



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE**  
**CENTRO DE TECNOLOGIA – CT**  
**CURSO DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO**

**TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO**

**DESENVOLVIMENTO DE UMA FERRAMENTA COMPUTACIONAL PARA O  
DIMENSIONAMENTO DE EJETORES ACOPLADOS À CABEÇA DE POÇO**

**CARLOS DYEGO DE OLIVEIRA QUEIRÓZ**

**NATAL/RN**

**MAIO/2015**

**CARLOS DYEGO DE OLIVEIRA QUEIRÓZ**

DESENVOLVIMENTO DE UMA FERRAMENTA COMPUTACIONAL PARA O  
DIMENSIONAMENTO DE EJETORES ACOPLADOS À CABEÇA DE POÇO.

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO  
(TCC) APRESENTADO NA UNIVERSIDADE  
FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE  
COMO REQUISITO PARCIAL PARA A  
OBTENÇÃO DO TÍTULO DE ENGENHEIRO DE  
PETRÓLEO

ORIENTADOR: Prof. Dr. Lindemberg de Jesus Nogueira Duarte

NATAL/RN

MAIO/2015

**CARLOS DYEGO DE OLIVEIRA QUEIRÓZ**

DESENVOLVIMENTO DE UMA FERRAMENTA COMPUTACIONAL PARA O  
DIMENSIONAMENTO DE EJETORES ACOPLADOS À CABEÇA DE POÇO.

ESTE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO (TCC) FOI AVALIADO E  
CONSIDERADO ADEQUADO COMO REQUISITO PARCIAL NA OBTENÇÃO  
DO TÍTULO DE ENGENHEIRO DE PETRÓLEO PELA UNIVERSIDADE  
FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE.

NATAL, \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 2015

---

Prof. Dr. Lindemberg de Jesus Nogueira Duarte

Orientador – UFRN

---

Eng. Leonardo Asfora de Oliveira

Membro Examinador – UFRN

---

Prof. Dr. Wilaci Eutropio Fernandes Júnior

Membro Examinador - UFRN

## **DEDICATÓRIA**

*Dedico este trabalho aos meus pais, Antônio e Gizélia, e à minha namorada, Ligia Andrade.*

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente a Deus, pois sem ele nada seria possível.

Aos meus pais que nos momentos de dificuldade sempre me fortaleceram e que, com muito amor e carinho, não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa da minha vida.

À minha namorada, Ligia Andrade, por todo carinho, amor, companheirismo e principalmente por tornar minha vida cada dia mais feliz.

Aos amigos Gabriel Bessa, Juan Medeiros, Lucas Gurgel, Rafael Soares e Felipe Novaes que foram parceiros de graduação, compartilhando momentos de tristeza e alegria, sempre ajudando uns aos outros.

Ao meu orientador, Professor Dr. Lindemberg de Jesus Nogueira Duarte, pela sua disponibilidade e atenção em todos os momentos que o solicitei.

Ao Eng. Leonardo Asfora, pela paciência, ajuda e sugestões que foram cruciais para o enriquecimento deste trabalho.

## **RESUMO**

Ejetores são dispositivos capazes de succionar um fluido mediante a utilização da energia cinética de um outro. Com essa função, tais dispositivos surgem como possível solução para poços de petróleo que apresentam grande quantidade de gás acumulado no anular, seja devido à alta razão gás-líquido (RGL) que os mesmos apresentam ou devido ao resultado de um projeto de injeção de vapor. Poços que têm essa configuração produzem aquém de seu potencial, uma vez que a pressão exercida pelo gás no anular ocasiona o aumento da contrapressão do reservatório. Nesse contexto e, sabendo que o gás não pode ser liberado para superfície por questões ambientais, um ejedor pode ser acoplado à cabeça de poço com o objetivo de succionar o gás presente no anular, gerando assim um decréscimo da contrapressão do reservatório com consequente aumento da vazão de produção. Baseando-se em uma modelagem matemática, foi desenvolvida uma ferramenta computacional, na plataforma *Visual Basic*, com o intuito de calcular as principais dimensões de um ejedor líquido-gás. Adicionalmente, a ferramenta exibe um gráfico de IPR para o poço, um gráfico que ilustra as pressões nos limites de cada compartimento do ejedor e a eficiência do dispositivo.

**Palavras-chave:** Ejedor, ferramenta computacional, aumento da vazão de produção.

## **ABSTRACT**

Ejectors are devices able to suck determined fluid by using the kinetic energy of another one. By presenting this function, such devices appear as a workable solution to oil wells that present great amount of gas in the annulus, either due to high producing gas oil ratio (GOR) or due to the result of a steam injection project. Oil wells with this characteristic produce less than expected, since the pressure exerted by the gas accumulated in the annulus causes an increasing in reservoir back-pressure. In this context and, by knowing that the gas can not be released at surface due to environmental issues, an ejector can be connected to the wellhead, in the attempt to suck the gas stored in the annulus, lowering the reservoir back-pressure and, consequently, rising the production rate. Based on a mathematical modelling, a computational tool was developed in *Visual Basic*, aiming to compute the main dimensions of a liquid-gas ejector. Additionally, this tool provides as outputs: an IPR plot for the well, a plot showing the pressures on the boundaries of each part of the ejector and the efficiency.

**Key words:** Ejector, computational tool, increasing in production rate.

## **LISTA DE FIGURAS**

**Figura 1** – Ejetores de tamanhos variados.

**Figura 2** – Estruturas componentes de um ejetor.

**Figura 3** – Perfil de pressão longitudinal no ejetor.

**Figura 4** – Configuração de um poço sem o ejetor e outro com o ejetor instalado.

**Figura 5** – Esquemático de ejetor para modelagem matemática.

**Figura 6** – Geometria do difusor.

**Figura 7** – Tela de apresentação do *software*.

**Figura 8** – Tela de trabalho do *software*.

**Figura 9** – Gráfico de IPR, modelo linear.

**Figura 10** – Gráfico da pressão nas fronteiras dos compartimentos do ejetor.

**Figura 11** – Resultados do dimensionamento.

**LISTA DE TABELAS**

**Tabela 1** – Dados dos fluidos.

**Tabela 2** – Condições de contorno.

**Tabela 3** – Dados do teste.

## **LISTA DE SÍMBOLOS**

$\rho_1$  – Massa específica do fluido motriz.

$\rho_2$  – Massa específica do fluido succionado.

$\rho_3$  – Massa específica da mistura na garganta.

$Q_1$  – Vazão volumétrica do fluido motriz.

$Q_2$  – Vazão volumétrica do fluido succionado.

$\gamma_0$  – Razão entre a massa específica do fluido succionado na entrada da garganta e a massa específica do fluido motriz,  $\rho_{2o}/\rho_1$ .

$Z$  – *Head* do jato do fluido motriz,  $\rho_1 v_{1o}^2/2$ .

$\phi_0$  – Razão entre a vazão volumétrica do fluido succionado na entrada da garganta e a vazão volumétrica do fluido motriz,  $Q_{2o}/Q_1$ .

$\phi_t$  – Razão entre a vazão volumétrica do fluido succionado na garganta e a vazão volumétrica do fluido motriz,  $Q_{2t}/Q_1$ .

$\phi_d$  – Razão entre a vazão volumétrica do fluido succionado no difusor e a vazão volumétrica do fluido motriz,  $Q_{2d}/Q_1$ .

$P_i$  – Pressão na entrada do bocal.

$P_o$  – Pressão na saída do bocal ou entrada da garganta.

$P_t$  – Pressão na garganta.

$P_d$  – Pressão de descarga.

$P_{rev}$  – Pressão de revestimento.

$P_{wh}$  – Pressão na cabeça de poço.

$P_{wf}$  – Pressão de fluxo no fundo do poço.

$P_e$  – Pressão estática da formação.

$A_d$  – Área do difusor.

$A_n$  – Área do bocal.

$A_t$  – Área da garganta.

$A_w$  – Área superficial interna da garganta.

$R$  – Razão entre a área do bocal e a área da garganta,  $A_n/A_t$ .

$R_d$  – Razão entre a área da garganta e a área do difusor,  $A_t/A_d$ .

T – Temperatura.

L – Altura da coluna de líquido no anular.

$\tau_w$  – Tensão de cisalhamento na garganta.

$R_{gás}$  – Constante do gás.

$K_{io}$  – Coeficiente de atrito no bocal.

$K_{so}$  – Coeficiente de atrito na sucção.

$K_{ot}$  – Coeficiente de atrito na garganta.

$K_{td}$  – Coeficiente de atrito no difusor.

i – Índice que representa a entrada do bocal.

s – Índice que representa a câmara de sucção.

o – Índice que representa a saída do bocal ou a entrada da garganta.

t – Índice que representa a saída da garganta ou a entrada do difusor.

d – Índice que representa a saída do difusor.

1 – Índice que representa o fluido motriz

2 – Índice que representa o fluido succionado.

3 – Índice que representativo a mistura na garganta.

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO</b> .....	<b>14</b>
1.1. OBJETIVO .....	15
<b>2. ASPECTOS TEÓRICOS</b> .....	<b>17</b>
2.1. DEFINIÇÃO DE EJETOR .....	17
2.2. SEÇÕES DE UM EJETOR .....	18
2.3. PRINCÍPIO DE FUNCIONAMENTO .....	19
2.4. APLICAÇÃO DO EJETOR NA CABEÇA DE POÇO .....	21
2.5. MODELAGEM MATEMÁTICA .....	23
2.5.1. EQUAÇÃO DO BOCAL .....	24
2.5.2. EQUAÇÃO DA SUCCÇÃO .....	24
2.5.3. EQUAÇÃO DA GARGANTA .....	24
2.5.4. EQUAÇÃO DO DIFUSOR .....	25
2.5.5. EFICIÊNCIA ENERGÉTICA DO EJETOR .....	25
<b>3. METODOLOGIA</b> .....	<b>27</b>
3.1. DESENVOLVIMENTO DA FERRAMENTA COMPUTACIONAL .....	27
3.2. CÁLCULO DE PARÂMETROS .....	28
3.2.1. CONSTANTE $R_{GÁS}$ .....	28
3.2.2. MASSA ESPECÍFICA DO ÓLEO .....	29
3.2.3. MASSA ESPECÍFICA DO LÍQUIDO (ÓLEO+ÁGUA) .....	29
3.2.4. ÍNDICE DE PRODUTIVIDADE DO POÇO (IP) .....	29
3.2.5. NÍVEL DE LÍQUIDO NO ANULAR .....	30
3.2.6. PRESSÃO DE REVESTIMENTO .....	30
3.2.7. MASSA ESPECÍFICA DO GÁS NA ENTRADA DA GARGANTA .....	30
3.2.8. HEAD DO FLUIDO MOTRIZ .....	31
3.2.9. VELOCIDADE DO FLUIDO MOTRIZ .....	31
3.2.10. DIÂMETRO DO BOCAL .....	32
3.2.11. PRESSÃO NA GARGANTA .....	32
3.2.12. PRESSÃO NO DIFUSOR .....	32
3.2.13. RAZÃO DE ÁREAS, R .....	33
3.2.14. COMPRIMENTO ÓTIMO DA GARGANTA .....	33
3.2.15. COMPRIMENTO DO DIFUSOR .....	33
3.2.16. EFICIÊNCIA ENERGÉTICA DO EJETOR .....	34
3.3. FLUXOGRAMA DO ALGORITMO .....	35

<b>4. RESULTADOS E DISCUSSÕES .....</b>	<b>37</b>
4.1. A FERRAMENTA COMPUTACIONAL.....	37
4.2. SAÍDAS .....	38
4.3. OUTRAS FUNCIONALIDADES.....	40
<b>5. CONCLUSÕES.....</b>	<b>42</b>
<b>6.REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>44</b>
<b>ANEXO.....</b>	<b>47</b>

---

# 1. INTRODUÇÃO

---

## 1.INTRODUÇÃO

Durante a vida produtiva de um poço de petróleo, faz-se necessário o uso de métodos de elevação artificial. Dentre estes métodos, estão incluídos os que se utilizam de algum sistema de bombeio, tais quais: Bombeio Mecânico por Hastes (BM), Bombeio Centrífugo Submerso (BCS) e Bombeio por Cavidades Progressivas (BCP). Em todos estes métodos de elevação, a presença de gás na sucção da bomba se apresenta como um limitador de performance, reduzindo a eficiência de operação.

No caso do BM, tem-se uma redução do percentual de enchimento de líquido na camisa da bomba. No BCP, o gás ocupa parte das cavidades que poderiam ser preenchidas pelo líquido, reduzindo assim a sua vazão. E por último, no caso do BCS, há o efeito da degradação do *Head*, o que reduz o diferencial de pressão transmitido ao fluido. Tais efeitos adversos justificam a completação destes poços sem a utilização do *packer* e com separadores de gás, de forma a redirecionar parte do gás para o espaço anular, evitando assim que o mesmo passe pela bomba.

Devido à impossibilidade de abrir o espaço anular para a superfície, o mesmo deve ser conectado a linha do poço de forma a se unir à corrente de produção. Uma válvula de retenção é acoplada entre a linha e o anular, de tal forma a impedir o fluxo reverso. No entanto, em algumas situações, a pressão na linha é alta e superior à do revestimento, impossibilitando assim a abertura da válvula de retenção e a retirada do gás. Este, então, se acumula no espaço anular, aumentando a pressão no revestimento com conseqüente aumento da contrapressão no reservatório. Isto, por fim, acaba por reduzir a vazão de produção.

Poços de alta RGL não são os únicos candidatos a apresentarem significativo volume gás no anular. Essa situação também pode ocorrer em projetos de injeção de vapor, onde os poços possuem baixa RGL e a presença do gás no anular é somente vapor d'água. Assim, a abertura do anular seria uma solução para tal problema, já que o vapor d'água não é nocivo ao meio ambiente, porém isso requer a ida de profissionais ao campo frequentemente.

Diante dessa problemática, ejetores acoplados à cabeça de poço, surgem como uma possível solução de baixo custo, capaz de reduzir a pressão de revestimento através da sucção do gás do anular e utilizando a própria produção do poço como o fluido motriz.

Baseando-se em uma modelagem para ejetores líquido-gás, foi desenvolvida uma ferramenta computacional na plataforma *Visual Basic* que calcula as principais dimensões de um ejetor, fabricado para operar nos casos explicados anteriormente, em que a contrapressão do reservatório limita a vazão de produção.

Este trabalho está dividido em cinco seções. A primeira, pertinente à introdução, traz ao leitor uma visão abrangente da problemática e os principais objetivos. A segunda seção, denominada de aspectos teóricos, discute os principais conceitos necessários ao entendimento do que será apresentado mais à frente. A terceira seção, diz respeito à metodologia utilizada para desenvolver a ferramenta computacional. Os resultados e discussões vêm em seguida, analisando a ferramenta e suas principais funções. Por último, as conclusões a respeito do que foi desenvolvido e recomendações para trabalhos futuros são expostas.

### **1.1. Objetivo**

O objetivo principal deste trabalho foi o desenvolvimento de uma ferramenta computacional capaz de dimensionar ejetores que operam na cabeça de poço, aspirando o gás do anular. A ferramenta deve ser capaz de retornar as principais pressões nos limites dos compartimentos de um ejetor através de um gráfico, a área da garganta, a área do bocal, o comprimento ótimo da garganta, o comprimento do difusor e, por fim, a eficiência de trabalho do ejetor.

---

## 2. ASPECTOS TEÓRICOS

---

## **2.ASPECTOS TEÓRICOS**

Nesta seção, será abordada toda a teoria necessária ao entendimento do presente trabalho.

### **2.1. Definição de Ejetores**

Ejetores são dispositivos que utilizam a energia cinética proveniente de um fluido primário ou motriz para succionar um outro, denominado de fluido secundário. Os fluidos podem ser compressíveis ou incompressíveis e o fluido secundário não será necessariamente igual ao fluido primário. Em alguns casos, como por exemplo em poços de petróleo, pode haver também partículas dispersas nos fluidos. Assim, a abordagem matemática para determinar sua performance dependerá do tipo de fluido que escoará em seu interior, porém o princípio de funcionamento será sempre o mesmo, independentemente do tipo de fluido utilizado (ESDU, 1985).



**Figura 1 - Ejetores de tamanhos variados (Fonte: <http://www.nitech-vac.com>).**

Além da flexibilidade alcançada por operarem tanto com fluidos compressíveis como também fluidos incompressíveis, os ejtores são bastante utilizados devido a sua alta confiabilidade, uma vez que não apresentam partes móveis em sua estrutura, e

também devido à possibilidade de instalações em áreas remotas ou inacessíveis. O fato de não possuir partes móveis é importante, pois permite a passagem de fluidos com partículas. Caso contrário, as partes móveis seriam rapidamente degradadas ou erodidas. Outro aspecto positivo e não menos importante da utilização de ejetores reside no quesito custo, dado que os mesmos possuem pequenas dimensões em sua maioria das vezes. Adicionalmente, a ativação do dispositivo é feita a partir de um fluido, o que dispensa a presença de conexões elétricas ou mecânicas (Cunningham, 1974).

As principais desvantagens estão relacionadas às perdas por fricção e pelo processo de mistura dos fluidos, fazendo com que a eficiência seja prejudicada. Uma bomba que apresente um projeto de dimensionamento criterioso alcança eficiências da ordem de 30 a 40% (Wite, 1965). A literatura também faz menção à sensibilidade dos ejetores quando variadas as condições as quais eles estão inseridos e à complexidade de equações na modelagem de determinados tipos de fluidos, como outros exemplos de desvantagens.

## 2.2. Seções de um Ejetor

Um ejetor convencional é geralmente composto por quatro estruturas: bocal convergente, câmara de sucção ou simplesmente sucção, garganta e difusor. A figura abaixo ilustra um esquema de um ejetor.

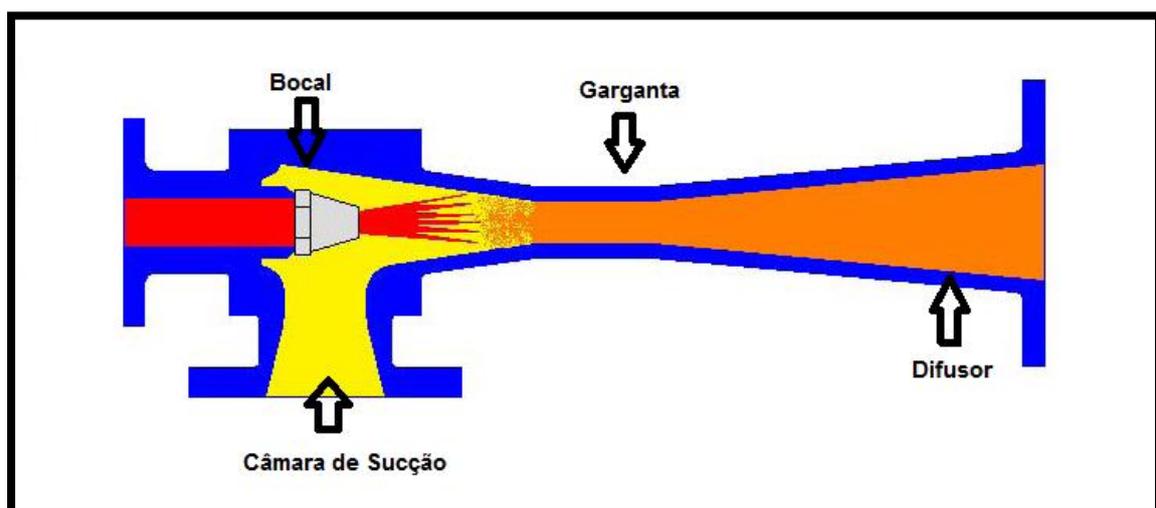


Figura 2- Estruturas componentes de um ejetor (Fonte:<http://www.enggcyclopedia.com/2012/03/steam-ejectors/>).

O bocal convergente é caracterizado como uma região de seção transversal decrescente por onde escoo o fluido primário. A redução gradativa de área na extremidade do bocal provoca uma aceleração do fluido em sua saída, gerando um vácuo.

A câmara de sucção é a região pela qual o fluido secundário adentra no ejetor, em função do vácuo gerado pelo fluido primário.

A garganta é a região de área constante onde ocorre a mistura dos fluidos oriundos do bocal e da câmara de sucção.

Por último, tem-se o difusor, com uma área de seção transversal crescente visando desacelerar a mistura, composta pelos fluidos primário e secundário, com consequente aumento de pressão.

### **2.3. Princípio de Funcionamento**

O fluido primário é direcionado ao ejetor, onde entrará pelo bocal a uma pressão inicial  $P_i$ . Devido a geometria convergente do bocal, o fluido produzido será acelerado, convertendo energia de pressão em energia cinética, e deixará o bocal a uma pressão  $P_o$ , onde  $P_i > P_o$ .

Dando continuidade ao processo, com a queda de pressão na extremidade do bocal o fluido secundário que se encontra acumulado e em uma condição de estagnação passa a ser succionado a uma pressão de sucção  $P_s$ . É o diferencial de pressão entre a sucção e a saída do bocal que será a força motriz responsável por aspirar o fluido secundário para o interior do ejetor.

Depois de succionado, o fluido secundário entra em contato com o fluido motriz, que o arrasta para o interior da garganta, onde passam a se misturar através de um processo que envolve a transferência da quantidade de movimento. Neste processo, parte da energia do fluido primário é utilizada para arrastar o fluido secundário e parte é perdida devido ao efeito da fricção. A eficiência energética do ejetor depende do processo de mistura, requerendo um comprimento ótimo da garganta para que a que mesma possa ser realizada completamente. Em casos onde o comprimento da garganta é pequeno, a

mistura passa a ocorrer no difusor comprometendo drasticamente a eficiência energética da bomba ejetora. Por outro lado, se o comprimento da garganta é muito grande, perde-se energia hno atrito.

A mistura em seguida será direcionada para a última parte do ejetor, o difusor. No difusor, o aumento da área diminui a velocidade da mistura e faz com que seja possível a conversão da energia cinética dos fluidos em energia de pressão, entregando a mistura a uma pressão de descarga,  $P_d$ .

Toda a mecânica do escoamento explicada acima pode ser observada em um gráfico da distribuição longitudinal de pressão em um ejetor. A imagem abaixo mostra essa distribuição relacionando-a com as devidas partes do ejetor.

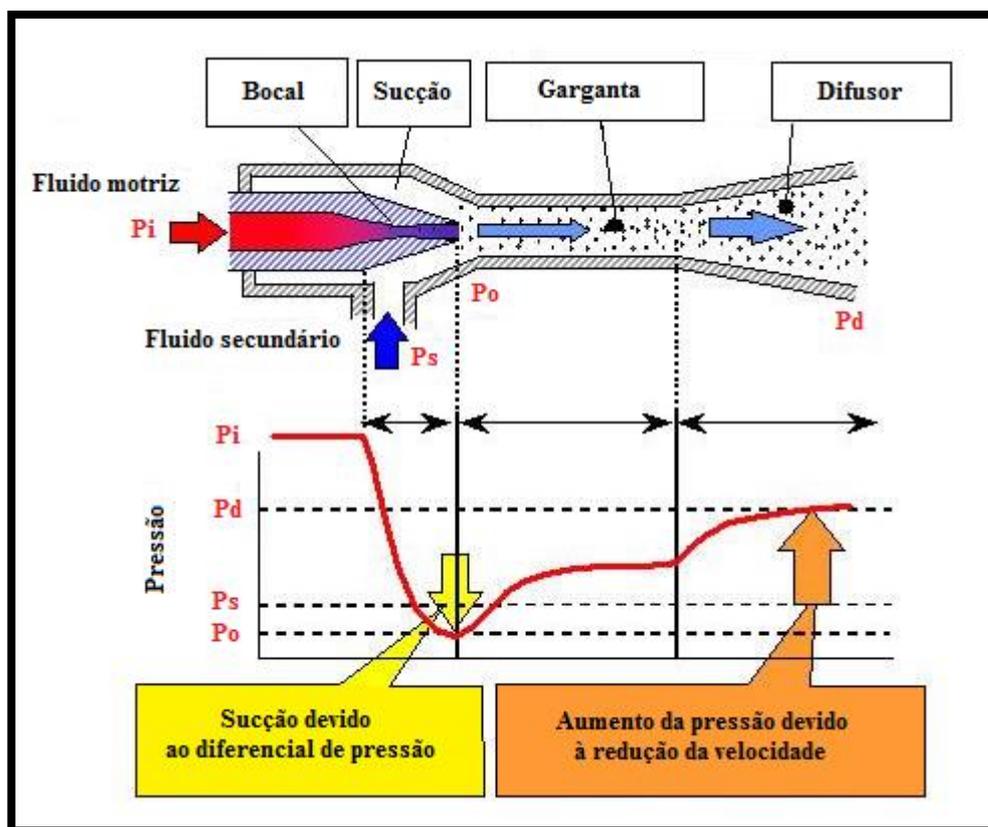


Figura 3 - Perfil de pressão longitudinal no ejetor. (Fonte: <http://aboutyourrefrigeration.blogspot.com.br/2014/05/refrigeration-ejectors.html>)

O gráfico anterior reflete um comportamento interessante dos fluidos ao se encontrarem na garganta. Dá-se o nome de *choque da mistura* ao processo que ocorre

quando os dois fluidos se encontram completamente misturados. Após determinado comprimento da garganta ocorre a transição do escoamento do tipo *jato* para o tipo *em bolhas*, onde os fluidos primário e secundário passam a constituir um meio contínuo. O escoamento tipo *jato* é caracterizado por apresentar um baixo gradiente de pressão e quando ocorre o choque da mistura nota-se uma variação brusca da pressão (Noronha, 1995). Isso é evidenciado no gráfico acima em que a pressão mínima é registrada na entrada da garganta (escoamento tipo *jato*) e após o choque da mistura verifica-se um surto da pressão como explicado anteriormente.

#### **2.4. Aplicação do ejetor na cabeça de poço**

Para o caso em que se deseja diminuir a pressão de revestimento, o fluido motriz será a própria produção do poço e o fluido secundário o gás que está contido no anular. O ejetor deve ser montado na superfície, bem próximo à cabeça do poço. A figura a seguir mostra dois cenários, um sem o ejetor instalado na cabeça do poço e outro com o dispositivo instalado.

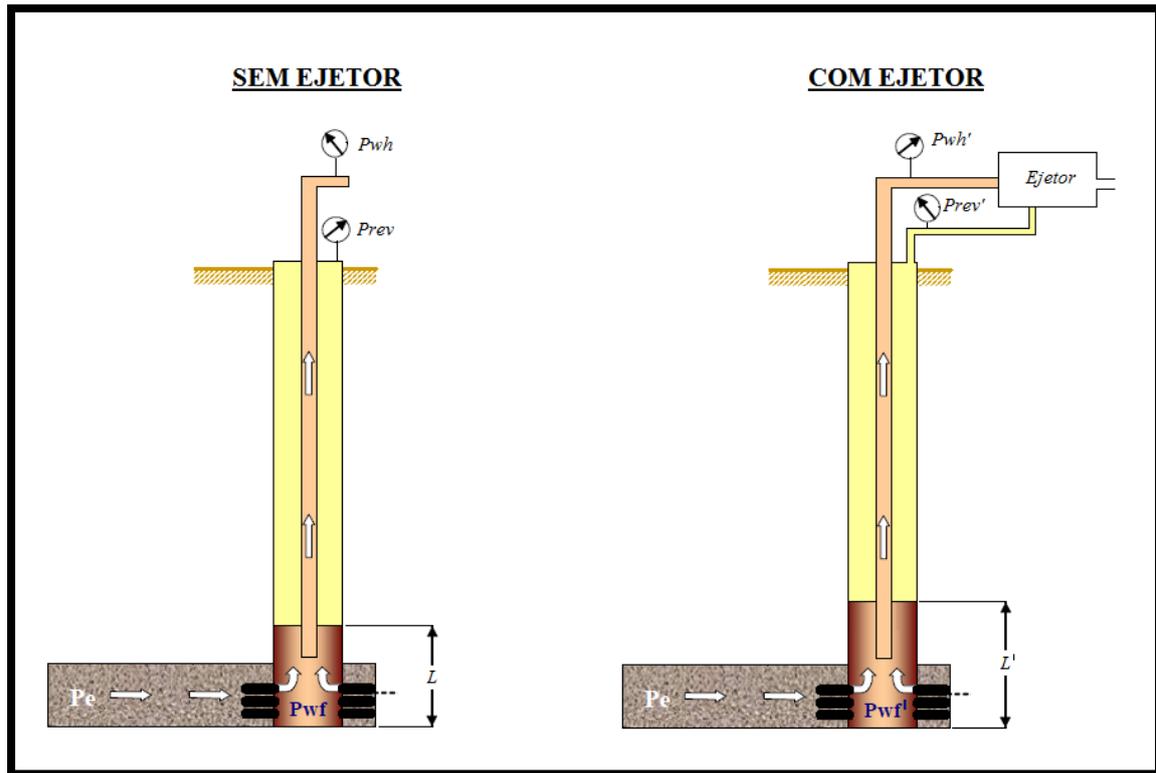


Figura 4 - Configuração de um poço sem o ejetor e outro com o ejetor instalado.

Como ilustrado na figura 4, a utilização do ejetor provocará uma diminuição da quantidade de gás no anular do poço e um aumento da submersão da bomba ( $L < L'$ ). Isto porque ao reduzirmos a contrapressão no reservatório, o mesmo fornecerá maior vazão. No entanto, vale salientar que a submersão da bomba pode permanecer constante ( $L = L'$ ) se o sistema de bombeio tiver capacidade para produzir todo o excedente de fluido. Como consequência do decréscimo do volume de gás no anular, a pressão de revestimento será reduzida ( $P_{rev} > P_{rev}'$ ). Além disto, ao causarmos uma restrição ao fluxo devido a presença do bocal convergente, a pressão na cabeça aumentará ( $P_{wh} < P_{wh}'$ ).

Do esquema mostrado anteriormente, percebe-se que a pressão de entrada do fluido motriz será a própria pressão da cabeça do poço, e a pressão da câmara de sucção a do revestimento. Diferentemente dos ejetores convencionais, onde controla-se a vazão do fluido motriz e conhece-se suas propriedades, no caso em questão teremos tais fatores como variáveis.

## **2.5. Modelagem matemática**

As equações deduzidas por Cunningham [3], constituem a base para o dimensionamento de ejetores líquido-gás. As premissas simplificadoras adotadas para a modelagem matemática são listadas a seguir:

1. O fluido que escoar pelo bocal convergente é considerado um líquido incompressível, o que limita a utilização de tais ejetores para poços com baixa RGL;
2. O fluido que escoar pela câmara de sucção é considerado um gás ideal devido às baixas pressões encontrada na cabeça do poço;
3. Não há troca de massa entre as fases;
4. Não há liberação ou solubilização de gás no óleo;
5. O escoamento é isotérmico, permanente e unidimensional. Embora haja troca de calor devido à compressão isotérmica do fluido secundário, a diferença entre a capacidade calorífica entre líquido e o gás é muito grande, fazendo com que o aumento de temperatura seja desprezível e o processo seja essencialmente isotérmico;
6. Não há reações químicas.

Aplicando as premissas simplificadoras nas equações da continuidade e do momento linear para os compartimentos do ejetor, determinam-se equações que governam o escoamento e relacionam as pressões com as áreas das seções transversais do bocal e da garganta.

A modelagem matemática é dividida em quatro partes: bocal (trecho i-o), sucção (trecho s-o), garganta (trecho o-t) e difusor (trecho t-d). Como o objetivo deste trabalho se resume ao desenvolvimento de uma ferramenta computacional, os seguintes parágrafos se reservam apenas para a descrição das equações resultantes da modelagem de Cunningham, deixando suas deduções em anexo.

A figura 5 relaciona as estruturas do ejetor com os índices que delimitam cada trecho.

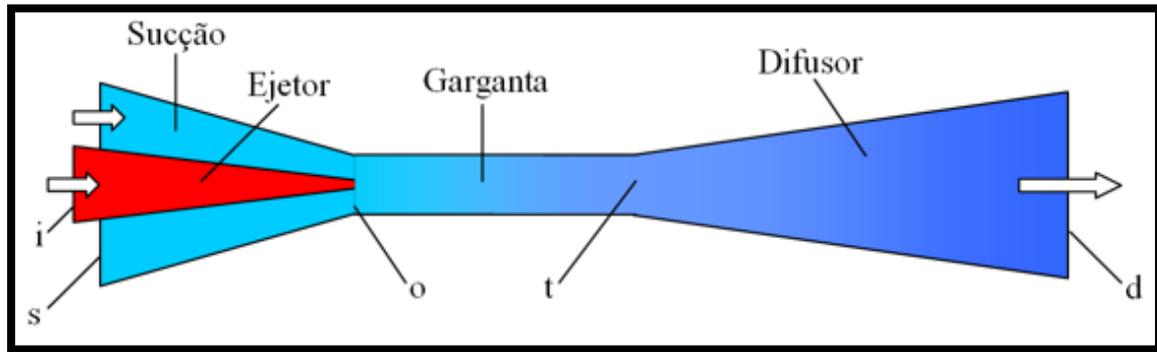


Figura 5 - Esquemático de ejetor para modelagem matemática.

### 2.5.1. Equação do Bocal (trecho i-o)

A queda de pressão no bocal é dada por:

$$p_i - p_o = Z(1 + K_{io}) \quad (1)$$

### 2.5.2. Equação da Sucção (trecho s-o)

A relação entre a pressão de sucção e a pressão na saída do bocal é apresentada a seguir.

$$p_o \ln \left( \frac{p_s}{p_o} \right) = Z \gamma_o \phi_o^2 \left( \frac{\mathcal{R}}{1-\mathcal{R}} \right)^2 (1 + K_{so}) \quad (2)$$

### 2.5.3. Equação da Garganta (trecho o-t)

A pressão na garganta é determinada a partir de uma equação quadrática:

$$p_t^2 - p_t \left[ Z \left[ 2\mathcal{R} - (2 + K_{ot})(1 + \gamma_o \phi_o) \mathcal{R}^2 + 2\gamma_o \phi_o \frac{\mathcal{R}^2}{1 - \mathcal{R}} \right] + p_o \right] + Z[(2 + K_{ot})(1 + \gamma_o \phi_o) \mathcal{R}^2 p_o \phi_o] = 0 \quad (3)$$

Como toda equação quadrática, a equação da garganta admite nenhuma, uma ou duas soluções reais. Para o primeiro caso, tem-se uma condição fisicamente impossível de escoamento, sem motivo específico, apenas pelo fato da equação não fornecer um valor útil. No segundo caso, a pressão na garganta obviamente será a única solução da equação. No terceiro e último caso, tem-se um problema: duas soluções e somente uma deve representar o valor da pressão na garganta. De acordo com Witte [13] e citado por Noronha [12], a menor solução caracteriza uma situação fisicamente impossível em que se tem escoamento supersônico após o *choque da mistura*, acarretando em uma variação negativa da entropia. Portanto, quando a equação apresentar duas soluções, a de maior valor será tomada como o valor da pressão na garganta.

#### 2.5.4. Equação do Difusor (trecho t-d)

O ganho de pressão que ocorre no difusor pode ser determinado pela equação abaixo:

$$p_d - p_t = Z\mathcal{R}^2(1 + \gamma_o \phi_o) \left[ (1 + \phi_t)^2 - (1 + \phi_d)^2 \mathcal{R}_d^2 - K_{td}(1 + \phi_t) \right] - p_o \phi_o \ln \left( \frac{p_d}{p_t} \right) \quad (4)$$

#### 2.5.5. Eficiência energética do Ejetor

A eficiência energética da bomba ejetora é obtida pela razão entre o trabalho útil para comprimir o gás de uma pressão  $P_o$  (entrada da garganta), até uma pressão  $P_d$  (saída do difusor), e a parcela de energia que é perdida pelo fluido motriz. A equação abaixo define a eficiência para um ejetor:

$$\eta_{ip} = \frac{P_o \phi_o \ln \left( \frac{P_d}{P_o} \right)}{P_i - P_d} \quad (5)$$

---

## 3.METODOLOGIA

---

### 3. METODOLOGIA

Nesta seção, serão discutidos os principais tópicos pertinentes ao desenvolvimento da ferramenta computacional.

#### 3.1. Desenvolvimento da ferramenta computacional

A ferramenta computacional tem como principal objetivo o de determinar áreas e comprimentos das principais partes de um ejetor. De posse das equações do bocal, da sucção, da garganta e do difusor, foi possível o desenvolvimento de um *Software*, nomeado *DimEjetor*, que recebe como entradas, variáveis que representam condições as quais o ejetor será submetido, e a partir de processos iterativos, retorna as dimensões do ejetor e sua eficiência como resultados finais.

O *software DimEjetor* foi implementado na plataforma *Visual Basic* (VB), linguagem de programação com uma interface gráfica amigável, disponível no pacote de linguagens *Microsoft Visual Studio*. A versão utilizada no presente trabalho foi a de 2012 e apresenta compatibilidade com todos os sistemas operacionais do *Windows*.

*DimEjetor* recebe como entradas, dados característicos de um poço de petróleo em produção que são normalmente obtidos no campo, e a partir desses dados, realiza cálculos para determinar os parâmetros das equações que modelam o escoamento no ejetor. Em outras palavras, ao invés de solicitar ao usuário dados como a massa específica do fluido motriz por exemplo, a ferramenta solicita o preenchimento de dados comuns em campo, como grau API do óleo, peso da água e BSW para que a partir desses, a massa específica do fluido motriz seja determinada. As variáveis de entrada que geralmente podem ser obtidas em campo e serão solicitadas ao usuário são listadas a seguir:

Entradas: Dados dos fluidos	Simbologia
<i>Basic Sedement and Water</i>	BSW
Densidade do gás	$D_g$
Temperatura de superfície	T
Grau API	API
Massa específica da água	$\rho_{\text{água}}$

Tabela 1. Dados dos fluidos.

Entradas: Condições de contorno	Simbologia
Diâmetro do difusor	$D_d$
Ganho de ângulo do difusor	$\phi_d$
Vazão de gás no anular	$Q_{2o}$
Vazão de produção desejada	$Q_1$
Pressão na cabeça	$P_1$
Pressão de descarga	$P_d$
Coefficiente de atrito: Bocal	$K_{io}$
Coefficiente de atrito: Sucção	$K_{so}$
Coefficiente de atrito: Garganta	$K_{ot}$
Coefficiente de atrito: Difusor	$K_{td}$

Tabela 2. Condições de contorno.

Entradas: Dados do teste	Simbologia
Vazão de teste	$Q_{teste}$
Pressão de fluxo no fundo do poço	$P_{wf}$
Pressão estática	$P_e$
Nível Dinâmico	NVD
TVD Canhoneio	$TVD_c$

Tabela 3. Dados do teste.

### 3.2. Cálculo de parâmetros.

A seguir serão apresentados todos os cálculos que estão por trás das rotinas computacionais do *software*.

#### 3.2.1. Constante $R_{gás}$ .

A constante  $R_{gás}$  é de grande importância para o cálculo da massa específica do fluido a ser aspirado, e pode ser calculada quando se tem a densidade do gás.

$$R_{gás} \left[ \frac{J}{Kg.K} \right] = \frac{8314,3}{29D_{gás}}$$

### 3.2.2. Massa específica do óleo.

Como não há gás dissolvido no fluido motriz, o cálculo da massa específica do óleo depende unicamente do grau API do mesmo e será fundamental na determinação da massa específica do fluido motriz.

$$\rho_{\text{óleo}} \left[ \frac{Kg}{m^3} \right] = \frac{1000.141,5}{API + 135,5}$$

### 3.2.3. Massa específica do líquido (óleo + água).

A massa específica do líquido é um dos principais parâmetros envolvidos nas equações resultantes da modelagem matemática. Com o BSW, as massas específicas da água e do óleo, determina-se a massa específica da mistura bifásica (fluido motriz) pela equação a seguir:

$$\rho_{\text{líquido}} \left[ \frac{Kg}{m^3} \right] = \rho_1 = \rho_{\text{água}} \frac{BSW}{100} + \rho_{\text{óleo}} \left( 1 - \frac{BSW}{100} \right)$$

### 3.2.4. Índice de produtividade do poço (IP).

O cálculo do IP é realizado a partir dos dados de teste e apesar de não estar presente nas equações (1), (2), (3) e (4), será importante para determinar a pressão de sucção.

$$IP \left[ \frac{m^3/d}{kgf/cm^2} \right] = \frac{Q_{\text{produção}}}{p_e - p_{wf}}$$

### 3.2.5. Altura da coluna de líquido do anular.

Com os valores do nível dinâmico e da *TVD* (*True Vertical Distance*) de canhoneio, obtém-se a altura da coluna de líquido no anular.

$$L[m] = TVD_{canhoneio} - NVD$$

### 3.2.6. Pressão de revestimento.

A pressão de revestimento é calculada subtraindo a pressão de fluxo no fundo do poço pela pressão exercida pela coluna de líquido no anular. É importante observar que essa pressão de fluxo no fundo de poço não é a mesma pressão obtida no teste de poço, mas sim a pressão correspondente a uma nova vazão com a qual se deseja produzir com a instalação do ejetor.

$$p_{rev} \left[ \frac{kgf}{cm^2} \right] = \left( p_e - \frac{Q_{desejada}}{IP} \right) - \rho_{líquido} gL$$

### 3.2.7. Massa específica do gás na entrada da garganta.

A massa específica do gás na entrada da garganta é definida pela equação seguinte:

$$\rho_{gás} \left[ \frac{kg}{m^3} \right] = \rho_{2o} = \frac{p_o}{R_{gás}T} = \frac{p_{sucção}}{R_{gás}T}$$

Em uma situação de campo, não é conhecida a pressão na entrada da garganta, o que inviabiliza tal parâmetro de ser uma variável de entrada do *software*. No entanto, como o ejetor a ser dimensionado é do tipo líquido-gás, considera-se desprezível a diferença de pressão entre a entrada da câmara de sucção e a entrada da garganta, o que implica que a pressão de revestimento será praticamente igual a pressão de sucção e a

pressão na entrada da garganta. Apenas velocidades extremas do jato e gases com alta densidade produziram uma queda de pressão significativa na câmara de sucção de ejetores líquido-gás.

$$p_{rev} \cong p_{sucção} \cong p_o$$

Como a pressão de revestimento é um parâmetro que é calculado nas rotinas computacionais (demonstrado no item anterior), torna-se possível determinar a massa específica do gás na entrada da garganta.

$$\rho_{gás} \left[ \frac{kg}{m^3} \right] = \rho_{2o} = \frac{p_{rev}}{R_{gas}T}$$

### 3.2.8. Head do fluido motriz.

O cálculo do *Head* do fluido motriz é realizado a partir da equação (1), onde a pressão na saída do bocal pode ser aproximada para a pressão de sucção.

$$Z [Pa] = \frac{p_i - p_{sucção}}{1 + K_{io}}$$

### 3.2.9. Velocidade do fluido motriz.

Como o *Head* é função da massa específica do fluido motriz e do quadrado de sua velocidade, temos que:

$$v_{1o} [m/s] = \left( \frac{2Z}{\rho_1} \right)^{1/2}$$

### **3.2.10. Diâmetro do bocal.**

A área do bocal é facilmente encontrada dividindo a vazão desejada pela velocidade do fluido motriz na mesma região. Uma vez que a área é determinada, teremos também como calcular o diâmetro do bocal.

$$A_n[m^2] = \frac{Q_{desejada}}{v_{1o}}$$

$$D_n[m] = \left(\frac{4A_n}{\pi}\right)^{1/2}$$

### **3.2.11. Pressão na garganta ( $P_t$ ).**

A pressão na garganta é determinada a partir da equação (40). Se a equação apresentar duas raízes reais, a maior será designada como o valor da pressão na garganta, caso contrário, não haverá como determinar tal valor devido às condições do escoamento já explicadas no item 2.4.3.

### **3.2.12. Pressão no difusor ( $P_d$ ).**

Diante dos valores de  $R$  e de  $P_t$ , deve-se determinar o valor de  $P_d$  numericamente, já que a equação (4) é implícita.

### **3.2.13. Razão de áreas, $R$ .**

O cálculo da variável  $R$  é realizado através de um processo iterativo assim como o cálculo da pressão de descarga. O processo iterativo se inicia com um chute para o valor de  $R$  e, aplicando-o na equação da garganta, obtém-se uma  $P_t$ . Com a  $P_t$  obtida e o  $R$  chutado, realiza-se um outro processo iterativo com a equação do difusor para calcular  $P_d$ . Se  $P_d$  apresentar um erro absoluto menor que 0,01 quando comparada com a pressão de descarga que o usuário informa, então conclui-se que o  $R$  foi determinado e, obviamente, a área da garganta também. Se não determinado, outro chute será necessário até encontrar ou não encontrar um  $R$  para o erro requerido (caso em que as equações não convergem para os dados de entrada).

### **3.2.14. Comprimento ótimo da garganta.**

O comprimento ótimo da garganta é determinado a partir da correlação de Cunningham & Dopkin [4]:

$$\left(\frac{L_t}{D_{jato}}\right)_{\text{ótimo}} = 15 \left(\frac{A_t}{A_{jato}} - 1\right)$$

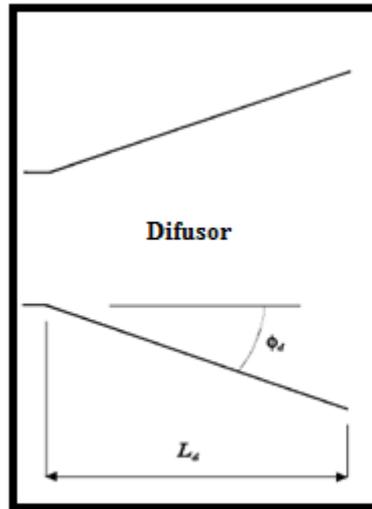
Onde,

$$D_{jato} = 0,748D_n$$

### **3.2.15. Comprimento do difusor.**

Na modelagem desenvolvida não há qualquer relação que inclua dimensões longitudinais para o difusor, o que impossibilita o cálculo de seu comprimento através das equações deduzidas por Cunningham, apresentadas na seção 2.5 deste trabalho. No entanto, conhecendo o ganho de ângulo ( $\varphi_d$ ) com o qual a seção transversal aumenta, é possível determinar o comprimento do difusor através de relações trigonométricas. De acordo com a ESDU (*Engineering Sciences Data Unit*) [5], o ganho de ângulo tem que

estar dentro de um intervalo de 3 a 5° para que a recuperação de pressão ocorra de maneira eficiente.



**Figura 6 - Geometria do difusor.**

Assim, temos que:

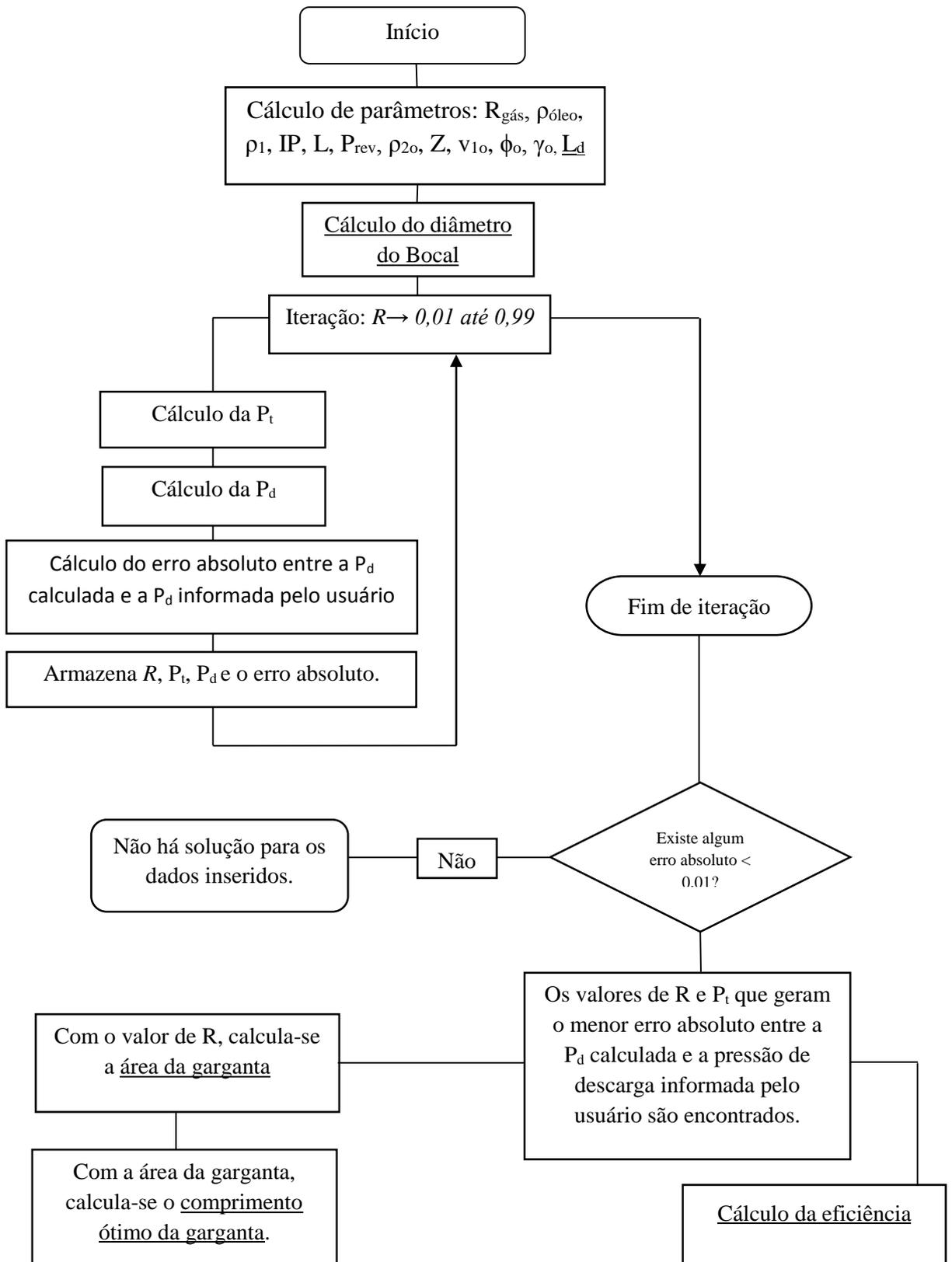
$$\tan(\varphi_d) = \frac{D_d - D_t}{2L_d}$$

$$L_d = \frac{D_d - D_t}{2 \tan(\varphi_d)}$$

### **3.2.16. Eficiência energética do ejetor.**

A eficiência energética do ejetor é determinada utilizando a equação (5), apresentada na seção 2.5 deste trabalho.

### 3.3. Fluxograma do algoritmo



---

## 4.RESULTADOS E DISCUSSÕES

---

## 4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nessa seção, será apresentado o *software* e suas funcionalidades na tentativa de elucidar dúvidas que possam surgir ao interagir com a ferramenta.

### 4.1. A ferramenta computacional

Ao iniciar o *software*, o usuário será submetido a uma tela de apresentação que mostra informações básicas, como ilustra a figura 6. Após esse primeiro momento, a tela de trabalho (figura 7) será aberta e então o usuário estará apto a interagir com a ferramenta e realizar o dimensionamento.



Figura 7 - Tela de apresentação do *software*.

DimEjetor

**Dados dos Fluidos:**

Temperatura de superfície  K      Grau API

Densidade do Gás       Peso do Óleo  Kg/m<sup>3</sup>

Peso da Água  Kg/m<sup>3</sup>      Peso do Líquido  Kg/m<sup>3</sup>

BSW  %      Peso do Gás  Kg/m<sup>3</sup>

**Condições de Contorno:**

Diâmetro do difusor  Pol      Coeficientes de Atrito

Ganho de ângulo (Difusor)  Graus      Bocal

Vazão de Gás (Anular)  m<sup>3</sup>/d      Sucção

Vazão Desejada  m<sup>3</sup>/d      Garganta

Pressão na Cabeça  kgf/cm<sup>2</sup>      Difusor

Pressão de Descarga  kgf/cm<sup>2</sup>

Pressão de Revestimento  kgf/cm<sup>2</sup>

**Dados do Teste:**

Vazão de Teste  m<sup>3</sup>/d      Nivel Dinâmico  m

Pressão no Fundo  kgf/cm<sup>2</sup>      TVD canhoneio  m

Pressão Estática  kgf/cm<sup>2</sup>

**Gráficos**

IPR       Pressões ao longo do ejetor

Dimensionar    Salvar    Carregar    Limpar

**Resultados**

Diâmetro do Bocal  pol      **Eficiência**

Diâmetro da Garganta  pol

Comprimento da Garganta  cm

Comprimento do Difusor  cm

Figura 8 - Tela de trabalho do *software*.

Como ilustrado na figura 7, os dados de entrada foram divididos em três grupos:

- Dados dos fluidos;
- Condições de contorno;
- Dados do teste.

Ainda sobre os dados de entrada, podemos visualizar parâmetros como *Pressão de revestimento*, *Peso do Líquido*, *Peso do Óleo* e *Peso do Gás*, que não permitem a inserção de dados. Esses parâmetros são calculados automaticamente quando o usuário insere os dados de entrada, servindo apenas para a exibição, já que são importantes para o dimensionamento.

#### **4.2. Saídas**

Quando efetuado o dimensionamento, a ferramenta computacional apresentará como saída o:

- Gráfico da IPR, modelo linear;
- Gráfico das pressões nas fronteiras de cada compartimento do ejetor;
- Diâmetro da garganta;
- Diâmetro do bocal convergente;
- Comprimento ótimo da garganta;
- Comprimento do difusor.

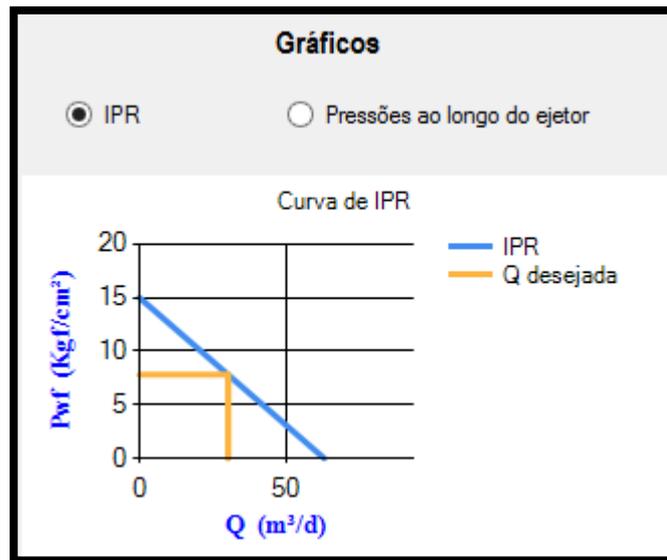


Figura 9 - Gráfico de IPR, modelo linear.

Como foi considerado que o fluido produzido é incompressível, não haverá liberação de gás do mesmo, o que indica que o índice de produtividade pode ser considerado constante e a IPR de modelo linear pode ser adotada.

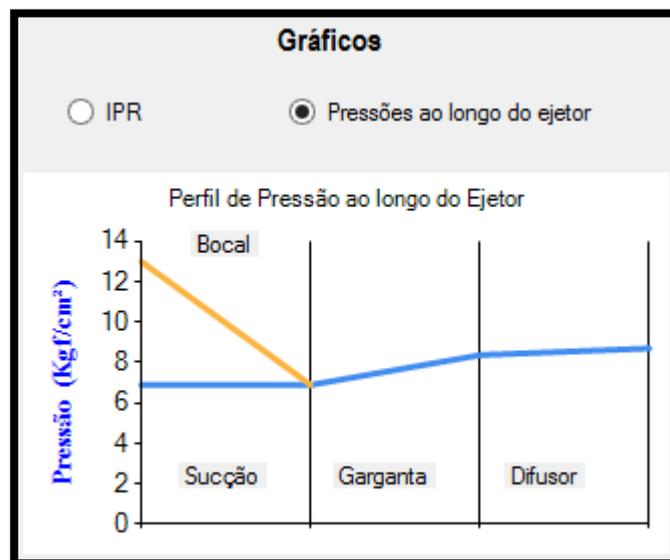


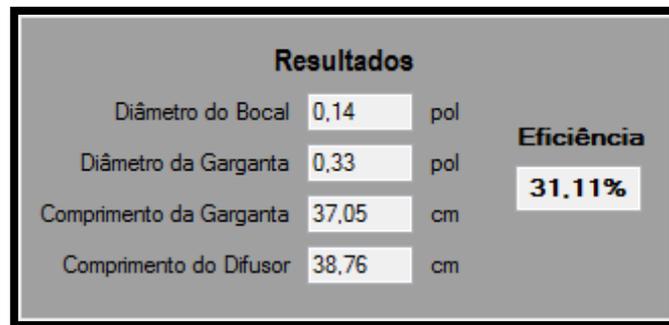
Figura 10 - Gráfico da pressão nas fronteiras dos compartimentos do ejetor.

O gráfico acima ilustra as pressões nas fronteiras dos compartimentos do ejetor. É importante observar que as pressões de uma fronteira à outra foram ligadas por uma

reta meramente para ilustração, porém não é possível determinar as pressões em qualquer parte do ejetor, exceto nas fronteiras. Isto decorre da abordagem feita por Cunningham [3] em sua modelagem, onde a formulação integral para o volume de controle foi adotada.

Após o dimensionamento ser realizado, o usuário terá a opção de escolher qual dos dois gráficos deverá ser exibido na tela de trabalho, podendo alterna-los a qualquer momento.

A figura a seguir exhibe os resultados do dimensionamento juntamente com a eficiência da bomba ejetora.



**Figura 11 - Resultados do dimensionamento.**

### **4.3. Outras funcionalidades**

Além do dimensionamento, a ferramenta oferece ao usuário a opção de salvar os dados de entrada em um arquivo texto como também, fazer a leitura de tal arquivo através do comando “Carregar”. Há também a opção “Limpar” em que o usuário apaga todos os dados de entrada e saídas, deixando a tela de trabalho com sua configuração inicial.

---

---

# 5. CONCLUSÕES

---

---

## 5. CONCLUSÃO

Nesta seção serão apresentadas as principais conclusões obtidas com esse trabalho, juntamente com as recomendações para trabalhos futuros.

Neste trabalho, foi desenvolvida uma ferramenta computacional que visa o dimensionamento de ejetores acoplados à cabeça de poços de petróleo. Uma modelagem matemática baseada em certas premissas justifica o uso de tais ejetores apenas em poços com baixa RGL, considerando assim, o fluido produzido (líquido incompressível) como o fluido motriz e o gás presente no anular como fluido secundário. Diante disso, a ferramenta computacional *DimEjetor*, recebe como entradas os principais dados relevantes ao sistema poço-reservatório e, com o uso de processos iterativos, retorna ao usuário as principais dimensões de um ejetor.

O *software* apresenta simplicidade em seu manuseio e proporciona ao usuário opções para salvar os dados de entrada em um arquivo texto, como também carregá-los na tela de trabalho. É importante observar também que o usuário deve ter um conhecimento mínimo para manusear o *DimEjetor*, pois nem todos os dados de entrada produzirão resultados satisfatórios.

Recomenda-se o estudo de uma modelagem para ejetores líquido-gás em que se considere o fluido motriz como líquido compressível na tentativa de implementá-la no *DimEjetor*, oferecendo ao usuário a opção de escolha do tipo de fluido motriz que será admitido no bocal do mesmo. Essa modificação tornaria o programa mais adequado à realidade, uma vez que há poços com alta RGL, situação a qual o *DimEjetor* não se aplica.

A modelagem utilizada para o dimensionamento produz resultados satisfatórios, porém recomenda-se ainda uma análise energética que permita a quantificação das diversas perdas que ocorrem ao longo do ejetor. Essa análise pode resultar em um maior entendimento dos mecanismos que acontecem nos ejetores, o que certamente contribuirá no dimensionamento destes.

---

## 6.REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

## **6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

- [1] Abdelli, H.: The Ejector Technology in Oued Zar Plant, SPE 134956 (Jun. 2010).
- [2] Betzler, R.L., “The Liquid-Gas Jet Pump Analysis and Experimental Results”, Tese de Mestrado, Universidade Estadual da Pensilvânia, 1969
- [3] Cunningham, R. G.: Gas Compression with the Liquid Jet Pump, Journal of Fluids Engineering (Sep. 1974) 203-214.
- [4] Cunningham, R. G. and Dopkin, R.J: Jet Breakup and mixing throat lengths for the liquid jet gas pump. Trans. ASME, J. Fluids Eng., 1974, 96, 216-226
- [5] ESDU 85032. (1985) Ejectors and Jet Pumps. Design and Performance for Incompressible Liquid Flow. Engineering Sciences Data Unit.
- [6] ESDU 96046. (1994) Ejectors and Jet Pumps. Computer Program for Design and Performance for Steam/gas flow. Engineering Sciences Data Unit.
- [7] Fox, R. W., McDonald, Alan T., Pritchard, Philip J., Introdução à Mecânica dos Fluidos. 6ª Edição, Livros Técnicos e Científicos – LTC, 2006.
- [8] Gruppig, A. W. et al: Fundamentals of Oilwell Jet Pumping, SPEPE (February. 1988) 9-14.
- [9] Hatzlavramidis, D. T.: Modeling and Desing of Jet Pumps, SPE Production Engineering (Nov. 1991).
- [10] Higgins, H.W., “Water Jet Air Pump Theory and Performance”, Tese de Mestrado, Universidade Estadual da Pensilvânia, 1964.
- [11] Miller, J.R., “The Liquid-Gas Ejector. ”, dissertação, Universidade Estatal do Novo México, 1969.
- [12] Neve, R.S “The Performance and modeling of liquid jet gas pumps”, Departamento de Engenharia Mecânica, *City University*, Londres, 1987.
- [13] Noronha, F. A. F.: Bombeamento Hidráulico a Jato com Sucção Bifásica, MS Thesis, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, Brasil (1995).

[14] Witte, J. H, “Efficiency and Design Liquid-Gas Ejectors”, *British Chemical Engineering*, Vol. 10, No. 9, 1965, pp. 602-607.

---

---

# ANEXO

---

---

## ANEXO: DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES PARA EJETORES LÍQUIDO-GÁS

### Bocal

Aplicando a equação da conservação da energia:

$$\frac{v_{1o}^2 - v_{1i}^2}{2} + \frac{p_o - p_i}{\rho_1} + \frac{K_{io}v_{1o}^2}{2} = 0$$

Considerando que a velocidade na saída do bocal será muito maior que na sua entrada  $v_{1o}^2 \gg v_{1i}^2$ , temos que a equação do bocal será:

$$p_i - p_o = Z(1 + K_{io})$$

### Sucção

Aplicando novamente a equação da conservação da energia:

$$\int_s^o v_2 dv_2 + \int_s^o \frac{dp}{\rho_2} + \frac{K_{so}v_{2o}^2}{2} = 0$$

Mas,

$$\rho_2 = \frac{p}{RT}$$

E considerando  $v_{2o}^2 \gg v_{2s}^2$ , teremos:

$$p_o \ln\left(\frac{p_s}{p_o}\right) = \frac{\rho_{2o}v_{2o}^2}{2} (1 + K_{so})$$

Ainda,

$$\frac{v_{2o}}{v_{1o}} = \phi_o \frac{\mathcal{R}}{1 - \mathcal{R}}$$

Após algumas manipulações, finalmente, chegamos à equação final para a sucção:

$$p_o \ln\left(\frac{p_s}{p_o}\right) = Z\gamma_o \phi_o^2 \left(\frac{\mathcal{R}}{1 - \mathcal{R}}\right)^2 (1 + K_{so})$$

### Garganta

Aplicando a equação do momento linear:

$$(p_o - p_t)A_t - \tau_w A_w = \rho_{3t} v_{3t}^2 A_t - \rho_o v_{1o}^2 A_n - \rho_{2o} v_{2o}^2 (A_t - A_n)$$

$$(p_o - p_t) - \tau_w \frac{4L}{D_t} = \rho_{3t} v_{3t}^2 - \rho_1 v_{1o}^2 \frac{A_n}{A_t} - \rho_{2o} v_{2o}^2 \frac{(A_t - A_n)}{A_t}$$

O termo referente à tensão de cisalhamento pode ser substituído pelo termo que representa o coeficiente de dissipação viscosa na garganta, como mostra a equação abaixo:

$$\tau_w \frac{4L}{D_t} = \frac{K_{ot} \rho_{3t} v_{3t}^2}{2}$$

Logo,

$$p_o - p_t = \rho_{3t} v_{3t}^2 \left(1 + \frac{K_{ot}}{2}\right) - \rho_1 v_{1o}^2 \frac{A_n}{A_t} - \rho_{2o} v_{2o}^2 \frac{(A_t - A_n)}{A_t}$$

Mas,

$$\rho_{3t} = \rho_1 \frac{1 + \gamma_o \phi_o}{1 + \phi_t}$$

E,

$$v_{3t} = v_{1o} \mathcal{R}(1 + \phi_t)$$

Assim, substituindo a equação da massa específica da mistura na garganta e a equação da velocidade da mistura na garganta na equação da garganta, obteremos:

$$p_t - p_o = Z \left[ 2\mathcal{R} - (2 + K_{ot})(1 + \gamma_o \phi_o) \mathcal{R}^2 (1 + \phi_t) + 2\gamma_o \phi_o \frac{\mathcal{R}^2}{1 - \mathcal{R}} \right]$$

Como o escoamento é isotérmico, a seguinte relação é válida:

$$\phi_t = \frac{p_o}{p_t} \phi_o$$

Substituindo a relação acima na equação da garganta, finalmente obtemos a equação final que modela o escoamento na garganta.

$$p_t^2 - p_t \left[ Z \left[ 2\mathcal{R} - (2 + K_{ot})(1 + \gamma_o \phi_o) \mathcal{R}^2 + 2\gamma_o \phi_o \frac{\mathcal{R}^2}{1 - \mathcal{R}} \right] + p_o \right] + Z[(2 + K_{ot})(1 + \gamma_o \phi_o) \mathcal{R}^2 p_o \phi_o] = 0$$

Difusor

Aplicando a conservação da energia na região do difusor, teremos:

$$\int_t^d v_3 dv_3 + \int_t^d \frac{dp}{\rho_3} + \frac{K_{td} v_{3t}^2}{2} = 0$$

Definindo como  $\rho_3$  varia com a pressão e integrando a equação acima, obtém-se:

$$p_d - p_t + p_o \phi_o \ln\left(\frac{p_d}{p_t}\right) = \frac{\rho_1(1 + \gamma_o \phi_o)}{2} \left[ v_{3t}^2 - v_{3d}^2 - \frac{K_{td} v_{3t}^2}{(1 + \phi_t)} \right]$$

No entanto, necessita-se desenvolver uma expressão para a velocidade da mistura no difusor.

$$v_{3d} = \frac{Q_{3d}}{A_d} = \frac{Q_1 + Q_{2d}}{\left(\frac{A_d}{A_t}\right) \left(\frac{A_t}{A_n}\right) A_n}$$

Mas,

$$\phi_d = \frac{Q_{2d}}{Q_1}$$

Então,

$$v_{3d} = v_{1o}(1 + \phi_d)\mathcal{R}\mathcal{R}_d$$

Por fim, substituindo a equação acima na equação do difusor e realizando algumas manipulações, chega-se a equação final do difusor:

$$p_d - p_t = Z\mathcal{R}^2(1 + \gamma_o\phi_o) \left[ (1 + \phi_t)^2 - (1 + \phi_d)^2 \mathcal{R}_d^2 - K_{td}(1 + \phi_t) \right] - p_o\phi_o \ln\left(\frac{p_d}{p_t}\right)$$

### Eficiência da bomba ejetora

Combinando as equações do bocal, da garganta e do difusor, obtemos a parcela de energia que é perdida pelo fluido motriz:

$$e_{in} = Q_1(p_i - p_d)$$

A energia utilizada para comprimir o gás de uma pressão  $P_i$  a uma pressão  $P_d$ , é dada pela equação abaixo:

$$W_{out} = Q_{2o}RT \ln\left(\frac{p_d}{p_o}\right)$$

Logo, a eficiência da bomba ejetora pode ser calculada de acordo com a seguinte equação:

$$\eta_{ip} = \frac{W_{out}}{e_{in}} = \frac{p_o\phi_o \ln\left(\frac{p_d}{p_o}\right)}{p_i - p_d}$$