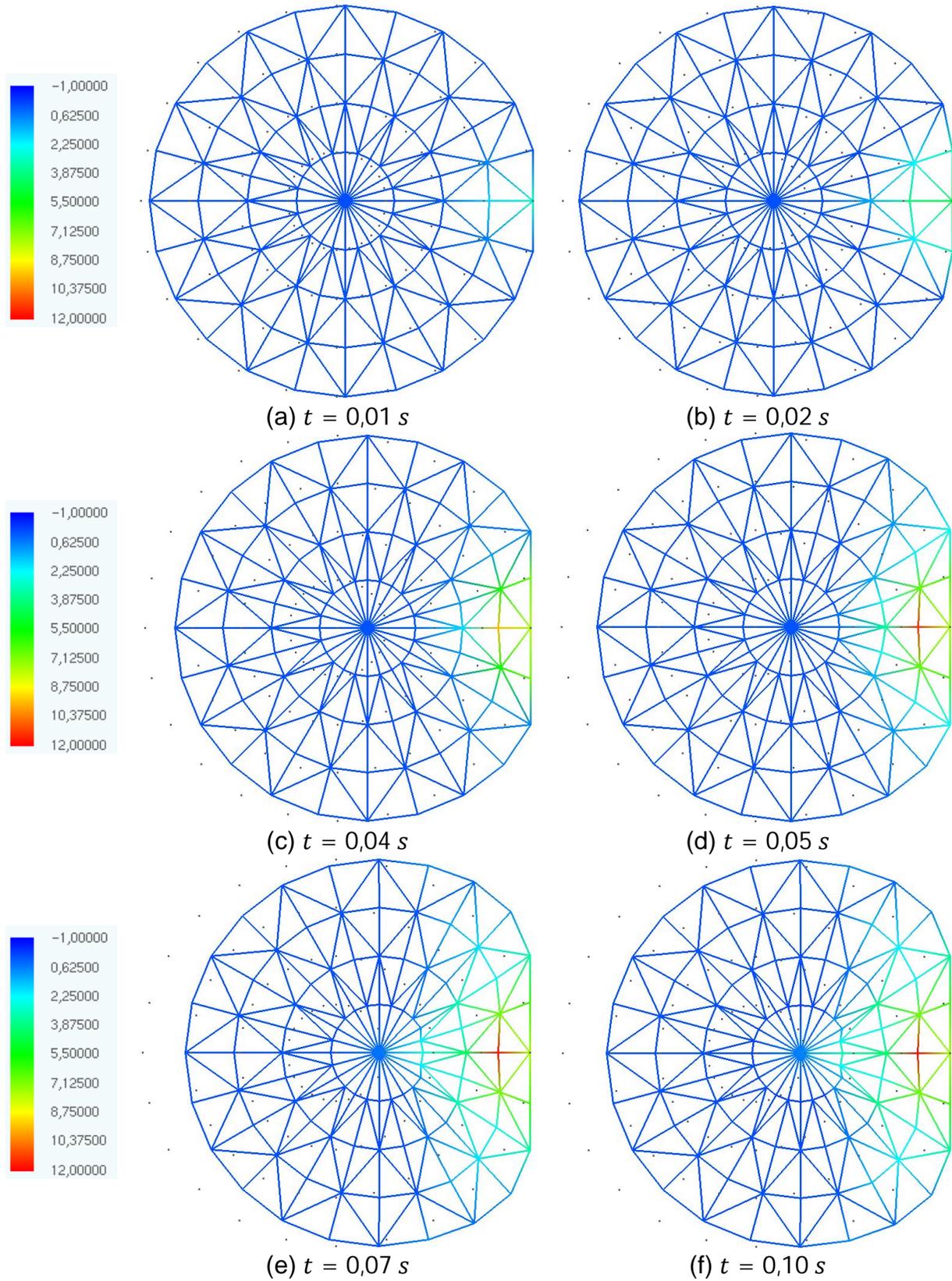


Figura 6.36: Distribuição das temperaturas.

CAPÍTULO 7

Conclusões

As conclusões deste trabalho foram expostas ao longo do mesmo, em particular, sempre que se apresentaram ensaios numéricos. Entretanto, neste capítulo, refere-se em síntese os aspectos mais relevantes.

A condicionalidade é um fator importante para escolha do método de integração temporal. Naturalmente, deseja-se que os algoritmos de integração temporal sejam incondicionalmente estáveis, entretanto, desde que a restrição do intervalo de tempo seja garantida, os algoritmos condicionalmente estáveis são igualmente adequados.

Através deste estudo fica evidente a dependência de um intervalo de tempo adequado para os métodos explícitos, promovendo determinado amortecimento quando comparados aos métodos implícitos. Desta forma, conforme constatado nos exemplos numéricos, os métodos implícitos apresentam certa superioridade quando comparados aos métodos explícitos, haja vista que os algoritmos explícitos necessitam de intervalos de tempo relativamente menores, para apresentar os mesmos resultados dos algoritmos implícitos.

Ressalta-se que os métodos explícitos apresentaram bom desempenho nos problemas de impacto, sendo que tais métodos eliminam, sensivelmente, as perturbações presentes no instante do impacto. Portanto, para problemas de impacto, em concordância com a literatura especializada, os métodos explícitos são altamente recomendáveis. O método de Newmark também apresentou excelentes resultados. Com base nos resultados obtidos, não se recomenda a utilização dos métodos de Houbolt e Wilson- θ para solução de tais problemas.

Apesar dos métodos HHT- α , WBZ- α e α -Generalizado não terem sido apresentados nos problemas de impacto, destaca-se que os mesmos apresentam resultados inconsistentes para tais problemas, nos quais são extremamente sensíveis aos parâmetros de amortecimento numérico adotado. Sendo necessário, conforme Hu (1997), a modificação dos parâmetros de Newmark. Consequentemente, torna-se inevitável a alteração dos parâmetros de amortecimento, em conformidade com estudos de estabilidade, precisão, convergência e etc.

Através dos exemplos numéricos é possível observar a diferença entre os resultados mecânico e termomecânico. Portanto, faz-se mister a importância de se considerar a interação entre comportamento térmico e mecânico, pois, conforme apresentado, os mesmos podem motivar redistribuições de tensões expressivas.

Em conformidade com o que foi exposto, constata-se que a temperatura de referência é um fator importante na análise termomecânica, sendo que temperaturas de referência elevadas implicam em variações de temperatura elevadas. Referente as estruturas com comportamento elastoplástico, destaca-se o acúmulo de deformações irreversíveis, pois, dependendo do histórico das deformações, introduzem uma parcela significativa na geração de calor.

Enfatiza-se, principalmente, a consideração do acoplamento termomecânico nos problemas de impacto, nos quais, devido as altas taxas de deformação, a interação entre a resposta mecânica e térmica promove efeitos secundários significativos, modificando o comportamento estrutural.

Portanto, fica claro a relevância do acoplamento termomecânico nos problemas de engenharia, pois, dependendo do material, carregamento e condições iniciais, tal acoplamento pode apresentar contribuições predominantes na resposta estrutural.

Como sugestão para futuros desenvolvimentos, e num seguimento imediato desta dissertação, propõem-se o emprego de elementos mais complexos, capazes de representar os esforços de torção, flexão e etc.. Referente aos problemas de impacto, recomenda-se aumentar a complexidade do estudo, como, por exemplo, inclusão do

atrito e impacto entre estruturas. Além disso, implementar a transmissão de calor por convecção e radiação.

Referências

Armero, F.; Petocz, E. (1998): Formulation and analysis of conserving algorithms for frictionless dynamic contact-impact problems. *Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 158, n. 3-4, p. 269-300.

Bathe, K. J. (1996): *Finite Element Procedures*. 1nd ed., Prentice Hall, New Jersey, p. 1052.

Bathe, K. J.; Wilson, E. L. (1973): Stability and accuracy analysis of direct integration methods. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 1, n. 3, p. 283-291.

Benzerga, A. A.; Bréchet, Y.; Needleman, A.; Giessen, E. V. D. (2005): The stored energy of cold work – Predictions from discrete dislocation plasticity. *Acta Materialia*, vol. 53, n. 18, p. 4765-4779.

Bever, M. B.; Holt, D. L.; Titchener, A. L. (1973): The stored energy of cold work. *Mechanics of Materials*, vol. 17, p. 1-190.

Biot, M. A. (1956): Thermoelasticity and irreversible thermodynamics. *Journal of Applied Physics*, vol. 27, n. 3, p. 240-253.

Bottura, H. M. (1997): Uma família de algoritmos hermitianos para a integração direta das equações de dinâmica das estruturas. Tese (Doutorado), Curso de Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos, 192 p.

Bowyer, E. P.; O'Boy, D. J.; Krylov, V. V.; Horner, J. L. (2012): Effect of geometrical and material imperfections on damping flexural vibrations in plates with attached wedges of power law profile. *Applied Acoustics*, vol. 73, n. 5, p. 514-523.

Canadija, M.; Brnic, J. (2004): Associative coupled thermoplasticity at finite strains with temperature-dependent material parameters. *International Journal of Plasticity*, vol. 20, n. 10, p. 1851-1874.

Canadija, M.; Brnic, J. (2009): Nonlinear kinematic hardening in coupled thermoplasticity. *Materials Science and Engineering A*, vol. 499, n. 1-2, p. 275-278.

Carpenter, N. J.; Taylor, R. L.; Katona, M. G. (1991): Lagrange constraints for transient finite element surface contact. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 32, n. 1, p. 103-128.

Carrazedo, R. (2009): Estudo e desenvolvimento de código computacional para análise de impacto entre estruturas levando em consideração efeitos térmicos. Tese (Doutorado), Curso de Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos, 152 p.

Carrazedo, R.; Coda, H. B. (2010): Alternative positional FEM applied thermomechanical impact of truss structures. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 46, n. 11, p. 1008-1016.

Chen, E. W.; Ferguson, N. S. (2014): Analysis of energy dissipation in an elastic moving string with a viscous damper at one end. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 333, n. 9, p. 2556-2570.

Chen, H. T.; Chen, T. M.; Chen, C. K. (1987): Hybrid laplace transform-finite element method for one-dimensional transient heat conduction problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 63, n. 1, p. 83-95.

Chen, J.; Dargush, G. F (1995): Boundary element method for dynamic poroelastic and thermoelastic analyses. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 32, n. 15, p. 2257-2278.

Chen, W. F.; Han D. J. (1988): *Plasticity for structural engineers*. 1nd ed., Springer-Verlag, New York, p. 610.

Chopra, A. K. (2012): *Dynamics of structures – Theory and applications to earthquake engineering*. 4nd ed., Prentice Hall, New Jersey, p. 980.

Chung, J.; Hulbert, G. M. (1993): A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation the generalized- α method. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 60, n. 2, p. 371-375.

Chung, J.; Lee, J. M. (1994): A new family of explicit time integration methods for linear and non-linear structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 37, n. 23, p. 3961-3976.

Clayton, J. D. (2013): Nonlinear eulerian thermoelasticity for anisotropic crystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 61, p. 1983-2014.

Coda, H. B. (2003): Análise não linear geométrica de sólidos e estruturas: uma formulação posicional baseada no MEF. Tese (Texto complementar para concurso de professor titular), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

Coda, H. B.; Paccola, R. R. (2008): Positional FEM formulation for geometrically non-linear shells. *Latin American Journal of Solids and Structures*, vol. 5, n. 3, p. 205-223.

Cook, R. D.; Malkus, D. S.; Plesha, M. E.; Witt, R. J. (2002): Concepts and applications of finite element analysis. 4nd ed., John Wiley & Sons, New York, p. 733.

Copetti, M. I. M. (1999): Finite element approximation to a contact problem in linear thermoelasticity. *Mathematics of Computation*, vol. 68, n. 227, p. 1013-1024.

Copetti, M. I. M. (2002): A one-dimensional thermoelastic problem with unilateral constraint. *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 59, n. 4, p. 361-376.

Cornwell, R. E.; Malkus, D. S. (1992): Improved numerical dissipation for time integration algorithms in conduction heat transfer. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 97, n. 2, p. 149-156.

Craig Jr., R. R. (1981): Structural dynamics – An introduction to computer methods. 1nd ed., J. Wiley, New York, p. 527.

Danilovskaya, V. (1950): Thermal stresses in an elastic half-space due to sudden heating of its boundary. *Prikl. Mat. Mekh.*, vol. 14, p. 316-324.

Deb, A.; Henry Jr, D. P.; Wilson, R. B. (1991): Alternate BEM formulations for 2- and 3-D anisotropic thermoelasticity. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 27, n. 13, p. 1721-1738.

Dill, E. H. (2007): Continuum mechanics – elasticity, plasticity, viscoelasticity. 1nd ed., CRC Press – Taylor & Francis Group, Boca Raton, p. 368.

Dillon Jr., O. W. (1963): Coupled thermoplasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 11, p. 21-33.

Dokainish, M. A.; Subbaraj, K. (1989): A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics – I, Explicit methods. *Computers & Structures*, vol. 32, n. 6, p. 1371-1386.

Dokainish, M. A.; Subbaraj, K. (1989): A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics – II, Implicit methods. *Computers & Structures*, vol. 32, n. 6, p. 1387-1401.

Farren, W. S.; Taylor, G. I. (1925): The heat developed during plastic extension of metals. *Proceedings of the Royal Society of London*, vol. 107, n. 743, p. 422-451.

Ferreira, I. P. (2009): Análise dinâmica não linear geométrica de treliças espaciais. Dissertação (Mestrado), Curso de Engenharia Civil, Centro Federal de educação Tecnológica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 169 p.

Forde, B. W. R.; Stiemer, S. F. (1987): Improved arc length orthogonality methods for nonlinear finite element analysis. *Computers & Structures*, vol. 27, n. 5, p. 625-630.

Furlan, F. A. C. (2011): Métodos locais de integração explícito e implícito aplicado ao método de elementos finitos de alta ordem. Dissertação (Mestrado), Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 116 p.

Gibson, W. C.; Austin, E. M. (1993): Analysis and design of damped structures. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 14, n. 4, p. 337-351.

Greco, M. (2004): Análise de problemas de contato/impacto em estruturas de comportamento não-linear pelo método dos elementos finitos. Tese (Doutorado), Curso de Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos, 163 p.

Greco, M.; Gesualdo, F. A. R.; Venturini, W. S.; Coda, H. B. (2006): Nonlinear positional formulation for space truss analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 42, n. 12, p. 1079-1086.

Green, A. E.; Lindsay, K. A. (1972): Thermoelasticity. *Journal of Elasticity*, vol. 2, n. 1, p. 1-7.

Green, A. E.; Naghdi, P. M. (1993): Thermoelasticity without energy dissipation. *Journal of Elasticity*, vol. 31, n. 1, p. 189-208.

Green, A. E.; Naghdi, P. M. (1995): A unified procedure for construction of theories of deformable media. I - Classical continuum physics, II – Generalized continua, III – Mixtures of interacting continua. *Proceedings of the Royal Society: Mathematical, Physical & Engineering Sciences*, vol. 448, p. 335-388.

Hetnarski, R. B.; Eslami M. R. (2009): Thermal stresses – advanced theory and applications. 1nd ed., Springer, New York, p. 579.

Hilber, H. M.; Hughes, T. J. R.; Taylor, R. L. (1977): Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 5, n. 3, p. 283-292.

Holzapfel, G. A. (2000): *Nonlinear Solid Mechanics – A continuum Approach for Engineering*. 1nd ed., John Wiley & Sons, Chichester, p. 467.

Holzapfel, G. A.; Simo, J. C. (1996): Entropy elasticity of isotropic rubber-like solids at finite strains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 132, n. 1-2, p. 17-44.

Houbolt, J. C. (1950): A Recurrence matrix solution for the dynamic response of aircraft. *Journal of Aeronautical Sciences*, vol. 17, p. 540-550.

Hu, B. G.; Dokainish, M. A. (1993): Damped vibrations of laminated composite plates – Modeling and finite element analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 25, n. 2, p. 103-124.

Hu, N. (1997): A solution method for dynamic contact problems. *Computer & Structures*, vol. 63, n. 6, p. 1053-1063.

Hughes, T. J. R. (1987): *The finite element method – Linear static and dynamic; Finite element analysis*. 1nd ed., Prentice Hall, New Jersey, p. 825.

Humar, J. L. (2002): *Dynamics of structures*. 2nd ed., Balkema, Meppel, p. 994.

Hsu, T. R. (1986): *The Finite Element Method in Thermomechanics*. 1nd ed., Allen & Unwin, Manitoba, p. 407.

Jeary, A. P. (1997): Damping in structures. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, vol. 72, p. 345-355.

Kamlah, M.; Haupt, P. (1998): On the macroscopic description of stored energy and self heating during plastic deformation. *International Journal of Plasticity*, vol. 13, n. 10, p. 893-911.

Kapoor, R.; Nemat-Nasser, S. (1998): Determination of temperature rise during high strain rate deformation. *Mechanics of Materials*, vol. 27, n. 1, p. 1-12.

Kareem, A.; Gurley, K. (1996): Damping in structures – its evaluation and treatment of uncertainty. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, vol. 59, n. 2-3, p. 131-157.

Kassimali, A.; Bidhendi, E. (1988): Stability of trusses under dynamic loads. *Computers & Structures*, vol. 29, n. 3, p. 381-392.

Khalifa, M. E.; El-Rahman, R. G. A.; Ghonamy, M. I. (2004): Some new exact solutions for linear thermoelastic system. *Applied Mathematics and Computation*, vol. 147, n. 3, p. 773-787.

Kolupaeva, S.; Semenov, M. (2015): The stored energy of plastic deformation in crystals of face-centered cubic metals. *Materials Science and Engineering*, vol. 71, p. 1-6.

Krenk, S.; Hogsberg, J. R. (2005): Properties of time integration with first order filter damping. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 64, n. 4, p. 547-566.

Kuhl, D.; Crisfield, M. A. (1999): Energy-conserving and decaying algorithms in non-linear structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 45, n. 5, p. 569-599.

Lacerda, E. G. M. (2014): Análise não linear de treliças pelo método dos elementos finitos posicional. Dissertação (Mestrado), Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 107 p.

Lemonds, J.; Needleman, A. (1986): Finite element analyses of shear localization in rate and temperature dependent solids. *Mechanics of Materials*, vol. 5, n. 4, p. 339-361.

Lewis, R. W.; Nithiarasu, P.; Seetharamu, K. N. (2004): Fundamentals of the finite element method for heat and fluid flow. 1nd ed., John Wiley & Sons, p. 356.

Li, X. (1992): A generalized theory of thermoelasticity for an anisotropic medium. *International Journal of Engineering Science*, vol. 30, n. 5, p. 571-577.

Lord, H. W.; Shulman, Y. (1967): A generalized dynamical theory of thermoelasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 15, n. 5, p. 299-309.

Lu, S. C. H.; Pister, K. S. (1975): Decomposition of deformation and representation of the free energy function for isotropic thermoelastic solids. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 11, p. 927-934.

Lubarda, V. A. (2004): Constitutive theories based on the multiplicative decomposition of deformation gradient – Thermoelasticity, elastoplasticity, and biomechanics. *ASME Applied Mechanics Review*, vol. 57, p. 95-108.

Lychev, S. A.; Manzhirrov, A. V.; Joubert, S. V. (2010): Closed Solutions of Boundary-Value Problems of Coupled Thermoelasticity. *Mechanics of Solids*, vol. 45, n. 4, p. 610-623.

Maciel, D. N. (2008): Análise de problemas elásticos não lineares geométricos empregando o método dos elementos posicional. Tese (Doutorado), Curso de Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos, 180 p.

Mahmoud, W.; Ghaleb, A. F.; Rawy, E. K.; Hassan, H. A. Z.; Mosharafa, A. A. (2015): Numerical solution to a nonlinear, one-dimensional problem of anisotropic thermoelasticity with volume force and heat supply in a half-space – interaction of displacements. *Archive of Applied Mechanics*, vol. 85, n. 4, p. 433-454.

Marques, G. C. S. C. (2006): Estudo e desenvolvimento de código computacional baseado no método dos elementos finitos para análise dinâmica não linear geométrica de sólidos bidimensionais. Dissertação (Mestrado), Curso de Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos, 103 p.

Meek, J. L.; Tan, H. S. (1984): Geometrically nonlinear analysis of space frames by an incremental iterative technique. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 47, n. 3, p. 261-282.

Minski, R. L. (2008): Aprimoramento de formulação de identificação e solução do impacto bidimensional entre estrutura e anteparo rígido. *Dissertação (Mestrado)*, Curso de Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos, 148 p.

Mroz, Z.; Oliferuk, W. (2002): Energy balance and identification of hardening moduli in plastic deformation processes. *International Journal of Plasticity*, vol. 18, n. 3, p. 379-397.

Mullen, R.; Belytschko, T. (1982): Dispersion analysis of finite element semidiscretizations of the two-dimensional wave equation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 18, n. 1, p. 11-29.

Neto, J. M. (1998): Um estudo da formulação de modelos constitutivos viscoelásticos e elasto-viscoplásticos e do emprego de algoritmos implícitos e explícitos para a sua integração numérica. *Tese (Doutorado)*, Curso de Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos, 251 p.

Newmark, N. M. (1959): A method of computation of structural dynamics. *Journal of Engineering Mechanics Division*, vol. 85, p. 67-94.

Nicholson, D. W. (2008): *Finite Element Analysis – Thermomechanics of Solids*. 2nd ed., CRC Press – Taylor & Francis Group, Boca Raton, p. 475.

Nickell, R. E.; Sackman, J. L. (1968): Approximate solutions in linear coupled thermoelasticity. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 35, n. 2, p. 255-266.

Norris, A. N. (2006): Dynamics of thermoelastic thin plates – a comparison of four theories. *Journal of Thermal Stresses*, vol. 29, n. 2, p. 169-195.

Oliferuk, W.; Swiatnicki, W. A.; Grabski, M. W. (1993): Rate of energy storage and microstructure evolution during the tensile deformation of austenitic steel. *Materials Science and Engineering A*, vol. 161, n. 1, p. 55-63.

Oliveira, M. O. (2012): Análise dinâmica não linear de problemas envolvendo massas móveis aplicadas em cabos e elementos de viga. *Dissertação (Mestrado)*, Curso de Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 182 p.

Oterkus, S.; Madenci, E.; Agwai, A. (2014): Fully coupled peridynamic thermomechanics. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 64, p. 1-23.

Ozakin, A.; Yavari, A. (2010): A geometric theory of thermal stresses. *Journal of Mathematical Physics*, vol. 51, n. 3, p. 1-32.

Papadrakakis, M. (1981): Post-buckling analysis of spatial structures by vector iteration methods. *Computers & Structures*, vol. 14, n. 5-6, p. 393-402.

Parkus, H. (1976): *Thermoelasticity*. 2nd ed., Springer-Verlag, Vienna, p. 126.

Pascon, J. P. (2008): Modelos constitutivos para materiais hiperelásticos – estudo e implementação computacional. Dissertação (Mestrado), Curso de Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos, 232 p.

Pascon, J. P. (2012): Sobre modelos constitutivos não lineares para materiais com gradação funcional exibindo grandes deformações – implementação numérica em formulação não linear geométrica. Tese (Doutorado), Curso de Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos, 480 p.

Perzyna, P.; Sawczuk, A. (1973): Problems in thermoplasticity. *Nuclear Engineering and Design*, vol. 24, p. 1-55.

Proença, S. P. B. (1988): Sobre modelos matemáticos do comportamento não-linear do concreto – análise crítica e contribuições. Tese (Doutorado), Curso de Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos, 330 p.

Rajagopal, K. R. (1995): Boundary layers in finite thermoelasticity. *Journal of Elasticity*, vol. 36, n. 3, p. 271-301.

Rajagopal, K. R.; Maneschy, C. E.; Massoudi, M. (1996): Inhomogeneous deformations in finite thermos-elasticity. *International Journal of Engineering Science*, vol. 34, n. 9, p. 1005-1017.

Rand, O.; Givoli, D. (1995): Reduction of the periodic thermoelastic deformation in truss-structures by design refinements and active loads. *Computers & Structures*, vol. 54, n. 4, p. 757-765.

Real, P. J. M. M. F. V. (1988): Modelação por elementos finitos do comportamento térmico e termo-elástico de sólidos sujeitos a elevados gradientes térmicos. Dissertação (Mestrado), Curso de Engenharia de Estruturas, Universidade do Porto, Porto, 186 p.

Reis, M. C. J. (2012): Análise não linear geométrica de pórticos planos considerando ligações semirrígidas elastoplásticas. Dissertação (Mestrado), Curso de Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos, 118 p.

Rigobello, R. (2011): Desenvolvimento e aplicação de código computacional para análise de estruturas de aço apertadas em situação de incêndio. Tese (Doutorado), Curso de Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos, 296 p.

Rittel, D. (1999): On the conversion of plastic work to heat during high strain rate deformation of glassy polymers. *Mechanics of Materials*, vol. 31, n. 2, p. 131-139.

Rittel, D.; Kidane, A. A.; Alkhader, M.; Venkert, A.; Landau, P.; Ravichandran, G. (2012): On the dynamically stored energy of cold work in pure single crystal and polycrystalline copper. *Acta Materialia*, vol. 60, n. 2, p. 3719-3728.

Rosakis, P.; Rosakis, A. J.; Ravichandran, G.; Hodowany, J. (2000): A thermodynamic internal variable model for the partition of plastic work into heat and stored energy in metals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 48, n. 3, p. 581-607.

Rubert, J. B. (1993): Estudo do desempenho de algoritmos numéricos na solução de sistemas não-lineares de estruturas formadas por barras de treliça. Tese (Doutorado), Curso de Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos, 105 p.

Sadik, S.; Yavari, A. (2015): Geometric nonlinear thermoelasticity and the time evolution of thermal stresses. *Mathematics and Mechanics of Solids*, p. 1-43.

Sampaio, M. S. M. (2014): Análise não linear geométrica de cascas laminadas reforçadas com fibras. Tese (Doutorado), Curso de Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos, 190 p.

Sanches, R. A. K. (2011): Sobre o acoplamento fluido-casca utilizando o método dos elementos finitos. Dissertação (Mestrado), Curso de Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos, 228 p.

Santaoja, K. (2004): Gradient theory from the thermomechanics point of view. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 71, n. 4, p. 557-566.

Schmidt, D. (2006): Análise elastoplástica com não-linearidade geométrica de estruturas através de elementos hexaédricos tri-lineares com um ponto de integração. Dissertação (Mestrado), Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 99 p.

Serra, E.; Bonaldi, M. (2009): A finite element formulation for thermoelastic damping analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 78, n. 6, p. 671-691.

Shahani, A. R.; Nabavi, S. M. (2007): Analytical solution of the quasi-static thermoelasticity problem in a pressurized thick-walled cylinder subjected to transient thermal loading. *Applied Mathematical Modelling*, vol. 9, n. 5, p. 1807-1818.

Shahani, A. R.; Bashusqeh, S. M. (2014): Analytical solution of the thermoelasticity problem in a pressurized thick-walled sphere subjected to transient thermal loading. *Mathematics and Mechanics of Solids*, vol. 19, n. 2, p. 135-151.

Sherief, H. H.; Hamza, F. A.; Saleh, H. A. (2004): The theory of generalized thermoelastic diffusion. *International Journal of Engineering Science*, vol. 42, n. 5, p. 591-608.

Silveira, E. S. S. (2001): Análise dinâmica de linhas de ancoragem com adaptação no tempo e subciclagem. Tese (Doutorado), Curso de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 159 p.

Simo, J. C.; Hughes, T. J. R. (1998): *Computational inelasticity*. 1nd ed., Springer-Verlag, New York, p. 405.

Simo, J. C.; Miehe, C. (1992): Associative coupled thermoplasticity at finite strains: Formulation, numerical analysis and implementation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 98, n. 1, p. 41-104.

Solberg, J. M.; Papadopoulos, P. (1998): A finite element method for contact-impact. *Finite Element in Analysis and Design*, vol. 30, n. 4, p. 297-311.

Soler, A. L.; Brull, M. A. (1965): On solution to transient coupled thermoelastic problems by perturbation techniques. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 32, n. 2, p. 389-399.

Souza, L. A. S.; Carrer, J. A. M.; Martins, C. J. (2004): A fourth order finite difference method applied to elastodynamics – Finite element and boundary element formulations. *Structural Engineering and Mechanics*, vol. 17, n. 6, p. 735-749.

Souza, L. A. S.; Moura, C. A. (1997): Diferença finita de quarta ordem para integração explícita no domínio do tempo de problemas elastodinâmicos. XVIII Ibero Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, CILAMCE, Brasília, v. II, pp. 767-774.

Stanley, P. (2008): Beginnings and early development of thermoelastic stress analysis. *Journal Compilation*, vol. 44, n. 4, p. 285-297.

Tamma, K. K.; Zhou, X.; Sha, D. (2000): The time dimension – A theory towards the evolution, classification, characterization and design of computational algorithms for transient-dynamic applications. *Archives of Computational Methods in engineering*, vol. 7, n. 2, p. 67-290.

Taylor, G. I.; Quinney, H. (1934): The latent energy remaining in a metal after cold working. *Proceedings of the Royal Society: Mathematical, Physical & Engineering Sciences*, vol. 143, n. 849, p. 307-326.

Taylor, R. L.; Papadopoulos, P. (1993): On a finite element method for dynamic contact-impact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 36, n. 12, p. 2123-2140.

Ting, E. C.; Chen, H. C. (1982): A unified numerical approach for thermal stress waves. *Computers & Structures*, vol. 15, n. 2, p. 165-175.

Torres, I. F. R. (2003): Desenvolvimento e aplicação do método dos elementos finitos generalizados em análise tridimensional não-linear de sólidos. Tese (Doutorado), Curso de Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos, 262 p.

Vaz Jr., M.; Muñoz-Rojas, P. A.; Lange, M. R. (2011): Damage evolution and thermal coupled effects in inelastic solids. *International Journal of Mechanics Sciences*, vol. 53, n. 5, p. 387-398.

Vieira, L. C. L. M. (2004): Estudo de algoritmos de integração elemento por elemento para análise dinâmica não linear de estruturas. Dissertação (Mestrado), Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 121 p.

Vujosevic, L.; Lubarda, V. A. (2002): Finite-strain thermoelasticity based on multiplicative decomposition of deformation gradient. *Theoretical and Applied Mechanics*, vol. 28-29, p. 379-399.

Wang, C. Y.; Wang, R. Z.; Chuang, C. C.; Wu, T. Y. (2006): Nonlinear dynamic analysis of reticulated space truss structures. *Journal of Mechanics*, vol. 22, n. 3, p. 199-212.

Wilson, E. L. (2002): Three-dimensional static and dynamic analysis of structures. 3rd ed., Computers and Structures Inc., Berkeley, p. 423.

Wood, W. L.; Bossak, M.; Zienkiewicz, O. C. (1977): An alpha modification of Newmark's method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 15, n. 10, p. 1562-1566.

Wriggers, P. (2006): Computational contact mechanics. 2nd ed., Springer, New York, p. 521.

Xia, R.; Tian, X.; Shen, Y. (2014): Dynamic Response of Two-Dimensional Generalized Thermoelastic Coupling Problem Subjected to a Moving Heat Source. *Acta Mechanica Solida Sinica*, vol. 27, n. 3, p. 300-305.

Yan, J. (1998): Study of Bauschinger effect in various spring steels. Dissertação (Mestrado), Curso de Ciências Aplicadas, Universidade de Toronto, Ottawa, 95 p.

Yavari, A.; Goriely, A. (2013): Nonlinear elastic inclusions in isotropic solids. *Proceedings of the Royal Society: Mathematical, Physical & Engineering Sciences*, vol. 469, n. 2160, p. 1-21.

Zhou, M.; Ravichandran, G.; Rosakis, A. J. (1996): Dynamically propagating shear bands in impact-loaded prenotched plates – II, Numerical simulations. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 44, n. 6, p. 1007-1032.

Zhu, K.; Al-Bermani, F. G. A.; Kitipornchai, S. (1994): Nonlinear dynamic analysis of lattice structures. *Computers & Structures*, vol. 52, n. 1, p. 9-15.