



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE  
CENTRO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

**Paulo Henrique Araújo Bezerra**

**ANÁLISE DE ESTRUTURAS DE SUPERFÍCIE DELGADAS  
AXISSIMÉTRICAS VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS COM  
UTILIZAÇÃO DE ELEMENTO RETILÍNEO**

**Natal**

**2013**

**Paulo Henrique Araújo Bezerra**

**ANÁLISE DE ESTRUTURAS DE SUPERFÍCIE DELGADAS  
AXISSIMÉTRICAS VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS COM  
UTILIZAÇÃO DE ELEMENTO RETILÍNEO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Selma Hissae Shimura da Nóbrega  
Co-orientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Fernanda Rodrigues Mittelbach

Natal  
2013

UFRN / Biblioteca Central Zila Mamede  
Catalogação da Publicação na Fonte

Bezerra, Paulo Henrique Araújo.

Análise de estruturas de superfície delgadas axissimétricas via método dos elementos finitos com utilização de elemento retilíneo. / Paulo Henrique Araújo Bezerra. – Natal, RN, 2013.

88 f.: il.

Orientadora: Profa. Dra. Selma Hissae Shimura da Nóbrega.

Co-orientadora: Profa. Dra. Fernanda Rodrigues Mittelbach.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.

1. Construção civil - Dissertação. 2. Estruturas axissimétricas - Dissertação. 3. Método dos elementos finitos - Dissertação. 4. Elemento retilíneo – Dissertação. I. Nóbrega, Selma Hissae Shimura da. II. Mittelbach, Fernanda Rodrigues. III. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. IV. Título.

RN/UF/BCZM

CDU 69.01

PAULO HENRIQUE ARAÚJO BEZERRA

**ANÁLISE DE ESTRUTURAS DE SUPERFÍCIE DELGADAS  
AXISSIMÉTRICAS VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS COM  
UTILIZAÇÃO DE ELEMENTO RETILÍNEO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação, em Engenharia Civil, da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

**BANCA EXAMINADORA**



---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Selma Hissae Shimura da Nóbrega – Orientadora



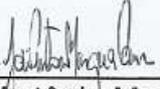
---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Fernanda Rodrigues Mittelbach – Co-orientadora



---

Prof. Dr. Ângelo Vieira Mendonça – Examinador Externo (UFPB)



---

Prof. Dr. José Antônio Marques Carrer – Examinador Externo (UFPR)

**Natal, 13 de junho de 2013.**

# ANÁLISE DE ESTRUTURAS DE SUPERFÍCIE DELGADAS AXISSIMÉTRICAS VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS COM UTILIZAÇÃO DE ELEMENTO RETILÍNEO

**Paulo Henrique Araújo Bezerra**

Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Selma Hissae Shimura da Nóbrega

Co-orientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Fernanda Rodrigues Mittelbach

## **RESUMO**

O presente trabalho aborda a análise linear de estruturas de superfície axissimétricas através do desenvolvimento e implementação de um código computacional baseado no Método dos Elementos Finitos. Inicialmente, as estruturas são estudadas de maneira isolada e, em seguida, compatibilizadas de modo a formar estruturas acopladas, como reservatórios e vasos de pressão. Exemplos de aplicação, com diferentes tipos de solicitação e condições de vinculação, são apresentados e os resultados obtidos pelo código desenvolvido são comparados a valores analíticos.

**Palavras-chave:** Estruturas axissimétricas, Método dos Elementos Finitos, Elemento retilíneo

# ANALYSIS OF THIN BIDIMENSIONAL AXISYMMETRIC STRUCTURES VIA FINITE ELEMENT METHOD USING STRAIGHT ELEMENT

**Paulo Henrique Araújo Bezerra**

Adviser: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Selma Hissae Shimura da Nóbrega

Co-adviser: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Fernanda Rodrigues Mittelbach

## **ABSTRACT**

The present work deals with the linear analysis of bi-dimensional axisymmetric structures, through development and implementation of a Finite Element Method code. The structures are initially studied alone and afterwards compatibilized into coupled structures, that is, assemblages, including tanks and pressure vessels. Examples are analysed and, in order to prove accuracy, the results were compared with those furnished by the analytical solutions.

**Key-words:** Axisymmetric structures, Finite Element Method, Straight element

Dedico este trabalho à minha família, em especial ao meu avô Lucena (in memoriam), pela confiança e contribuição à minha educação e a meu avô Raimundo e meu padrinho Manoel, que também não puderam compartilhar dessa alegria.

## AGRADECIMENTOS

Ao nosso criador, e mantenedor da vida, por tudo que recebi ao longo dessa caminhada.

À minha mãe, origem, meio e fim de todas as minhas conquistas, exemplo de coragem, amor e força.

Ao meu pai e a meu irmão, pelo apoio e torcida.

À minha tia Dadaça, por todo o apoio, carinho e incentivo ao estudo ao longo de toda a minha vida estudantil.

Às minhas avós, por todo amor e carinho em todos os momentos da minha vida.

Às minhas tias Marlene, Goretti, Marília, Margarete e Miriam pelo amor, força e contribuições; e a meus tios Ovídio e Clóvis pelo apoio e exemplo de esforço, mostrando a importância e o potencial do estudo.

Aos meus grandes amigos, de uma vida inteira, Thalysson, Renato, Camila, Glícia, Clóvis Jr e Raíssa; e aos mais recentes, porém também muito importantes, Alberto, Jairo, Estéfane, Érica, Gilmar, Zodínio, João e Bruno por toda a ajuda, companheirismo e apoio em diversos momentos importantes.

Aos mais que amigos, que ultimamente deram muita força durante a redação da dissertação, me ajudando a vencer todos os obstáculos, Arthur e Hallyjus.

Ao meu amigo, colega e companheiro de muitas aventuras, Paulo Victor, por todo o apoio, conselhos, dicas, motivação, dentre outras coisas importantes, ao longo de todas as minhas conquistas desde o ingresso na universidade.

Aos meus mestres, sábios educadores e contribuintes à minha formação básica e técnica, sendo exemplo de esforço e dedicação à educação. Ao longo do período escolar, os professores Honório, José Válter, Lúcia e Cláudio; na vida acadêmica, dentre tantos exemplos a serem seguidos, os professores Luiz

Alessandro, Maria das Vitórias, Cynthia e o professor e amigo Roberto José, grande despertador do meu interesse pela área de estruturas e exemplo de dedicação à educação, em todos os seus aspectos. Também agradeço à professora Jaquelígia, por todo apoio e dedicação durante o período em que foi minha orientadora e ao professor Olavo e à professora Ada, excelentes profissionais, destacando-se também na coordenação do programa, os quais muito contribuíram para meu desempenho no PEC.

À professora Selma, que desde a graduação muito tem contribuído com minha vida acadêmica, através do BRAFITEC e disciplina ministrada em estruturas, pela disponibilidade e orientações ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

À professora, coordenadora, colega, amiga e orientadora Fernanda Mittelbach (um grande exemplo de dedicação e amor à educação) - única docente da qual nunca fui aluno em sala de aula, mas que, sem dúvida alguma, figura entre os mestres que mais contribuíram para minha formação acadêmica - por todo o aprendizado, apoio, orientações e experiências compartilhadas ao longo do meu período como aluno de mestrado e professor substituto.

Aos meus antigos superiores, hoje amigos, com quem tive a honra de trabalhar e aprender bastante durante o período de estágio e pesquisa; em empresas, Guilherme Fábio, Antônio Medeiros e Daniel Rabelo; na secretaria, Flávio Eduardo, José Maria e Antônio Tibúrcio.

Aos meus colegas de trabalho, servidores da UFRN, em especial à mestre Rafaella, pela notável atenção desde minha entrada no PEC, e ao senhor Wilson Martins, exemplo de profissional, que sempre me atendeu prontamente desde meu período como aluno de graduação.

A Dona Francisca e a Seu João, por terem me acolhido como filho, dando toda a assistência possível, no local onde morei durante o período do mestrado.

## SUMÁRIO

|  |     |
|--|-----|
| Lista de figuras.....  | xi  |
| Lista de tabelas.....  | xiv |
| Lista de equações.....   | xvi |
| Lista de siglas e abreviaturas.....  | xx  |
| Lista de símbolos.....   | xxi |
| CAPÍTULO 1 .....   | 1   |
| 1.1 Considerações Iniciais .....   | 1   |
| 1.2 Objetivos .....  | 3   |
| 1.2.1 Objetivos gerais.....  | 3   |
| 1.2.2 Objetivos específicos.....   | 3   |
| 1.3 Organização da dissertação.....  | 3   |
| CAPÍTULO 2 .....   | 4   |
| 2.1 Introdução .....   | 4   |
| 2.2 Hipóteses Básicas.....   | 4   |
| 2.3 Formulação Analítica para Cascas Axissimétricas.....                                       | 5   |
| 2.3.1 Teoria de Membrana versus Teoria de Flexão .....   | 6   |
| 2.3.2 Teoria de Membrana para Cascas Axissimétricas .....                                      | 6   |
| 2.3.3 Teoria de Flexão para Cascas Axissimétricas.....   | 13  |
| 2.4 Cascas Cilíndricas Axissimétricas.....   | 20  |
| 2.4.1 Equações Governantes para Deslocamentos .....  | 20  |
| 2.4.2 Solicitações de Bordo em Cascas Cilíndricas Circulares .....                             | 23  |
| 2.5 Solicitações de Bordo em Domos Axissimétricas.....   | 25  |
| 2.6 Formulação para Placas Axissimétricas.....   | 27  |
| 2.6.1 Expressões para placa apoiada com carga momento de bordo.....                            | 29  |
| 2.6.2 Expressões para placa apoiada com carregamento lateral uniformemente<br>distribuído..... | 30  |

|                                      |   |    |
|--------------------------------------|---|----|
| 2.6.3                                | Expressões para placa apoiada com carregamento lateral uniformemente distribuído.....   | 30 |
| 2.7                                  | Solicitação térmica em estruturas de superfície.....  | 31 |
| 2.8                                  | Análise de estruturas formadas por acoplamentos de peças estruturais .....  | 32 |
| 2.9                                  | Princípio dos Trabalhos Virtuais.....   | 32 |
| CAPÍTULO 3 .....                     |   | 35 |
| Formulação Numérica do Problema..... |   | 35 |
| 3.1                                  | Introdução .....  | 35 |
| 3.2                                  | Deslocamentos e funções de interpolação.....  | 37 |
| 3.3                                  | Relações deformação-deslocamento .....  | 38 |
| 3.4                                  | Relação Tensão-deformação .....   | 39 |
| 3.5                                  | Trabalho Virtual Interno.....   | 40 |
| 3.6                                  | Trabalho Virtual Externo.....   | 41 |
| 3.7                                  | Aplicação do PTV.....   | 43 |
| 3.8                                  | Parâmetros globais e sistema de equações.....   | 44 |
| CAPÍTULO 4 .....                     |   | 46 |
| 4.1                                  | Introdução .....  | 46 |
| 4.2                                  | Código computacional.....   | 46 |
| 4.2.1                                | Placas Circulares e Cascas Esféricas .....  | 46 |
| 4.2.2                                | Tipos de discretização .....  | 48 |
| 4.2.3                                | Integração numérica .....   | 49 |
| 4.2.4                                | Representação do erro .....   | 51 |
| 4.3                                  | Exemplos de validação .....   | 52 |
| 4.3.1                                | Peças isoladas e análise da discretização .....   | 53 |
| 4.3.1.1                              | Exemplo 1 – Casca Cilíndrica apoiada na base, submetida à pressão hidrostática e a uma força prescrita por unidade de comprimento ao longo do perímetro superior..... | 53 |

|                  |  |    |
|------------------|--|----|
| 4.3.1.2          | Exemplo 2 – Casca esférica apoiada na base sob atuação de seu peso próprio.....  | 57 |
| 4.3.1.3          | Exemplo 3 – Placa circular apoiada submetida a carregamento lateral uniforme, variação uniforme de temperatura e momento nos bordos.....   | 62 |
| 4.3.1.4          | Exemplo 4 – Casca cônica apoiada na base sob atuação de seu peso próprio.....  | 65 |
| 4.3.2            | Peças acopladas .....  | 70 |
| 4.3.2.1          | Exemplo 5 - Reservatório aberto, apoiado na base e composto por casca cilíndrica com placa circular na base, submetido ao peso próprio de seus elementos e à pressão hidrostática.....                         | 70 |
| 4.3.2.2          | Exemplo 6 – Estrutura formada por acoplamento entre casca cilíndrica apoiada na base e casca esférica na parte superior, submetida ao peso próprio dos elementos e a uma variação uniforme de temperatura..... | 75 |
| 4.3.2.3          | Exemplo 7 – Vaso de pressão apoiado, composto por casca cônica e placa circular na base, submetido a uma pressão interna.....  | 79 |
| CAPÍTULO 5 ..... |  | 84 |
| CAPÍTULO 6 ..... |  | 86 |

## LISTA DE FIGURAS

|   |    |
|---|----|
| Figura 2.1 Casca axissimétrica e seus parâmetros característicos.....   | 5  |
| Figura 2.2 Elemento infinitesimal de casca axissimétrica .....  | 7  |
| Figura 2.3 Geometria, carregamentos de domínio e esforços em casca cônica.....  | 9  |
| Figura 2.4 Elemento infinitesimal e deslocamentos após deformação em regime de membrana .....   | 11 |
| Figura 2.5 Raios e eixos de um elemento infinitesimal de casca .....  | 13 |
| Figura 2.6 Resultantes de tensão em elemento infinitesimal de casca.....  | 15 |
| Figura 2.7 Resultantes de tensão não-nulas (provenientes de carregamento que origina flexão) em um elemento de casca axissimétrica .....        | 16 |
| Figura 2.8 Elemento infinitesimal e deslocamentos após deformação em regime de flexão.....  | 19 |
| Figura 2.9 Casca cilíndrica axissimétrica .....   | 21 |
| Figura 2.10 Casca cilíndrica circular submetida a solicitações no bordo esquerdo...24   | 24 |
| Figura 2.11 Solicitações de bordo em domo esférico.....   | 26 |
| Figura 2.12 (a) Coordenadas cartesianas e polares de um elemento de placa (b) Esforços solicitantes em um elemento de placa axissimétrica ..... | 28 |
| Figura 2.13 Placa submetida a um momento por unidade de comprimento ao longo do bordo .....   | 29 |
| Figura 2.14 Placa circular simplesmente apoiada submetida a carregamento lateral uniformemente distribuído .....                                | 30 |
| Figura 2.15 Placa circular simplesmente apoiada submetida a carregamento lateral uniformemente distribuído .....                                | 30 |
| Figura 3.1 Elemento finito retilíneo.....   | 35 |
| Figura 3.2 (a) Representação contínua da casca (b) Representação da casca como um agrupamento de troncos de cone.....                           | 36 |

|  |    |
|--|----|
| Figura 3.3 (a) Deslocamentos nodais globais e campo de deslocamentos locais do elemento (b) Forças nodais prescritas e carregamentos de domínio prescritos ..... | 42 |
| Figura 3.4 Matriz de rigidez global da casca .....   | 44 |
| Figura 3.5 Montagem do vetor global de cargas nodais.....  | 44 |
| Figura 3.6 Sistema de equações lineares .....  | 45 |
| Figura 4.1 Placa axissimétrica maciça .....  | 47 |
| Figura 4.2 Exemplos de discretização (a) casca cônica (b) casca esférica .....   | 49 |
| Figura 4.3 Representação e dados do exemplo 4.3.1.1 .....  | 53 |
| Figura 4.4 Deslocamento $w$ na casca cilíndrica .....  | 56 |
| Figura 4.5 Diagrama de $M_x$ da casca cilíndrica.....  | 56 |
| Figura 4.6 Representação e dados do exemplo 4.3.1.2.....   | 57 |
| Figura 4.7 Deslocamento $w$ da casca esférica .....  | 60 |
| Figura 4.8 Diagrama de $M_x$ da casca esférica .....   | 61 |
| Figura 4.9 Diagrama de $N_x$ da casca esférica.....  | 61 |
| Figura 4.10 Representação e dados do exemplo 4.3.1.3.....  | 62 |
| Figura 4.11 Deslocamento $u$ na placa.....   | 64 |
| Figura 4.12 Diagrama de $M_r$ da placa .....   | 64 |
| Figura 4.13 Diagrama de $N_r$ da placa .....   | 65 |
| Figura 4.14 Representação e dados do exemplo 4.3.1.4.....  | 65 |
| Figura 4.15 Diagrama de $M_s$ da casca cônica .....  | 68 |
| Figura 4.16 Diagrama de $N_s$ da casca cônica.....   | 68 |
| Figura 4.17 Deslocamento $w$ na casca cônica .....   | 69 |
| Figura 4.18 Representação e dados do exemplo 4.3.2.1 .....   | 70 |
| Figura 4.19 Diagrama de $M_x$ da casca cilíndrica.....   | 73 |
| Figura 4.20 Diagrama de $N_x$ da casca cilíndrica.....   | 73 |
| Figura 4.21 Diagrama de $N_s$ da casca cônica.....   | 74 |

|   |    |
|---|----|
| Figura 4.22 Situação deformada do reservatório .....      | 74 |
| Figura 4.23 Representação e dados do exemplo 4.3.2.2..... | 75 |
| Figura 4.24 Diagrama de $N_\phi$ da casca esférica .....  | 77 |
| Figura 4.25 Diagrama de $M_x$ da casca cilíndrica.....    | 78 |
| Figura 4.26 Diagrama de $N_x$ da casca cilíndrica.....    | 78 |
| Figura 4.27 Situação deformada do acoplamento.....        | 79 |
| Figura 4.28 Representação e dados do exemplo 4.3.2.2..... | 79 |
| Figura 4.29 Diagrama de $M_s$ da casca cônica .....       | 82 |
| Figura 4.30 Diagrama de $N_s$ da casca cônica.....        | 82 |
| Figura 4.31 Diagrama de $M_r$ da placa circular.....      | 83 |
| Figura 4.32 Situação deformada do vaso de pressão .....   | 83 |

## LISTA DE TABELAS

|   |    |
|---|----|
| Tabela 4.1 Erro (%) da Matriz de Rigidez para 2 pontos de Gauss ..... | 50 |
| Tabela 4.2 Erro (%) da Matriz de Rigidez para 4 pontos de Gauss ..... | 51 |
| Tabela 4.3 Discretizações utilizadas no exemplo 4.3.1.1 .....         | 54 |
| Tabela 4.4 Valores máximos de $w$ .....                               | 54 |
| Tabela 4.5 Valores máximos de $M_x$ .....                             | 54 |
| Tabela 4.6 Discretizações utilizadas no exemplo 4.3.1.2.....          | 57 |
| Tabela 4.7 Valores máximos de $w$ .....                               | 58 |
| Tabela 4.8 Valores máximos de $M_\phi$ .....                          | 58 |
| Tabela 4.9 Valores máximos de $N_\phi$ .....                          | 58 |
| Tabela 4.10 Discretizações utilizadas no exemplo 4.3.1.3.....         | 62 |
| Tabela 4.11 Valores máximos de $u$ .....                              | 63 |
| Tabela 4.12 Valores máximos de $M_r$ .....                            | 63 |
| Tabela 4.13 Valores máximos de $N_r$ .....                            | 63 |
| Tabela 4.14 Discretizações utilizadas no exemplo 4.3.1.4.....         | 66 |
| Tabela 4.15 Valores máximos de $w$ .....                              | 66 |
| Tabela 4.16 Valores máximos de $M_s$ .....                            | 66 |
| Tabela 4.17 Valores máximos de $N_s$ .....                            | 67 |
| Tabela 4.18 Discretizações utilizadas no exemplo 4.3.1.4.....         | 71 |
| Tabela 4.19 Valores máximos de $w$ .....                              | 71 |
| Tabela 4.20 Valores máximos de $u$ .....                              | 71 |
| Tabela 4.21 Valores máximos de Momento .....                          | 71 |
| Tabela 4.22 Valores máximos de Resultante de Tensões .....            | 72 |
| Tabela 4.23 Discretizações utilizadas no exemplo 4.3.1.4.....         | 75 |
| Tabela 4.24 Valores máximos de $w$ .....                              | 76 |

|   |    |
|---|----|
| Tabela 4.25 Valores máximos de $u$ .....                      | 76 |
| Tabela 4.26 Valores máximos de Momento .....                  | 76 |
| Tabela 4.27 Valores máximos de Resultante de Tensões .....    | 76 |
| Tabela 4.28 Discretizações utilizadas no exemplo 4.3.1.4..... | 80 |
| Tabela 4.29 Valores máximos de $w$ .....                      | 80 |
| Tabela 4.30 Valores máximos de $u$ .....                      | 80 |
| Tabela 4.31 Valores máximos de Momento .....                  | 80 |
| Tabela 4.32 Valores máximos de Resultante de Tensões .....    | 81 |

**LISTA DE EQUAÇÕES**

|                     |    |
|---------------------|----|
| Equação (2.1).....  | 8  |
| Equação (2.2).....  | 8  |
| Equação (2.3).....  | 8  |
| Equação (2.4).....  | 8  |
| Equação (2.5).....  | 9  |
| Equação (2.6).....  | 9  |
| Equação (2.7).....  | 10 |
| Equação (2.8).....  | 10 |
| Equação (2.9).....  | 10 |
| Equação (2.10)..... | 11 |
| Equação (2.11)..... | 12 |
| Equação (2.12)..... | 12 |
| Equação (2.13)..... | 12 |
| Equação (2.14)..... | 12 |
| Equação (2.15)..... | 12 |
| Equação (2.16)..... | 12 |
| Equação (2.17)..... | 14 |
| Equação (2.18)..... | 14 |
| Equação (2.19)..... | 14 |
| Equação (2.20)..... | 15 |
| Equação (2.21)..... | 15 |
| Equação (2.22)..... | 17 |
| Equação (2.23)..... | 17 |

|                     |    |
|---------------------|----|
| Equação (2.24)..... | 17 |
| Equação (2.25)..... | 18 |
| Equação (2.26)..... | 18 |
| Equação (2.27)..... | 18 |
| Equação (2.28)..... | 19 |
| Equação (2.29)..... | 20 |
| Equação (2.30)..... | 20 |
| Equação (2.31)..... | 21 |
| Equação (2.32)..... | 22 |
| Equação (2.33)..... | 22 |
| Equação (2.34)..... | 22 |
| Equação (2.35)..... | 22 |
| Equação (2.36)..... | 22 |
| Equação (2.37)..... | 22 |
| Equação (2.38)..... | 23 |
| Equação (2.39)..... | 23 |
| Equação (2.40)..... | 23 |
| Equação (2.41)..... | 24 |
| Equação (2.42)..... | 24 |
| Equação (2.43)..... | 25 |
| Equação (2.44)..... | 25 |
| Equação (2.45)..... | 25 |
| Equação (2.46)..... | 27 |
| Equação (2.47)..... | 27 |
| Equação (2.48)..... | 28 |
| Equação (2.49)..... | 29 |

|                     |    |
|---------------------|----|
| Equação (2.50)..... | 29 |
| Equação (2.51)..... | 30 |
| Equação (2.52)..... | 30 |
| Equação (2.53)..... | 31 |
| Equação (2.54)..... | 31 |
| Equação (2.55)..... | 31 |
| Equação (2.56)..... | 33 |
| Equação (2.57)..... | 33 |
| Equação (2.58)..... | 33 |
| Equação (2.59)..... | 34 |
| Equação (3.1).....  | 37 |
| Equação (3.2).....  | 37 |
| Equação (3.3).....  | 37 |
| Equação (3.4).....  | 37 |
| Equação (3.5).....  | 38 |
| Equação (3.6).....  | 38 |
| Equação (3.7).....  | 38 |
| Equação (3.8).....  | 38 |
| Equação (3.9).....  | 38 |
| Equação (3.10)..... | 38 |
| Equação (3.11)..... | 39 |
| Equação (3.12)..... | 39 |
| Equação (3.13)..... | 39 |
| Equação (3.14)..... | 39 |
| Equação (3.15)..... | 39 |
| Equação (3.16)..... | 40 |

|                     |    |
|---------------------|----|
| Equação (3.17)..... | 40 |
| Equação (3.18)..... | 40 |
| Equação (3.19)..... | 40 |
| Equação (3.20)..... | 40 |
| Equação (3.21)..... | 40 |
| Equação (3.22)..... | 41 |
| Equação (3.23)..... | 41 |
| Equação (3.24)..... | 41 |
| Equação (3.25)..... | 42 |
| Equação (3.26)..... | 42 |
| Equação (3.27)..... | 43 |
| Equação (3.28)..... | 43 |
| Equação (3.29)..... | 43 |
| Equação (3.30)..... | 43 |
| Equação (3.31)..... | 43 |
| Equação (3.32)..... | 43 |
| Equação (3.33)..... | 43 |
| Equação (3.34)..... | 45 |
| Equação (3.35)..... | 45 |
| Equação ( 4.1)..... | 51 |
| Equação ( 4.2)..... | 52 |
| Equação ( 4.3)..... | 52 |

## LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

MDF - Método das Diferenças Finitas

MDFE - Método das Diferenças Finitas Energéticas

MEC - Método dos Elementos de Contorno

MEF - Método dos Elementos Finitos

MEFG - Método dos Elementos Finitos Generalizados

PTV - Princípio dos Trabalhos Virtuais

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Fundamentação analítica

$E$  - módulo de Elasticidade Longitudinal

$G$  - módulo de Elasticidade Transversal

$D$  - rigidez Flexional

$\nu$  - coeficiente de Poisson

$t$  - espessura

$s$  - distância medida ao longo da geratriz em casca cônica

$x, y, z$  - comprimentos, coordenadas retangulares

$r$  - raio

$r, \theta$  - coordenadas polares

$r_x, r_y$  - raios de curvatura da superfície média nos planos  $xz$  e  $yz$

$\alpha$  - ângulo, coeficiente de dilatação térmica

$\beta$  - ângulo, parâmetro geométrico de casca cilíndrica

$\phi$  - ângulo

$u, v, w$  - deslocamentos nas direções  $x, y$  e  $z$ ; deslocamentos axial, tangencial e radial na superfície das cascas

$\delta u$  - variação da componente de deslocamento  $u$  segundo  $x$

$\delta v$  - variação da componente de deslocamento  $v$  segundo  $y$

$\delta w$  - variação da componente de deslocamento  $w$  segundo  $z$

$p$  - intensidade de carga transversal distribuída por unidade de área, pressão

$M$  - carga momento externa por unidade de comprimento

$Q$  – carga força externa transversal por unidade de comprimento

$N$  – carga força externa normal por unidade de comprimento

$T$  – temperatura

$N_x, N_y$ - esforços normais por unidade de comprimento nas direções  $x$  e  $y$

$N_{xy}$  - esforço cortante por unidade de comprimento no plano  $xy$ , paralelo ao eixo  $y$

$N_r, N_\theta$  – esforços normais radial e tangencial por unidade de comprimento

$N_\phi$ - esforço normal por unidade de comprimento no plano do paralelo

$N_{\phi\theta}$ - esforço cortante por unidade de comprimento no plano axial e paralelo ao eixo  $y$  de casca cilíndrica

$N_s$ - esforço normal por unidade de comprimento no plano do paralelo de casca cônica

$Q_x, Q_y$ - esforços cortantes por unidade de comprimento nos eixos  $x$  e  $y$

$N_r, N_\theta$  – esforços cortantes radial e tangencial por unidade de comprimento

$M_x, M_y$ - momentos fletores por unidade de comprimento nos eixos  $x$  e  $y$

$M_{xy}$  – momento torsor por unidade de comprimento no eixo  $x$

$M_r, M_\theta$  – momentos fletores radial e tangencial por unidade de comprimento

$M_{r\theta}$  momento torsor por unidade de comprimento no paralelo

$M_s$ - momento fletor meridional por unidade de comprimento no paralelo de casca cônica

$Q_x, Q_y$ - esforços cortantes por unidade de comprimento nos eixos  $x$  e  $y$

$Q_r, Q_\theta$  – esforços cortantes radial e tangencial por unidade de comprimento

$Q_\theta$  - esforço cortante por unidade de comprimento no plano perpendicular ao plano axial de casca cilíndrica

$Q_\phi$  - esforço cortante meridional por unidade de comprimento no plano do paralelo

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ - componentes de tensão normal nas direções x, y e z

$\sigma_r, \sigma_\theta$  - componentes de tensão normal radial e tangencial

$\sigma_\phi$  – componente de tensão normal meridional no plano do paralelo

$\tau_{xy}, \tau_{yx}$ - componentes de tensão cisalhante no plano xy, paralelas às direções x e y

$\tau_{xz}, \tau_{zx}$ - componentes de tensão cisalhante no plano xz, paralelas às direções x e z

$\tau_{yz}, \tau_{zy}$ - componentes de tensão cisalhante no plano yz, paralelas às direções y e z

$\tau_{r\theta}$  - componentes de tensão cisalhante no plano radial e paralela ao plano tangencial

$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{r\theta}$ - Deformações Angulares nos planos xy, yz, xz e r $\theta$

$\chi$  - Mudança de curvatura em cascas

$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ - Deformações Específicas nas direções x, y e z

$\epsilon_r, \epsilon_\theta, \epsilon_\phi$ - Deformações Específicas radial, tangencial, e do meridiano

$\rho_x, \rho_y, \rho_z$ - componentes nas direções x, y e z das forças de superfície que atuam na região Sf do contorno onde são prescritas forças

$B_x, B_y, B_z$ - componente das forças de volume nas direções x, y e z

$\delta W_i$  - trabalho virtual das forças internas

$\delta W_e$  - trabalho virtual das forças externas

### **Formulação numérica**

$r(s)$  – raio ao longo do elemento finito

$r_1, r_2$ - raios inicial e final do elemento finito

$L$  – comprimento do elemento finito

$v^e$  – volume do elemento finito

$\mathbf{u}^e$  – vetor de deslocamentos globais

$\overline{\mathbf{u}}_i^e$  – vetor de deslocamentos locais do nó  $i$

$\mathbf{T}$  - matriz de rotação

$u_i, w_i, \beta_i$  - deslocabilidades do nó  $i$  nas direções globais

$\overline{\mathbf{u}}, \overline{\mathbf{w}}$  - campos de deslocamentos de elemento finito no sistema local

$\overline{\mathbf{u}}(s), \overline{\mathbf{w}}(s)$  – funções de interpolação linear de classe  $C^0$  e cúbica de classe  $C^1$ , para representação do campo de deslocamentos locais

$N_i^u(s)$  - interpolação linear

$N_i^w(s), N_i^\beta(s)$  - interpolação Hermitiana de ordens 0 e 1

$\overline{\mathbf{u}}$  – matriz de interpolação de deslocamentos locais

$\mathbf{u}$  – matriz de interpolação de deslocamentos globais

$\boldsymbol{\varepsilon}$  – vetor de relação deformação-deslocamento

$\mathbf{B}$  – matriz de deformação

$\mathbf{D}$  – matriz de elasticidade

$\boldsymbol{\sigma}$  – vetor das resultantes de tensão

$\boldsymbol{\sigma}^*$  – vetor de tensões antes da integração ao longo a espessura

$\Delta_t$  – função linear de gradiente de temperatura ao longo da espessura

$\boldsymbol{\sigma}_t$  – vetor de solicitações térmicas

$\mathbf{F}_t^e$  - vetor de ações nodais equivalentes devidas à atuação de um gradiente de temperatura ao longo da espessura nas direções globais

$\overline{\mathbf{N}}_s, \overline{\mathbf{Q}}_s, \overline{\mathbf{M}}_s$  – carregamentos nodais

$\bar{\mathbf{F}}_r^e$  - vetores de forças nodais nas direções locais multiplicadas pelo raio nas direções locais

$\mathbf{F}_r^e$  - vetores de forças nodais multiplicadas pelo raio nas direções globais

$\bar{\mathbf{f}}$  - vetor de cargas distribuídas aplicadas no domínio do elemento

$p_s, p_t$  - taxas de carregamento paralela e transversal à direção do elemento finito

$\mathbf{F}_{eq}^e$  - vetor de forças nodais equivalente multiplicadas pelo raio

$\mathbf{F}_r^e$  - vetor de forças nodais em coordenadas globais multiplicadas pelo raio

$\mathbf{K}^e$  - matriz de rigidez do elemento finito em coordenadas globais

$\bar{\mathbf{K}}$  - matriz de rigidez do elemento finito em coordenadas globais

$\mathbf{K}^g$  - matriz de rigidez global da estrutura

$\mathbf{F}^g$  – vetor de cargas global da estrutura

$\mathbf{U}$  – vetor de deslocamentos globais da estrutura

$\bar{\mathbf{F}}_t^e$  - vetor de ações nodais equivalentes devidas à atuação de um gradiente de temperatura ao longo da espessura nas direções locais

$\bar{\mathbf{F}}_{el}^e$  - vetor de forças nodais equivalentes nas direções locais

$\bar{\mathbf{F}}_r^e$  - vetor de forças nodais nas direções locais

### **Análise de Resultados**

$E_{rel}$  – erro relativo

$E_{rel(\%)}$  – erro relativo em porcentagem

$E_{abs}$  – erro absoluto

## CAPÍTULO 1

# Introdução

### 1.1 Considerações Iniciais

As estruturas de superfície delgadas possuem uma variedade de aplicações no âmbito das engenharias. Como exemplos de utilização de estruturas cascas, podem ser citados os domos, os cascos de navio e os balões dirigíveis; enquanto as lajes, os muros de contenção e os discos de turbina são aplicações de placas. Além disso, as estruturas bi-dimensionais também podem figurar associadas entre si, como em vasos de pressão, silos e reservatórios.

Em face de sua relevância, as estruturas de superfície têm sido um tema amplamente estudado. Na literatura clássica, em trabalhos relevantes como os de Ugural (1981), Timoshenko (1959), Belluzzi (1980) e Flügge (1967), elas são tratadas com uma abordagem, sobretudo, analítica.

No entanto, o fato de que soluções analíticas podem resultar bastante complexas (ou até mesmo de impossível determinação) e, por outro lado, o advento do uso de computação, nos processos de resolução, motivaram a busca por soluções numéricas para os problemas envolvendo cascas e placas. Dessa forma, podem-se citar como exemplos de ferramentas numéricas utilizadas na geração de modelos computacionais, o Método das Diferenças Finitas (MDF), o Método dos Elementos de Contorno (MEC) e o Método dos Elementos Finitos (MEF), sendo este último, talvez, o mais difundido entre eles.

Em se tratando da utilização de MEF em problemas de cascas delgadas, conforme citam Bhatia e Sekhon (1999), muitos elementos triangulares planos, retangulares, cilíndricos e de dupla curvatura estão disponíveis na literatura publicada. No que diz respeito, especificamente, às cascas delgadas axissimétricas, Soriano (2003) relata que Grafton e Strome (1963) apresentaram, pioneiramente, a

discretização de cascas axissimétricas em troncos de cone (correspondentes a elementos finitos retilíneos segundo um meridiano da casca) e que Jones e Strome modificaram a referida concepção considerando elementos curvilíneos segundo o meridiano.

Ainda de acordo com Bhatia e Sekhon (1999), Percy *et al.*, Klein, Jones e Strome e Hansteen estenderam a abordagem para cargas assimétricas e Ross (1984) desenvolveu um elemento de casca cilíndrica e um elemento de casca axissimétrico de curvatura de meridiano constante.

As placas axissimétricas, as únicas que fazem parte do escopo desta dissertação, são abordadas em trabalhos como Ross (1974), que aborda elementos finitos axissimétricos para placas e cascas cilíndricas, Vullo (2010), que propõem um novo método analítico para avaliação de tensões e deformações elásticas em placas axissimétricas sólidas ou anulares e Suarez *et al.* (2012), que investiga o desempenho da aproximação de uma família de funções de forma polinomiais racionais compostas, as quais são enriquecidas por um conjunto de monômios de ordem  $p$  para obtenção de aproximações de ordem superior. No presente trabalho, a análise numérica das placas será desenvolvida a partir da mesma formulação apresentada em Zienkiewicz (2000) para elemento retilíneo de cascas axissimétricas.

Outros aspectos da utilização do MEF em problemas de estruturas axissimétricas também vêm sendo amplamente estudados. Como exemplos, podem ser citados os trabalhos de Sekhon e Bhatia (2000), que tratam da geração de matriz de rigidez exata de elementos esféricos de casca; Barros (2002) que aborda a utilização de métodos sem malha e de Métodos dos Elementos Finitos Generalizados; Nirschl (2005) que combina o Método dos Elementos Finitos com técnicas não-convencionais de enriquecimento da aproximação; Mangini (2006) que utiliza o Método dos Elementos Finitos Generalizados para análise de estruturas em casca de revolução e Vieira (2007) que faz uma comparação entre MEF e Método das Diferenças Finitas Energéticas (MDFE) na análise de cascas cilíndricas axissimétricas.

## **1.2 Objetivos**

### **1.2.1 Objetivos gerais**

A presente dissertação tem por objetivo geral apresentar o potencial da utilização de uma formulação numérica com elemento finito retilíneo na análise de estruturas de superfície axissimétricas, sendo estas compostas por peças isoladas ou por membros compatibilizados entre si.

### **1.2.2 Objetivos específicos**

O trabalho apresenta como objetivos específicos:

1) Elaborar e implementar um código computacional para análise de estruturas de superfície delgadas axissimétricas utilizando-se uma formulação numérica baseada no MEF, a qual considera um elemento retilíneo inclinado.

2) Através do código desenvolvido, analisar e quantificar os efeitos das ações externas nas peças estruturais, em termos de deslocamentos e esforços internos, levando em conta suas condições de vinculação, comparando os resultados obtidos com soluções analíticas, visando à sua validação.

## **1.3 Organização da dissertação**

O texto da presente dissertação está organizado em 6 capítulos. No Capítulo 2, apresenta-se a fundamentação analítica do problema, obtida da literatura, a qual servirá de base tanto para obtenção dos resultados analíticos utilizados na dissertação quanto para formulação numérica do capítulo subsequente.

Em seguida, no Capítulo 3, desenvolve-se a formulação numérica que será utilizada na elaboração do código computacional e, no Capítulo 4, são apresentados e analisados os resultados obtidos através do referido código.

Por fim, no Capítulo 5, abordam-se as conclusões e propostas de continuidade para a pesquisa e, no Capítulo 6, são listadas as referências utilizadas.

## CAPÍTULO 2

# Fundamentação Analítica

### 2.1 Introdução

Neste capítulo, será apresentada a fundamentação analítica que servirá de base para o desenvolvimento da formulação numérica e a obtenção dos resultados analíticos utilizados na validação dos resultados numéricos fornecidos pelo código computacional desenvolvido.

Inicialmente, são descritas as hipóteses básicas adotadas. Em seguida, são apresentadas as formulações para cascas e placas axissimétricas e aborda-se compatibilidade entre os elementos isolados quando de seu acoplamento. O capítulo se encerra com uma abordagem sobre o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), que servirá de base para a formulação numérica apresentada no capítulo subsequente.

### 2.2 Hipóteses Básicas

No presente trabalho serão analisadas cascas e placas axissimétricas delgadas e de espessura constante e as seguintes hipóteses básicas serão adotadas:

1 - Admite-se que as placas e cascas são delgadas, apresentam linearidade geométrica e são constituídas por material homogêneo, isotrópico e com linearidade física (obedece à lei de Hooke generalizada).

2 - Linhas retas, normais à superfície média antes da deformação, permanecem retas, normais à superfície média e inalteradas em seu comprimento após a deformação. (hipóteses de Kirchhoff da Teoria de Placas e de Kirchhoff-Love da Teoria de Cascas).

3 - A componente de tensão normal (geralmente designada por  $\sigma_z$ ) na direção perpendicular à superfície média é pequena em relação às demais componentes de tensões normais e pode ser desprezada.

### 2.3 Formulação Analítica para Cascas Axissimétricas

A Figura 2.1 ilustra um exemplo geral de casca axissimétrica e seus parâmetros característicos: eixo de revolução, meridiano, paralelo, raios e respectivos ângulos. A seguir, serão abordados os tipos de esforços predominantes em face das solicitações (de membrana ou de flexão) e, posteriormente, apresentadas as equações diferenciais a partir das quais se obtém as expressões de cálculo de resultante de tensões, deslocamentos e deformações em problemas de estruturas axissimétricas.

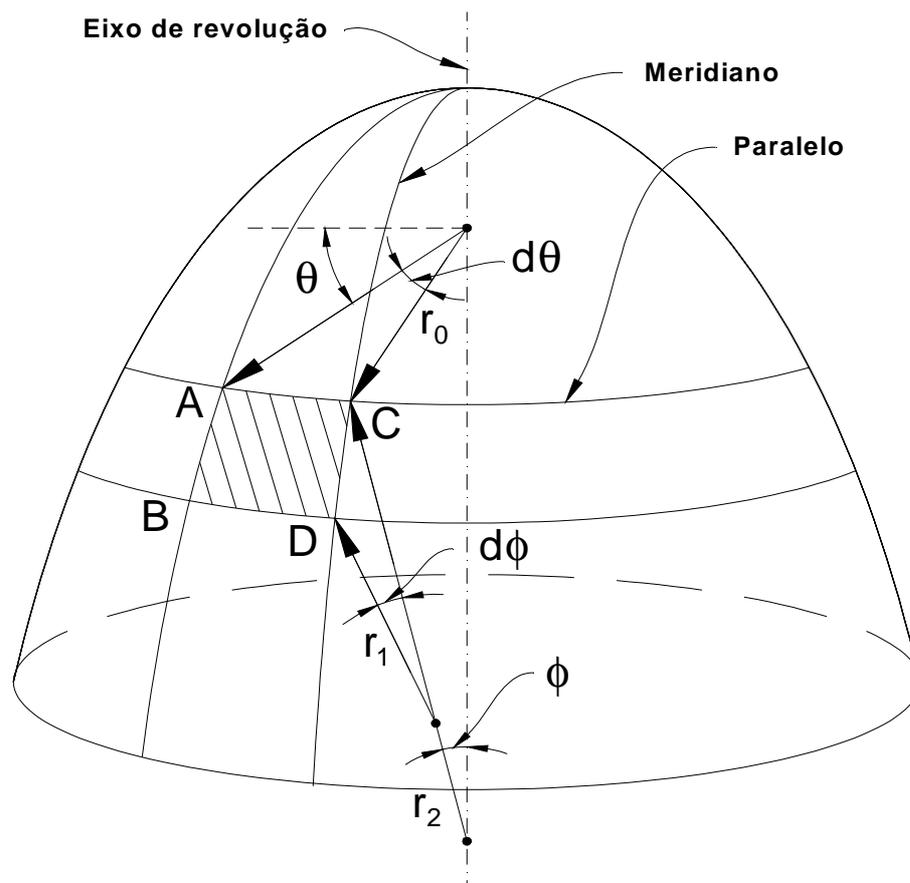


Figura 2.1 Casca axissimétrica e seus parâmetros característicos

### 2.3.1 Teoria de Membrana versus Teoria de Flexão

A análise de estruturas em casca geralmente envolve duas teorias distintas, comumente aplicadas, a Teoria de Membrana e a Teoria de Flexão. A primeira normalmente se aplica a uma grande extensão do domínio da casca. Uma membrana é incapaz de absorver esforços do tipo momento de flexão e força cortante, transmitindo apenas esforços de tração ou compressão na direção da superfície média.

A Teoria de Flexão (ou Teoria Geral) inclui os efeitos da flexão e, dessa forma, permite o tratamento de descontinuidades na distribuição de tensões, as quais ocorrem em uma região limitada, no entorno de uma carga ou de uma descontinuidade estrutural. Esta teoria geralmente compreende a solução de membrana corrigida nas áreas onde os efeitos de descontinuidade são pronunciados. Entretanto, é importante explicar que não se obtém um melhoramento da solução de membrana, mas a possibilidade de analisar as tensões e deformações devido às solicitações de bordo ou cargas concentradas, o que não poderia ser feito pela aplicação da referida teoria isolada.

Deve-se salientar ainda que os esforços de membrana são independentes da flexão e também que são totalmente determinados pelas condições de equilíbrio estático.

### 2.3.2 Teoria de Membrana para Cascas Axissimétricas

#### 2.3.2.1 Esforços de Membrana

Em cascas axissimétricas submetidas a carregamentos distribuídos no domínio, considera-se a não ocorrência de esforços cisalhantes e, portanto, há somente dois tipos de esforços (por unidade de comprimento) como incógnitas a se determinar,  $N_\theta$  e  $N_\phi$ . As equações para cálculo desses esforços são obtidas a partir de duas condições de equilíbrio.

A Figura 2.2 mostra diferentes vistas de um elemento infinitesimal isolado a partir de uma casca axissimétrica, como a da Figura 2.1. Pela condição de simetria, os esforços de membrana e o carregamento não variam com a coordenada  $\theta$ . Os

carregamentos distribuídos no domínio são representados pelas componentes  $p_y$  e  $p_z$ , nas direções  $y$  e  $z$ , respectivamente.

No equilíbrio de forças na direção  $z$  devem ser consideradas as componentes provenientes tanto do carregamento de domínio quanto do carregamento de contorno nesta direção.

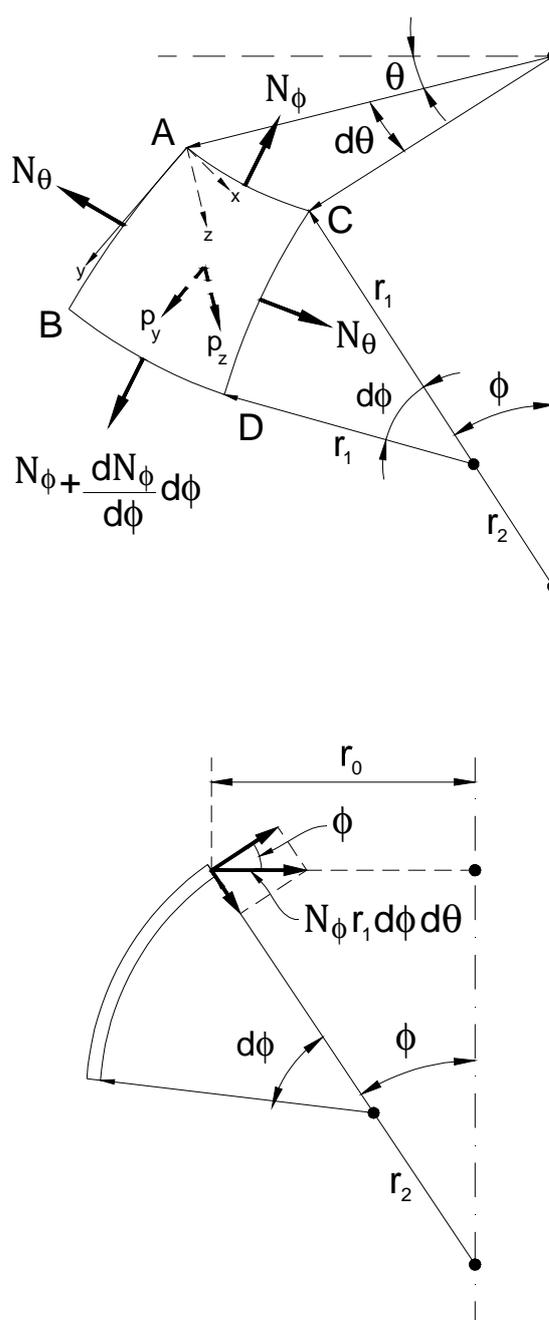


Figura 2.2 Elemento infinitesimal de casca axissimétrica

Dessa forma, obtém-se:

$$N_{\phi}r_0 + N_{\theta}r_1 \sin \phi + p_z r_0 r_1 = 0 \quad (2.1)$$

Esta expressão pode ser rerepresentada como:

$$\frac{N_{\phi}}{r_1} + \frac{N_{\theta}}{r_2} = -p_z \quad (2.2)$$

O equilíbrio de forças na direção y fornece:

$$\frac{d}{d\phi} (N_{\phi}r_0) - N_{\theta}r_1 \cos \phi = -p_y r_0 r_1 \quad (2.3)$$

Utilizando-se (2.2) em (2.3) e fazendo-se as devidas manipulações, obtém-se, finalmente:

$$N_{\phi} = -\frac{1}{r_2 \sin^2(\phi)} \left[ \int r_1 r_2 (p_z \cos \phi + p_y \sin \phi) \sin \phi d\phi + c \right] \quad (2.4)$$

Onde a constante  $c = r_0 \sin \phi_0 N_{\phi_0}$ , representa os efeitos das cargas que podem ser aplicadas na casca. Dessa forma, se a casca for aberta no topo,  $c$  associa-se à solitação de bordo prescrita  $N_{\phi_0}$ , e se for fechada,  $r_0 = 0$  e, portanto,  $c = 0$ .

Assim, através de (2.2) e (2.4) é possível se determinar  $N_{\phi}$  e  $N_{\theta}$  cujos valores, quando divididos pela espessura, resultam nas tensões normais  $\sigma_{\phi}$  e  $\sigma_{\theta}$ . A seguir, são desenvolvidas aplicações destas expressões em cascas axissimétricas de formas usuais.

### 2.3.2.2 Resultante de Tensões na casca esférica

Para cascas esféricas, pode-se utilizar o conceito de raio médio, dado por  $a = r_1 = r_2$ . Dessa forma, através de (2.2) e (2.4), obtém-se para as resultantes de tensões:

$$N_\phi + N_\theta = -p_z a$$

$$N_\phi = -\frac{1}{a \sin^2(\phi)} \left[ \int a^2 (p_z \cos \phi + p_y \sin \phi) \sin \phi \, d\phi + c \right] \quad (2.5)$$

A partir destas equações, substituindo-se os valores dos carregamentos de domínio e das cargas prescritas, obtém-se as expressões de cálculo de  $N_\phi$  e  $N_\theta$  ao longo da casca esférica.

### 2.3.2.3 Resultante de tensões na casca cônica

Neste tipo de geometria, o ângulo  $\phi$  é constante (sendo  $r_1 = \infty$ ) e não pode ser usado como coordenada do meridiano. Utiliza-se, portanto, a coordenada  $s$  (geralmente medida a partir do vértice) para referenciar os pontos da superfície média ao longo da linha geratriz (Figura 2.3).

Assim, obtém-se para o comprimento de um elemento meridional:

$$ds = r_1 d\phi \Rightarrow \frac{d}{d\phi} = r_1 \frac{d}{ds} \quad (2.6)$$

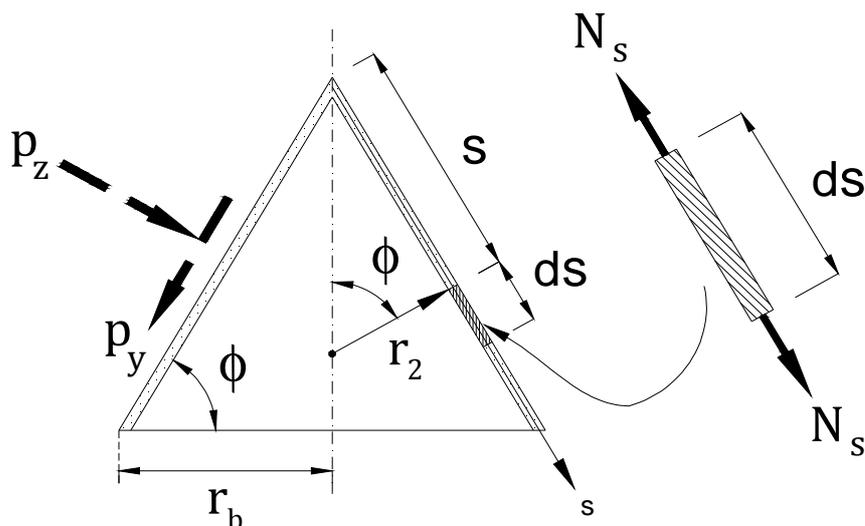


Figura 2.3 Geometria, carregamentos de domínio e esforços em casca cônica

Tem-se ainda:

$$\begin{aligned}r_b &= L \cos \phi \\r_2 &= s \cot \phi \\N_\phi &= N_s\end{aligned}\tag{2.7}$$

Essas relações, sendo introduzidas nas equações (2.2) e (2.3), após integração resultam em:

$$\begin{aligned}N_\theta &= -\frac{p_z r_b}{\sin \phi} \\N_s &= -\frac{1}{s} \int (p_y + p_z \cot \phi) s ds\end{aligned}\tag{2.8}$$

onde  $r_b$  é o raio médio da base e as componentes  $p_y$  e  $p_z$  se referem às direções  $s$  e radial, respectivamente.

#### 2.3.2.4 Resultante de tensões na casca cilíndrica circular

Para se obter as expressões de cálculo das resultantes de tensões da casca cilíndrica circular, pode-se fazer  $\phi = \pi/2$ ,  $p_z = p_r$  e raio médio  $a = r_b$  (constante) nas equações para casca cônica, donde se obtém:

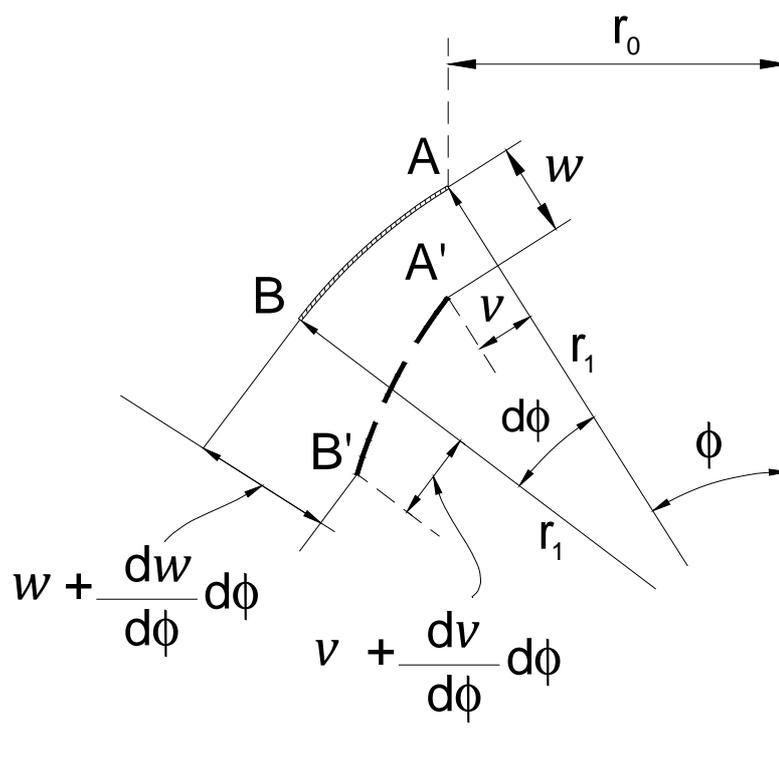
$$\begin{aligned}N_s = N_x &= -\int p_x dx + c_1 \\N_\theta &= -p_r a\end{aligned}\tag{2.9}$$

onde  $c_1$  se é determinada através de condições de contorno.

#### 2.3.2.5 Deformações e Deslocamentos em Regime de Membrana

Considere-se o segmento  $AB$ , de comprimento  $r_1 d\phi$  na direção do meridiano, representativo de um elemento infinitesimal em uma casca não restringida (Figura 2.4).

Os deslocamentos na direção da tangente ao meridiano e na direção normal à superfície média serão denominados, respectivamente,  $v$  e  $w$ . Após a deformação,  $AB$  é deslocado para a posição  $A'B'$ . Na análise aqui desenvolvida, será empregada a hipótese de pequenas mudanças de configuração, de modo que termos infinitesimais de ordem superior serão desprezados.



**Figura 2.4** Elemento infinitesimal e deslocamentos após deformação em regime de membrana

A deformação total sofrida por um elemento infinitesimal de comprimento  $r_1 d\phi$  pode ser entendida como um aumento de  $(dv/d\phi)d\phi$  (devido aos deslocamentos tangenciais) e uma diminuição de  $w d\phi$  (originada pelo deslocamento radial  $w$ ) neste.

A componente de deformação específica meridional  $\epsilon_\phi$ , que corresponde à deformação total por unidade de comprimento do elemento  $AB$  é, portanto, dada por:

$$\epsilon_\phi = \frac{1}{r_1} \frac{dv}{d\phi} - \frac{w}{r_1} \quad (2.10)$$

Da mesma maneira, pode-se tratar a deformação de um elemento de círculo (que corresponde a um paralelo). É possível mostrar que o aumento no raio  $r_0$  da circunferência, produzido pelos deslocamentos  $v$  e  $w$  vale  $v\cos\phi - w\sin\phi$ .

Uma vez que a circunferência do paralelo se expande proporcionalmente ao seu raio, obtém-se, para a deformação específica circunferencial:

$$\varepsilon_\theta = (v\cos\phi - w\sin\phi) \quad (2.11)$$

sendo  $r_0 = r_2 \sin\phi$ , a expressão (2.11) pode ser reescrita como:

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r_2} (v\cot\phi - w) \quad (2.12)$$

Manipulando-se algebricamente (2.10) e (2.12), chega-se à seguinte equação:

$$\frac{dv}{d\phi} - v\cot\phi = r_1\varepsilon_\phi - r_2\varepsilon_\theta \quad (2.13)$$

As componentes de deformação específica estão relacionadas às tensões de membrana pela Lei de Hooke, de modo que:

$$\varepsilon_\phi = \frac{1}{E} (\sigma_\phi - \nu\sigma_\theta) \quad (2.14)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal do material da casca.

Introduzindo-se (2.14) em (2.13), obtém-se:

$$\frac{dv}{d\phi} - v\cot\phi = \frac{1}{E} [\sigma_\phi(r_1 + \nu r_2) - \sigma_\theta(r_2 + \nu r_1)] = f(\phi) \quad (2.15)$$

Observa-se que os deslocamentos de uma casca axissimétrica podem ser determinados integrando-se (2.15), quando as tensões de membrana são conhecidas. A referida equação tem como solução:

$$v = \left[ \int \frac{f(\phi)}{\sin\phi} d\phi + c^* \right] \sin\phi \quad (2.16)$$

A constante de integração  $c^*$  é determinada a partir de uma condição de contorno. Uma vez determinada a expressão de  $v$ , a equação para cálculo de  $w$  é obtida a partir de (2.10) ou (2.12).

### 2.3.3 Teoria de Flexão para Cascas Axissimétricas

Através da Teoria de Membrana nem sempre é possível se obter soluções compatíveis com as condições reais de deformação. A referida teoria também apresenta limitações quanto à determinação do estado de tensões nos contornos da casca. Esses problemas são resolvidos através da aplicação da Teoria de Flexão, a qual considera a atuação simultânea de esforços de membrana, esforços cortantes e momentos de flexão na casca.

#### 2.3.3.1 Equações Constitutivas

Considerem-se os eixos e raios ilustrados na Figura 2.6.

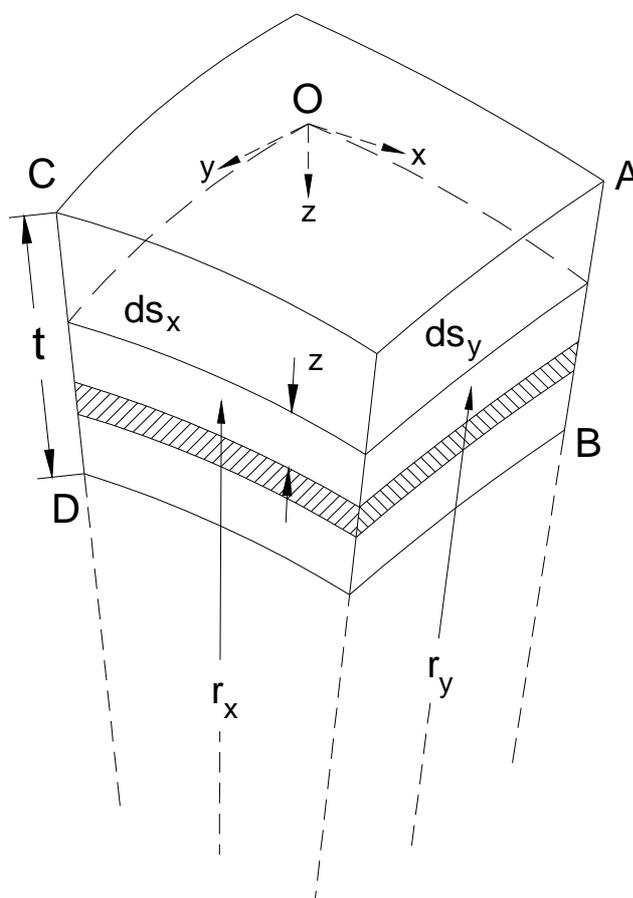


Figura 2.5 Raios e eixos de um elemento infinitesimal de casca

As relações tensão-deformação (para  $\sigma_z = 0$ ) são dadas pela Lei de Hooke generalizada:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x)\end{aligned}\quad (2.17)$$

$$\tau_{xy} = \gamma_{xy}G$$

onde  $\tau_{xy}$  é a tensão cisalhante (paralela à direção de  $y$ ) no plano  $xy$ ,  $\gamma_{xy}$  é a deformação angular no plano  $xy$  e os parâmetros  $G$  e  $\nu$  são, respectivamente, o módulo de elasticidade transversal e o coeficiente de Poisson do material da estrutura.

Sendo  $\varepsilon_{x_0}$  a deformação unitária da superfície média na direção  $x$ ,  $\chi_x$  e  $\chi_y$  as mudanças de curvatura da superfície média em relação aos raios  $r_x$  e  $r_y$ , respectivamente, e  $\chi_{xy}$  a distorção da superfície média, tem-se, segundo Ugural (1981):

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \varepsilon_{x_0} - z\chi_x \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_{y_0} - z\chi_y\end{aligned}\quad (2.18)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy_0} - 2z\chi_{xy}$$

Substituindo-se (2.18) em (2.17), obtém-se:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_{x_0} + \nu\varepsilon_{y_0} - z(\chi_x + \nu\chi_y)] \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_{y_0} + \nu\varepsilon_{x_0} - z(\chi_y + \nu\chi_x)] \\ \tau_{xy} &= (\gamma_{xy_0} - 2z\chi_{xy})G\end{aligned}\quad (2.19)$$

Finalmente, obtém-se as seguintes equações constitutivas, de modo a relacionar as resultantes de tensão (ilustradas na Figura 2.6) e deformações:

$$N_x = \frac{Et}{1 - \nu^2} [\varepsilon_{x0} + \nu\varepsilon_{y0}]$$

$$N_y = \frac{Et}{1 - \nu^2} [\varepsilon_{y0} + \nu\varepsilon_{x0}]$$

$$N_{xy} = N_{yx} = \frac{\gamma_{xy0} Et}{2(1 - \nu)} \quad (2.20)$$

$$M_x = -D(\chi_x + \nu\chi_y)$$

$$M_y = -D(\chi_y + \nu\chi_x)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = -D(1 - \nu)\chi_{xy}$$

onde  $t$  é a espessura e  $D$  a rigidez flexional da casca, definida por:

$$D = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (2.21)$$

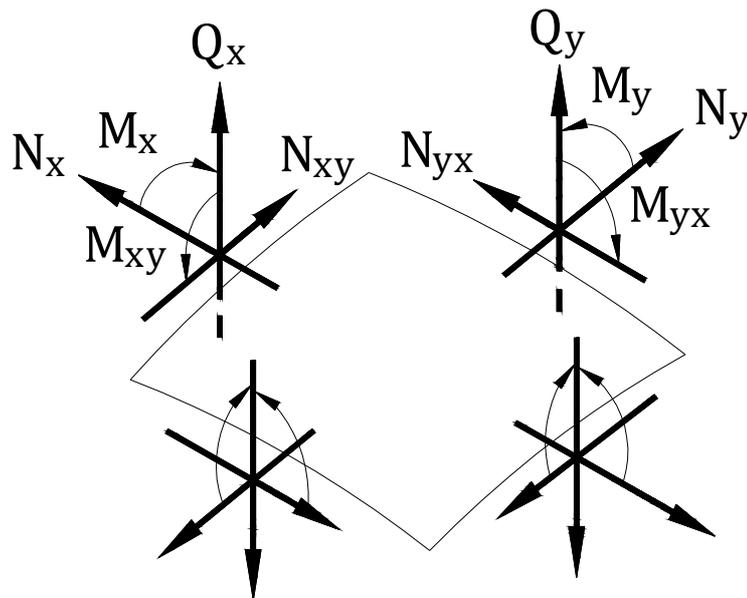


Figura 2.6 Resultantes de tensão em elemento infinitesimal de casca

### 2.3.3.2 Equações de Equilíbrio

Considere-se uma casca axissimétrica de forma geral. As resultantes de tensões atuando em um ponto da referida casca são apresentadas na Figura 2.7.

Pelas condições de assimetria, somente as resultantes  $Q_\phi$ ,  $M_\theta$ ,  $M_\phi$ ,  $N_\theta$  e  $N_\phi$  não se anulam, e os esforços normais  $N_\theta$  e os momentos fletores  $M_\theta$  são independentes de  $\theta$  (Ugural, 1981).

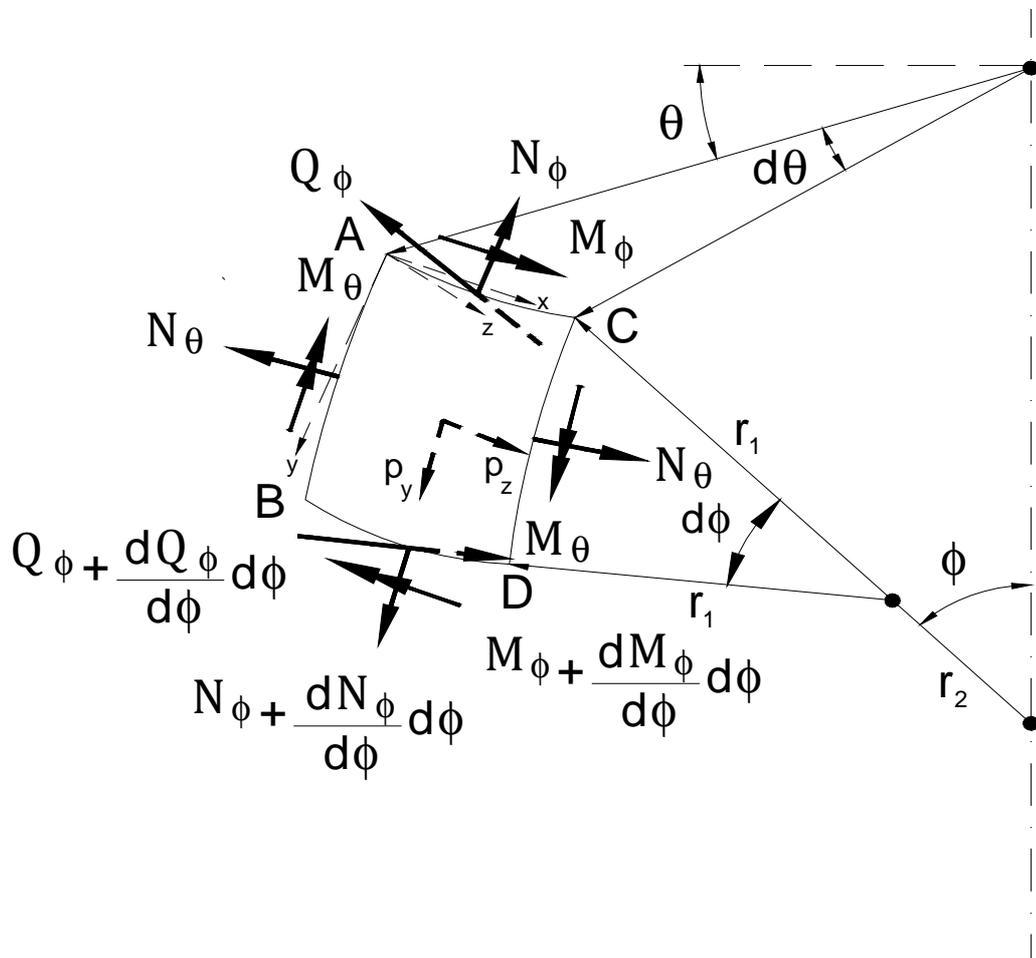


Figura 2.7 Resultantes de tensão não-nulas (provenientes de carregamento que origina flexão) em um elemento de casca axissimétrica

O desenvolvimento das equações de equilíbrio se procede da mesma maneira da Teoria de Membrana. A partir do equilíbrio de forças nas direções  $y$  e  $z$  e do equilíbrio dos momentos em torno do eixo  $x$ , obtém-se as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\phi}(N_\phi r_0) - N_\theta r_1 \cos\phi - Q_\phi r_0 + p_y r_1 r_0 &= 0 \\ N_\phi r_0 + N_\theta r_1 \sin\phi + \frac{d}{d\phi}(Q_\phi r_0) + p_z r_1 r_0 &= 0 \\ \frac{d}{d\phi}(M_\phi r_0) - Q_\phi r_0 r_1 - M_\phi r_1 \cos\phi &= 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

As equações de equilíbrio para cascas axissimétricas de forma usual são apresentadas a seguir:

**a) casca cônica**

Para este tipo de casca, anteriormente ilustrada na Figura 2.3, tem-se o ângulo  $\phi$  constante (sendo  $r_1 = \infty$ ). Assim:

$$\begin{aligned} r_2 &= s \cot\phi \\ r_1 d\phi &= ds \\ N_\phi &= N_s \\ M_\phi &= M_s \end{aligned} \quad (2.23)$$

Empregando-se estas relações, obtém-se para (2.22):

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(N_s s) - N_\theta &= -p_y s \\ N_\theta + \frac{d}{ds}(Q_s s) \cot\phi &= -p_z s \cot\phi \\ \frac{d}{ds}(M_s s) - Q_s s - M_\phi &= 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

**b) casca esférica**

Designando-se por  $a$  o raio da superfície média, tem-se, para este tipo de casca,  $r_1 = r_2 = a$  e  $r_0 = s \cdot \sin\phi$ . Dessa maneira, as equações (2.22) assumem a seguinte forma:

$$\frac{d}{d\phi}(N_\phi \sin\phi) - N_\theta \cos\phi - Q_\phi \sin\phi = p_y a \sin\phi$$

$$N_\phi \sin\phi + N_\theta \sin\phi + \frac{d}{d\phi}(Q_\phi \sin\phi) = -p_z a \sin\phi \quad (2.25)$$

$$\frac{d}{d\phi}(M_\phi r_0) - Q_\phi r_0 r_1 - M_\phi r_1 \cos\phi = 0$$

### c) casca cilíndrica

Fazendo-se  $s = x = r_2 \tan\phi$ ,  $\phi = \pi/2$  e  $r_2 = a$  em (2.22), obtém-se:

$$\frac{dN_x}{dx} + p_x = 0$$

$$\frac{dQ_x}{dx} + \frac{N_\theta}{a} + p_r = 0 \quad (2.26)$$

$$\frac{dM_x}{dx} - Q_x = 0$$

#### 2.3.3.3 Equações Governantes para Deslocamentos

No item anterior, observa-se, nas três equações de equilíbrio, a presença de cinco incógnitas de resultantes de tensão,  $Q_\phi$ ,  $M_\theta$ ,  $M_\phi$ ,  $N_\theta$  e  $N_\phi$ . De acordo com Ugural (1981), para se reduzir o número de incógnitas a três, são utilizadas relações envolvendo  $N_\theta$ ,  $N_\phi$ ,  $M_\theta$ ,  $M_\phi$  e as componentes de deslocamento  $v$  e  $w$ , as quais serão apresentadas a seguir.

As deformações de membrana e os deslocamentos de um ponto da superfície média estão relacionados pelas equações (2.10) e (2.12), rerepresentadas abaixo:

$$\varepsilon_\phi = \frac{1}{r_1} \frac{dv}{d\phi} - \frac{w}{r_1} \quad (2.27)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r_2} (v \cot\phi - w)$$

Através da análise da(2.10) Figura 2.8, obtém-se para as variações de curvatura:

$$\chi_\phi = \frac{1}{r_1} \frac{d}{d\phi} \left( \frac{v}{r_1} + \frac{dw}{r_1 d\phi} \right) \quad (2.28)$$

$$\chi_\theta = \left( \frac{v}{r_1} + \frac{dw}{r_1 d\phi} \right) \frac{\cot\phi}{r_2}$$

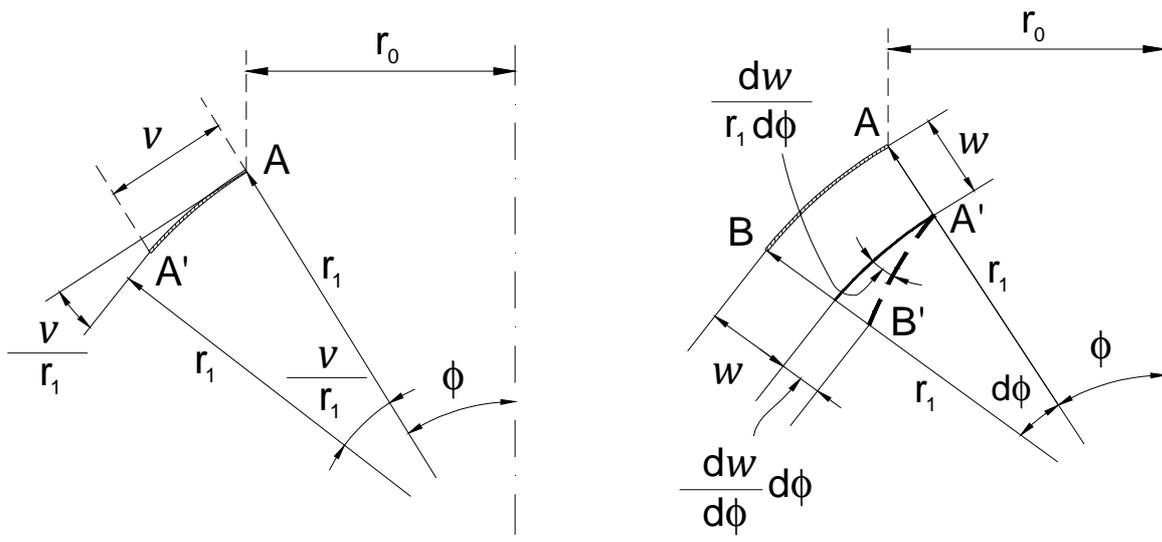


Figura 2.8 Elemento infinitesimal e deslocamentos após deformação em regime de flexão

As equações em (2.22) e (2.29), juntas, conduzem a três expressões com três incógnitas,  $v$ ,  $w$  e  $Q_\phi$ . Por outro lado, usando-se a primeira entre as três equações resultantes, o esforço cortante  $Q_\phi$  pode ser eliminado nas duas últimas. Desse modo, as expressões em (2.22) ficam reduzidas a duas equações com duas incógnitas:  $v$  e  $w$ .

Considerando-se o que foi exposto e levando-se em conta as equações constitutivas, obtidas em (2.25), chega-se às chamadas Equações Governantes para Deslocamentos, apresentadas a seguir, as quais são empregadas para tratar o problema de flexão em cascas:

$$\begin{aligned}
N_\phi &= \frac{Et}{1-\nu^2} \left[ \frac{1}{r_1} \left( \frac{d\nu}{d\phi} - w \right) + \frac{\nu}{r_2} (\nu \cot\phi - w) \right] \\
N_\theta &= \frac{Et}{1-\nu^2} \left[ \frac{1}{r_2} (\nu \cot\phi - w) + \frac{\nu}{r_1} \left( \frac{d\nu}{d\phi} - w \right) \right] \\
M_\phi &= -D \left[ \frac{1}{r_1} \frac{d}{d\phi} \left( \frac{\nu}{r_1} + \frac{dw}{r_1 d\phi} \right) + \frac{\nu}{r_2} \left( \frac{\nu}{r_1} + \frac{dw}{r_1 d\phi} \right) \cot\phi \right] \\
M_\theta &= -D \left[ \left( \frac{\nu}{r_1} + \frac{dw}{r_1 d\phi} \right) \frac{\cot\phi}{r_2} + \frac{\nu}{r_1} \frac{d}{d\phi} \left( \frac{\nu}{r_1} + \frac{dw}{r_1 d\phi} \right) \right]
\end{aligned} \tag{2.29}$$

## 2.4 Cascas Cilíndricas Axissimétricas

### 2.4.1 Equações Governantes para Deslocamentos

Uma importante aplicação das equações apresentadas no item anterior é feita no estudo de cascas cilíndricas axissimétricas, que são usualmente empregadas em reservatórios, silos e contêineres.

Devido à axissimetria do problema, em um elemento de casca cilíndrica de raio  $a$ , atuam somente as resultantes de tensão,  $Q_x$ ,  $M_x$  e  $N_x$ , conforme a Figura 2.9. Além disso, as resultantes  $M_\theta$  e  $N_\theta$  são independentes de  $\theta$ . O deslocamento circunferencial  $\nu$  também resulta nulo e considera-se apenas  $u$  e  $w$ .

Levando-se em conta estas simplificações, restam apenas três dentre as seis equações de equilíbrio a serem satisfeitas. Considerando a atuação de um carregamento como ilustrado na Figura 2.9, o equilíbrio de forças nas direções  $x$  e  $z$  e dos momentos em torno do eixo  $y$  fornece:

$$\begin{aligned}
\frac{dN_x}{dx} + p_x &= 0 \\
\frac{dQ_x}{dx} + \frac{1}{a} N_\theta + p_r &= 0 \\
\frac{dM_x}{dx} - Q_x &= 0
\end{aligned} \tag{2.30}$$

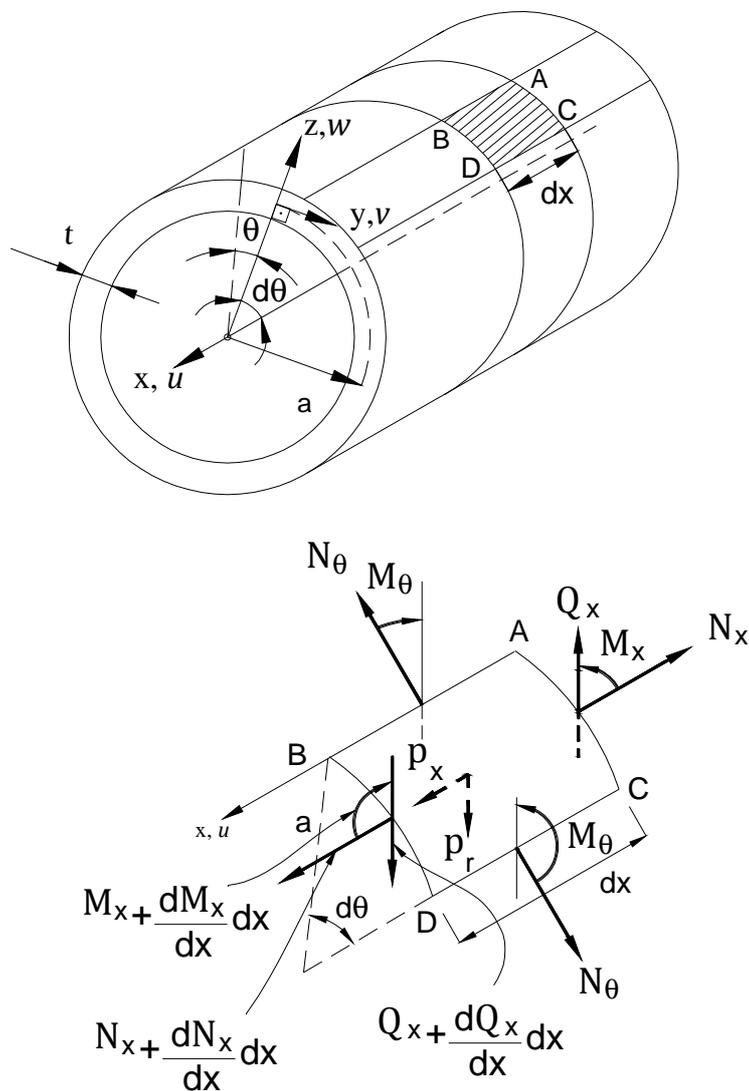


Figura 2.9 Casca cilíndrica axissimétrica

Da primeira entre as equações de (2.30)(2.29), obtém-se a mesma equação para  $N_x$  apresentada em (2.9). Para a determinação de  $Q_x$  e  $M_x$ , é necessário examinar os deslocamentos da superfície média. Com  $v = 0$ , as relações de deformação-deslocamento se escrevem:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \quad (2.31)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{w}{a}$$

Aplicando-se (2.31) em (2.20):

$$N_x = \frac{Et}{1 - \nu^2} \left( \frac{du}{dx} - \nu \frac{w}{a} \right) \quad (2.32)$$

Donde se obtém:

$$\frac{du}{dx} = \frac{1 - \nu^2}{Et} N_x + \nu \frac{w}{a} \quad (2.33)$$

Assim, a partir da Lei de Hooke e das equações em (2.30):

$$N_\theta = -\frac{Et}{1 - \nu^2} \left( \frac{w}{a} - \nu \frac{du}{dx} \right) \quad (2.34)$$

Para os momentos fletores, tem-se:

$$M_x = -D \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (2.35)$$

$$M_\theta = \nu M_x$$

onde  $D$  é a rigidez flexional da casca, definida em (2.21). Utilizando-se as expressões em (2.30), (2.33), (2.34) e (2.35), obtém-se para uma casca de espessura  $t$  constante:

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Et}{a^2} w - \nu \frac{N_x}{a} - p_r = 0 \quad (2.36)$$

Em bibliografias como Ugural (1981), Timoshenko (1970) e Billington (1990), utiliza-se uma apresentação mais conveniente desta expressão, dada por:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\beta^4 w - \frac{\nu N_x}{aD} = \frac{p_r}{D} \quad (2.37)$$

na qual  $\beta$  é um parâmetro geométrico de dimensão  $L^{-1}$ , tal que:

$$\beta^4 = \frac{Et}{4a^2D} = \frac{3(1 - \nu^2)}{a^2t^2} \quad (2.38)$$

As equações (2.33) e (2.37) representam as equações governantes para deslocamentos de uma casca cilíndrica circular axissimétrica. Quando não houver carga axial aplicada,  $N_x = 0$  e estas equações são simplificadas, resultando em:

$$\frac{du}{dx} = \nu \frac{w}{a} \quad (2.39)$$

$$\frac{d^4w}{dx^4} + 4\beta^4w = \frac{p_r}{D}$$

A primeira das equações em (2.39), após integração, fornece diretamente o valor do deslocamento  $u$ . A segunda é uma equação diferencial ordinária com coeficientes constantes, cuja solução é dada por:

$$w = w_h + w_p = e^{+\beta x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sen \beta x) + e^{-\beta x}(C_3 \cos \beta x + C_4 \sen \beta x) + f_w(x) \quad (2.40)$$

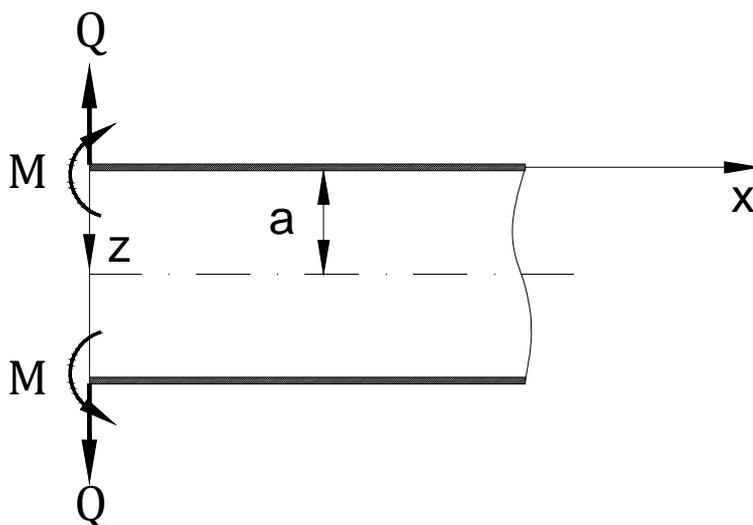
onde  $w_h$  e  $w_p = f_w(x)$  são, respectivamente, as soluções homogênea e particular de  $w$  e  $C_1, C_2, C_3$  e  $C_4$ , constantes de integração que dependem das condições de contorno do problema.

#### 2.4.2 Solicitações de Bordo em Cascas Cilíndricas Circulares

As cascas cilíndricas circulares podem ser classificadas, quanto ao seu comprimento, como longas ou curtas. Segundo Ugural (1981), recebem a denominação de longas aquelas que apresentam comprimento longitudinal  $L > (\pi/\beta)$ . Neste tipo de casca cilíndrica, o único a ser considerado neste trabalho, as solicitações em cada bordo são tratadas separadamente, devido à característica localizada dos efeitos de flexão.

Para determinação da expressão de  $w$ , será considerado, como exemplo, uma casca cilíndrica circular longa submetida à ação de um momento de bordo por unidade de comprimento  $M_1$  e de uma força por unidade de comprimento  $Q_1$ , ambos aplicados ao longo do bordo  $x = 0$ , conforme a Figura 2.10. Neste caso, como não há pressão  $p_r$  distribuída sobre a superfície da casca e  $N_x = 0$ , tem-se que a solução particular é nula. Uma vez que as forças aplicadas em  $x = 0$  produzem uma flexão local, a qual é amortecida à medida que a distância  $x$  (a partir do bordo carregado) aumenta, conclui-se que o primeiro termo da solução homogênea em (2.40) deve desaparecer e, portanto,  $C_1 = C_2 = 0$ , obtendo-se:

$$w = e^{-\beta x}(C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) \quad (2.41)$$



**Figura 2.10 Casca cilíndrica circular submetida a solicitações no bordo esquerdo**

As duas constantes  $C_3$  e  $C_4$  são determinadas pelas condições de contorno mecânicas no bordo carregado, as quais junto com as equações (2.30) e (2.35) fornecem:

$$M_x|_{x=0} = -D \frac{d^2 w}{dx^2} = M_1 \quad (2.42)$$

$$Q_x|_{x=0} = \frac{dM_x}{dx} = -D \frac{d^3 w}{dx^3} = Q_1$$

Donde:

$$C_1 = -\frac{1}{2\beta^3 D} = (Q_1 + \beta M_1) \quad (2.43)$$

$$C_2 = \frac{M_1}{2\beta^2 D}$$

Substituindo (2.43) em (2.41), obtém-se para a expressão de  $w$ :

$$w = -\frac{e^{-\beta x}}{2\beta^3 D} [\beta M_1 (\text{sen}\beta x - \text{cos}\beta x) - Q_1 \text{cos}\beta x] \quad (2.44)$$

Daí resulta:

$$M_x = \frac{e^{-\beta x}}{\beta} [\beta M_1 (\text{cos}\beta x + \text{sen}\beta x) + Q_1 (\text{sen}\beta x)] \quad (2.45)$$

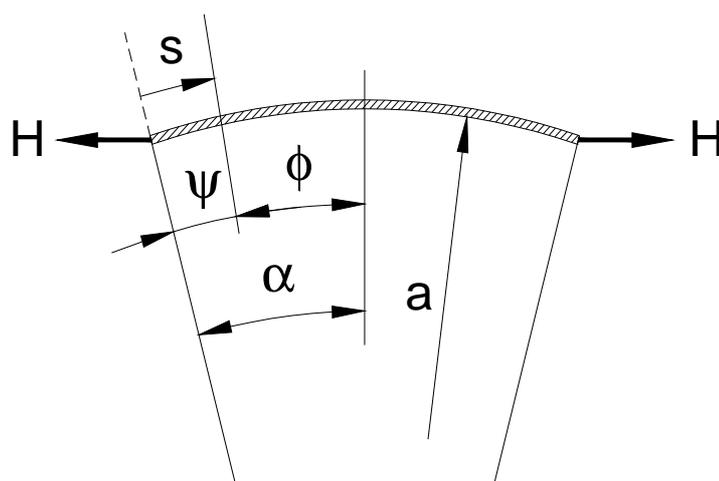
$$Q_x = e^{-\beta x} [2\beta M_1 (\text{sen}\beta x) + Q_1 (\text{cos}\beta x - \text{sen}\beta x)]$$

## 2.5 Solicitações de Bordo em Domos Axissimétricos

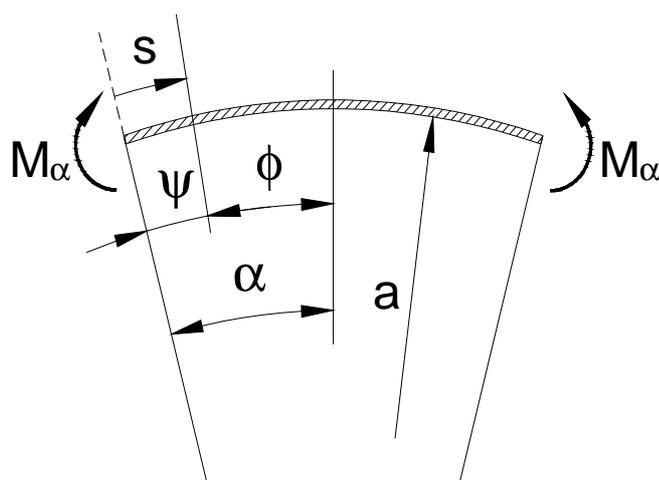
De acordo com Billington (1990), na análise de perturbações de bordo em cascas, os valores de deslocamento  $v$  e  $w$  e também da rotação do meridiano (que será aqui designada por  $\Delta_\phi$ ) mais importantes a serem determinados são os dos próprios bordos. Para o caso de apoio tangencial ao contorno da casca,  $v = 0$  e apenas  $w$  e  $\Delta_\phi$  devem ser calculados.

Tendo-se em vista a compatibilização dos domos com outras peças, em vez de  $v$  e  $w$ , serão levados em conta o deslocamento horizontal  $\Delta_H$  e a rotação do meridiano  $\Delta_\alpha$  do bordo.

Ainda segundo Billington (1990), as duas equações que resultam da união de (2.22) e (2.27) podem ser resolvidas analiticamente; entretanto, tais soluções tem valor limitado e, na maioria dos casos, a aproximação de Geckeler permite o uso da solução da casca cilíndrica (tratada no item 2.4.2 desta dissertação).



(a)



(b)

**Figura 2.11 Solicitações de bordo em domo esférico**

As referidas expressões para a casca cilíndrica podem ser usadas em domos na determinação de resultantes de tensão, momentos resultantes e deslocamentos de bordo, desde que se leve em conta a inclinação  $\alpha$  (Figura 2.11) do referido bordo.

Considerando-se uma solicitação de bordo  $H$ , do tipo força uniformemente distribuída ao longo do perímetro, como ilustrado na Figura 2.11, tem-se a força cortante  $Q_1 = H(\text{sen}\alpha)$  para utilização das expressões em (2.44) e (2.45). O

deslocamento  $\Delta_H$  é obtido a partir do deslocamento radial do bordo  $w$ , sendo  $\Delta_H = w(\text{sen}\alpha)$ . A partir dessas considerações e com base na Figura 2.11, tem-se:

$$\begin{aligned}
 N_\phi &= e^{-\beta s}(\cos\beta s - \text{sen}\beta s)H(\text{sen}\alpha)\cot(\alpha - \psi) \\
 N_\theta &= 2e^{-\beta s}(\cos\beta s)\beta aH(\text{sen}\alpha) \\
 M_\phi &= \frac{e^{-\beta s}\text{sen}\beta s}{\beta}H(\text{sen}\alpha) \\
 \Delta_H &= 2\beta \frac{a^2}{Et}H(\text{sen}^2\alpha) \\
 \Delta_\alpha &= 2\beta^2 \frac{a^2}{Et}H(\text{sen}\alpha)
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

Do mesmo modo, para uma carga momento  $M_\alpha$  uniformemente distribuída no bordo (Figura 2.11), tem-se:

$$\begin{aligned}
 N_\phi &= -2e^{-\beta s}(\text{sen}\beta s)\beta M_\alpha \cot(\alpha - \psi) \\
 N_\theta &= 2e^{-\beta s}(\cos\beta s - \text{sen}\beta s)\beta^2 a M_\alpha \\
 M_\phi &= e^{-\beta x}(\cos\beta s + \text{sen}\beta s)M_\alpha \\
 \Delta_H &= \frac{2\beta^2 a^2 (\text{sen}\alpha)}{Et} M_\alpha \\
 \Delta_\alpha &= \frac{4\beta^3 a^3}{Et} M_\alpha
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

## 2.6 Formulação para Placas Axissimétricas

As placas axissimétricas tratadas neste trabalho constituirão, essencialmente, as bases de reservatórios e vasos de pressão, estando submetidas a solicitações simples de flexão (carregamentos uniformemente distribuídos e momentos ao longo dos bordos) ou de variação de temperatura.

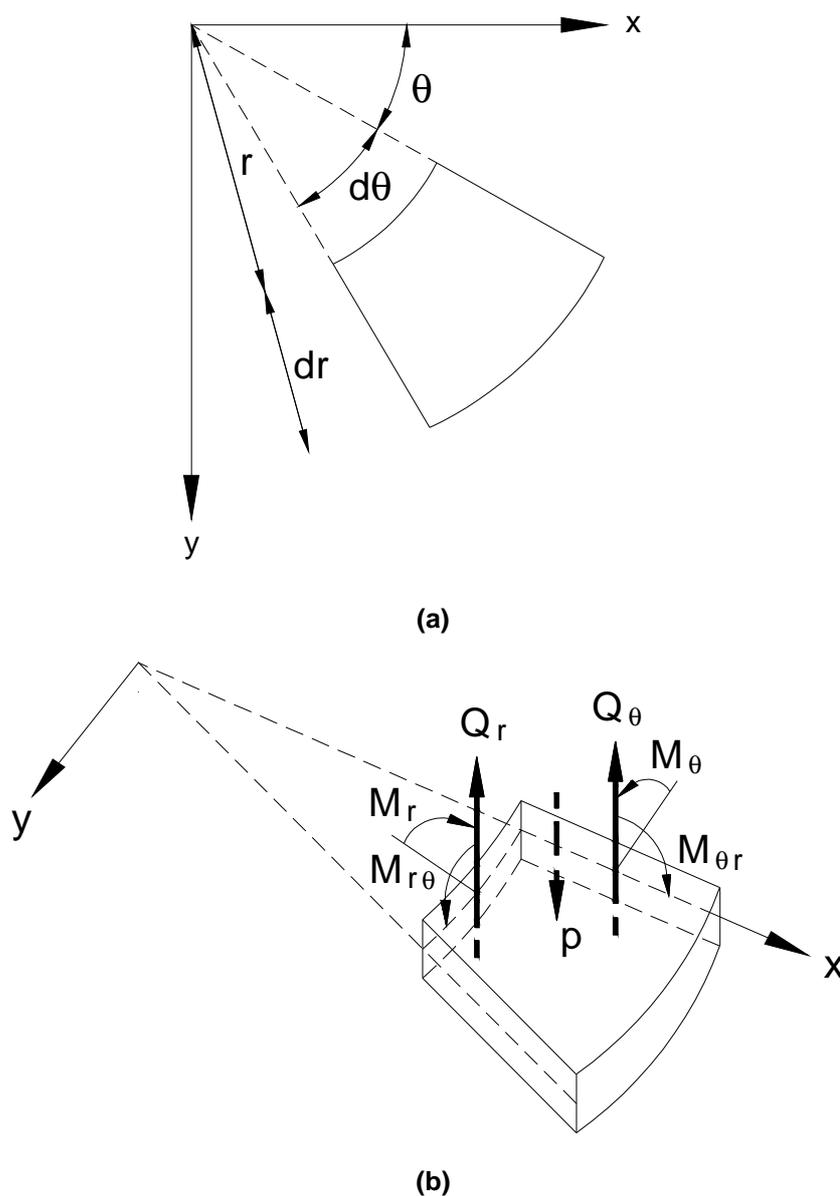


Figura 2.12 (a) Coordenadas cartesianas e polares de um elemento de placa (b) Esforços solicitantes em um elemento de placa axissimétrica

Inicialmente, devem ser consideradas as seguintes relações entre coordenadas cartesianas e polares, conforme Figura 2-12 (a):

$$\begin{aligned}
 x &= r \cos \theta \\
 y &= r \sin \theta \\
 r^2 &= x^2 + y^2 \\
 \tan \theta &= y/x
 \end{aligned}
 \tag{2.48}$$

De acordo com Ugural (1981), sendo  $q = q(r)$  e  $w = w(r)$ , tem-se a seguinte equação diferencial para o deslocamento transversal  $w$ :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{q(r)}{D} \quad (2.49)$$

Em relação aos esforços, devido às condições de axissimetria, apenas  $M_r$ ,  $M_\theta$  e  $Q_r$  não se anulam no elemento infinitesimal de placa, sendo dados por:

$$\begin{aligned} M_r &= -D \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) \\ M_\theta &= -D \left( \nu \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \\ Q_r &= -D \frac{d}{dr} \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \end{aligned} \quad (2.50)$$

As equações apresentadas em (2.49) e (2.50) são resolvidas mediante aplicação de condições de contorno geométricas e mecânicas. Tais expressões são válidas para placas com ou sem furo; entretanto, no âmbito do presente trabalho, serão abordadas somente estas últimas.

Serão apresentados, a seguir, casos usuais de carregamento para placas circulares maciças e suas respectivas expressões para o cálculo do deslocamento transversal  $w$  e do momento fletor  $M_r$  (parâmetros analisados nesta dissertação).

### 2.6.1 Expressões para placa apoiada com carga momento de bordo

Considere-se a placa representada na Figura 2.13 a seguir:

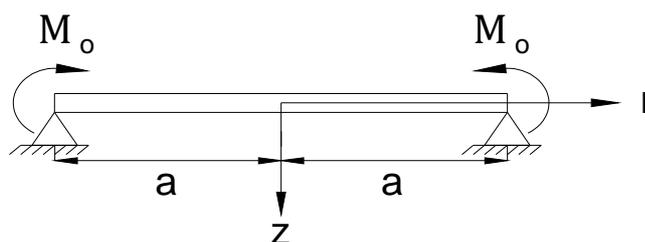


Figura 2.13 Placa submetida a um momento por unidade de comprimento ao longo do bordo

Para a situação acima ilustrada, tem-se:

$$w = \frac{M_0(a^2 - r^2)}{2D(1 + \nu)} \quad (2.51)$$

$$M_r = M_0$$

### 2.6.2 Expressões para placa apoiada com carregamento lateral uniformemente distribuído

Seja a placa representada na Figura 2.14 a seguir:

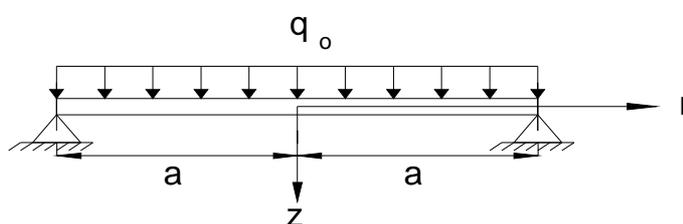


Figura 2.14 Placa circular simplesmente apoiada submetida a carregamento lateral uniformemente distribuído

Levando-se em conta a situação acima ilustrada, tem-se:

$$w = \frac{q_0}{2D} \left[ \frac{r^4}{32} - \frac{(3 + \nu)a^2 r^2}{16(1 + \nu)} + \frac{(5 + \nu)a^4}{32(1 + \nu)} \right] \quad (2.52)$$

$$M_r = \frac{q_0}{16} (3 + \nu)(a^2 - r^2)$$

### 2.6.3 Expressões para placa engastada com carregamento lateral uniformemente distribuído

Considere-se a placa representada na Figura 2.15 a seguir:

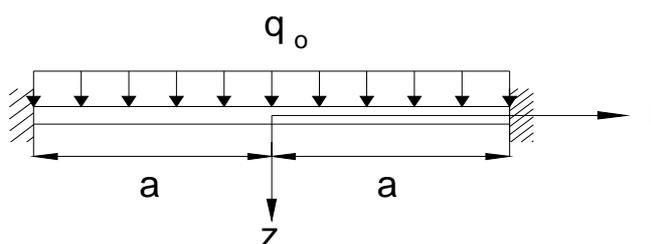


Figura 2.15 Placa circular engastada submetida a carregamento lateral uniformemente distribuído

Para a situação anteriormente ilustrada, tem-se:

$$w = \frac{q_0}{64D} (a^2 - r^2)^2$$

$$M_r = \frac{q_0}{16} [a^2(1 + \nu) - r^2(3 + \nu)]$$
(2.53)

## 2.7 Solicitação térmica em estruturas de superfície

Para a análise dos efeitos da solicitação térmica em cascas e placas é necessário desenvolver uma nova formulação da relação tensão-deformação. Dessa maneira, sendo o problema linear, realiza-se a superposição das deformações causadas pelas tensões, devidas a carregamentos externos e à solicitação térmica.

Em materiais homogêneos e isotrópicos, uma variação uniforme de temperatura  $\Delta T = T - T_0$  (sendo  $T$  e  $T_0$  as temperaturas inicial e final, respectivamente) produz uma deformação específica longitudinal em todas as direções, chamada deformação térmica, dada pela seguinte expressão:

$$\varepsilon_t = \alpha \Delta t$$
(2.54)

As parcelas de tensão originadas pela solicitação térmica são denominadas tensões térmicas. A relação tensão-deformação para cascas e placas, levando-se em conta os efeitos da solicitação térmica é expressa, de um modo geral e considerando-se coordenadas cartesianas, por:

$$\sigma_x = \frac{E}{(1 - \nu^2)} [\varepsilon_x - \nu \varepsilon_y - \alpha \Delta t(1 + \nu)]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1 - \nu^2)} [\varepsilon_y - \nu \varepsilon_x - \alpha \Delta t(1 + \nu)]$$
(2.55)

A partir da utilização de (2.55) nas formulações apresentadas anteriormente neste capítulo, é possível quantificar os efeitos da variação de temperatura em termos de deslocamentos, esforços e tensões.

## **2.8 Análise de estruturas formadas por acoplamentos de peças estruturais**

As respostas analíticas para estruturas formadas por peças compatibilizadas são obtidas através da análise de cada elemento isolado, levando-se em conta tanto as cargas externas ao sistema do reservatório (peso próprio, pressões internas, variação de temperatura) quanto os efeitos da vinculação com outras peças, que atuam como solicitações de bordo (forças e momentos uniformemente distribuídos ao longo de seu contorno).

A seguir, descreve-se um método de análise usado em Billington (1990), que será empregado na compatibilização de cascas em regime de membrana:

- inicialmente, considera-se que a solicitação externa é resistida inteiramente pelas resultantes de tensões de membrana;
- as forças e deslocamentos no contorno das cascas obtidos a partir da teoria de membrana geralmente não serão compatíveis com as condições de contorno conhecidas;
- forças e deslocamentos (efeitos de bordo) devem ser aplicados aos contornos da casca para eliminar as incompatibilidades provenientes da teoria (ou da aproximação) de membrana.
- a intensidade dos carregamentos de bordo, necessários para eliminação das referidas incompatibilidades, é determinada através da solução de equações de compatibilidade ou de equilíbrio nos contornos da casca.

Observa-se que este método reproduz o Método da Flexibilidade, normalmente usado para cálculo de pórticos, treliças e outras estruturas planas estaticamente indeterminadas.

O mesmo procedimento será utilizado na compatibilização das placas axissimétricas bem como das cascas submetidas a esforços de flexão.

## **2.9 Princípio dos Trabalhos Virtuais**

A formulação numérica apresentada no capítulo subsequente se fundamenta no Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) para o desenvolvimento das equações do Método dos Elementos Finitos.

O PTV para corpos deformáveis enuncia que se um sistema estrutural em equilíbrio for submetido a um campo de deslocamentos virtuais cinematicamente

admissível (ou seja, compatível com as vinculações do sistema e mantendo a continuidade interna) o trabalho virtual das forças que sobre ele atuam (forças externas) é igual ao trabalho virtual das forças internas, Mittelbach (2002). Dessa forma:

$$\delta W_i = \delta W_e \quad (2.56)$$

onde,  $\delta W_i$  representa o trabalho virtual das forças internas (ou trabalho virtual interno) e  $\delta W_e$  o trabalho virtual das forças externas (ou trabalho virtual externo).

Para um sólido no espaço definido por coordenadas cartesianas  $x$ ,  $y$  e  $z$ , tem-se as seguintes expressões gerais para  $\delta W_i$  e  $\delta W_e$ :

$$\delta W_i = \int_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}) dV \quad (2.57)$$

$$\delta W_e = \int_{S_f} (\rho_x \delta u + \rho_y \delta v + \rho_z \delta w) dS + \int_V (B_x \delta u + B_y \delta v + B_z \delta w) dV \quad (2.58)$$

sendo:

$\rho_x, \rho_y, \rho_z$  – componentes das forças de superfície que atuam na região  $S_f$  do contorno onde são prescritas forças

$B_x, B_y, B_z$  – componentes das forças de volume

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  – componentes de tensão

$\delta u, \delta v, \delta w$  - variações das componentes de deslocamento ( $u, v, w$ ) segundo  $x, y, z$

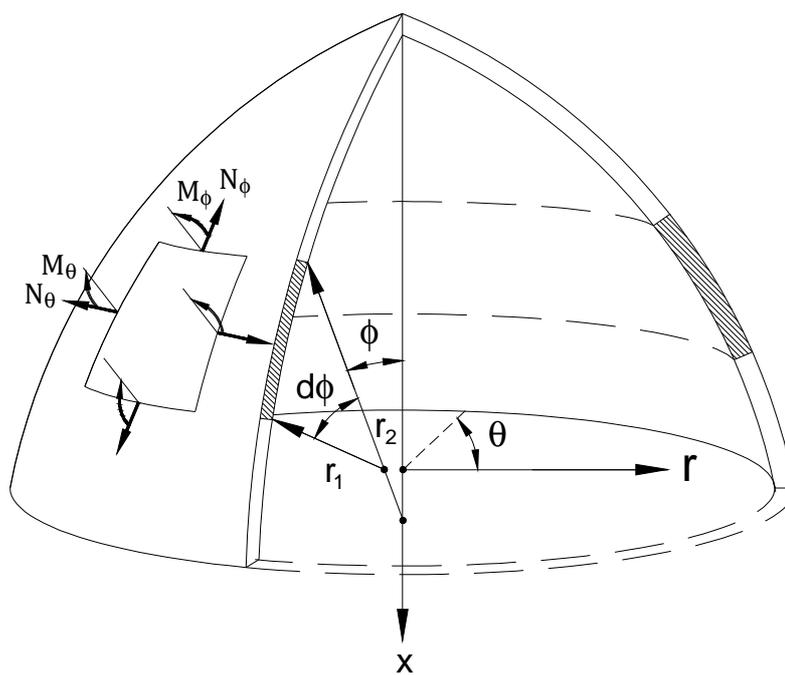
$\delta\varepsilon_x, \delta\varepsilon_y, \delta\varepsilon_z, \delta\gamma_{xy}, \delta\gamma_{xz}, \delta\gamma_{yz}$  – variações das componentes de deformação

As relações deformação-deslocamento fornecem:

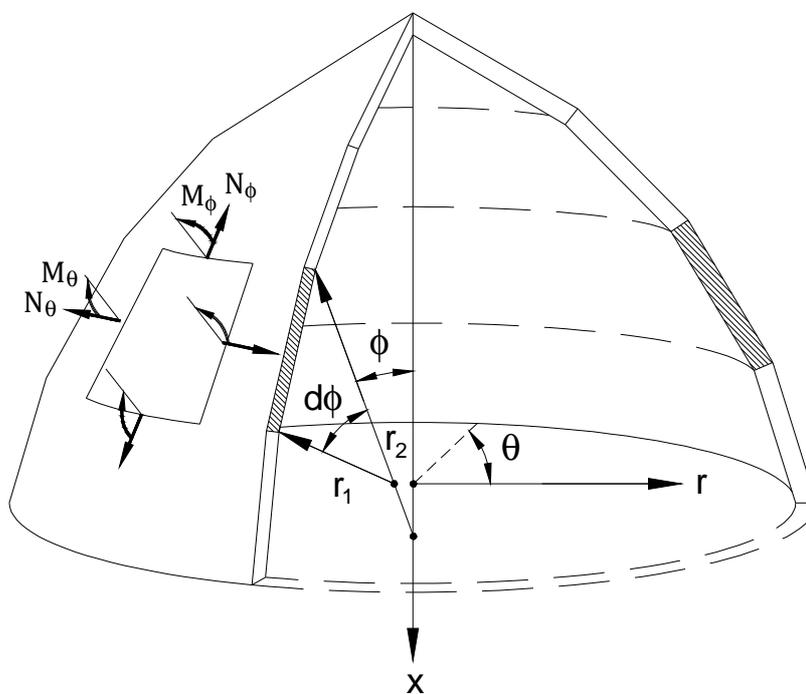
$$\begin{aligned}
 \delta\varepsilon_x &= \delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) & \delta\gamma_{xy} &= \delta\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \\
 \delta\varepsilon_y &= \delta\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) & \delta\gamma_{xz} &= \delta\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\
 \delta\varepsilon_z &= \delta\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) & \delta\gamma_{yz} &= \delta\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

Quando da formulação numérica as equações (2.57), (2.58) e (2.59) serão particularizadas, levando-se em conta os eixos de referência, as hipóteses simplificadoras utilizadas e as solicitações consideradas no modelo.





(a)



(b)

Figura 3.2 (a) Representação contínua da casca (b) Representação da casca como um agrupamento de troncos de cone

### 3.2 Deslocamentos e funções de interpolação

As deslocabilidades do nó 1 nas direções globais ( $u_1$ ,  $w_1$ , e  $\beta_1$ ), bem como o campo de deslocamentos do elemento no sistema local ( $\bar{u}$  e  $\bar{w}$ ) estão representados na Figura 3.1. Considerando-se que o elemento finito é composto por 2 nós e que cada um apresenta 3 graus de liberdade, tem-se ao todo 6 graus de liberdade. Assim, o vetor de deslocamentos  $\mathbf{u}^e$  nas direções globais é dado por:

$$\mathbf{u}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1^e \\ \mathbf{u}_2^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \beta_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \beta_2 \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

onde os índices 1 e 2 se referem aos nós inicial e final do elemento, respectivamente.

A relação entre deslocamentos locais e globais é dada por

$$\bar{\mathbf{u}}^e = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_1^e \\ \bar{\mathbf{u}}_2^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{T}\mathbf{u}_1^e \\ \mathbf{T}\mathbf{u}_2^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{T} & 0 \\ 0 & \mathbf{T} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1^e \\ \mathbf{u}_2^e \end{Bmatrix} = \mathbf{T}^e \mathbf{u}^e \quad (3.2)$$

De forma explícita, para o nó  $i$ , tem-se:

$$\bar{\mathbf{u}}_i^e = \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{w}_i \\ (d\bar{w}/ds)_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} = \mathbf{T}\mathbf{u}_i^e \quad (3.3)$$

sendo  $\mathbf{T}$  a matriz de rotação de um tensor no plano e  $\phi$  o ângulo de inclinação do elemento.

Os deslocamentos ao longo do elemento devem ser determinados mantendo-se a continuidade das rotações e deslocamentos lineares. Utilizam-se as seguintes funções de interpolação, sendo  $\bar{u}(s)$  linear de classe  $C^0$  e  $\bar{w}(s)$  cúbica de classe  $C^1$ , para representar o campo de deslocamentos:

$$\bar{u}(s) = N_1^u(s)\bar{u}_1 + N_2^u(s)\bar{u}_2 \quad (3.4)$$

$$\bar{w}(s) = N_1^w(s)\bar{w}_1 + N_2^w(s)\bar{w}_2 + N_1^\beta(s)\bar{\beta}_1 + N_2^\beta(s)\bar{\beta}_2 \quad (3.5)$$

onde:

$$\begin{aligned} N_1^u(s) &= 1 - s/L \\ N_2^u(s) &= s/L \\ N_1^w(s) &= 2s^3/L^3 - 3s^2/L^2 + 1 \\ N_2^w(s) &= -2s^3/L^3 + 3s^2/L^2 \\ N_1^\beta(s) &= s^3/L^2 - 2s^2/L + s \\ N_2^\beta(s) &= s^3/L^2 - s^2/L \end{aligned} \quad (3.6)$$

Escrevendo-se a interpolação como

$$\bar{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{w} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i^u & 0 & 0 \\ 0 & N_i^w & N_i^\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{w}_i \\ (d\bar{w}/ds)_i \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{N}}_i \bar{\mathbf{u}}_i^e = [\bar{\mathbf{N}}_1 \quad \bar{\mathbf{N}}_2] \bar{\mathbf{u}}^e \quad (3.7)$$

e levando-se em consideração (3.2), tem-se, em função das coordenadas globais:

$$\bar{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{w} \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{N}} \mathbf{T}^e \mathbf{u}^e = [\bar{\mathbf{N}}_1 \mathbf{T} \quad \bar{\mathbf{N}}_2 \mathbf{T}] \mathbf{u}^e = \mathbf{N} \mathbf{u}^e \quad (3.8)$$

O raio, ao longo do elemento, pode ser calculado como:

$$r(s) = r_1 + s \cdot \text{sen}(\phi) \quad (3.9)$$

Tem-se ainda:

$$L = \sqrt{(r_2 - r_1)^2 + (x_2 - x_1)^2} \quad (3.10)$$

### 3.3 Relações deformação-deslocamento

Utilizando-se a hipótese de Kirchoff-Love (que exclui deformações transversais por cisalhamento) e considerando o ângulo  $\phi$  constante (ou seja, elemento retilíneo), as quatro componentes de deformação, descritas segundo os deslocamentos locais, são:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \\ \chi_s \\ \chi_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d\bar{u}/ds \\ [\bar{w} \cos(\phi) + \bar{u} \sin(\phi)]/r \\ -d^2\bar{w}/ds^2 \\ -(d\bar{w}/ds) \sin(\phi)/r \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

A partir de (3.11) e utilizando (3.7), define-se a matriz de deformação  $\mathbf{B}$ , tal que:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u}^e = [\bar{\mathbf{B}}_1 \mathbf{T} \quad \bar{\mathbf{B}}_2 \mathbf{T}] \mathbf{u}^e \quad (3.12)$$

Sendo:

$$\bar{\mathbf{B}}_i = \begin{bmatrix} dN_i^u/ds & 0 & 0 \\ N_i^u \sin(\phi)/r & N_i^w \cos(\phi)/r & N_i^\beta \cos(\phi)/r \\ 0 & -d^2 N_i^w/ds^2 & -d^2 N_i^\beta/ds^2 \\ 0 & -(dN_i^w/ds) \sin(\phi)/r & -(dN_i^\beta/ds) \sin(\phi)/r \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

### 3.4 Relação Tensão-deformação

As resultantes de tensão, ilustradas na Figura 3.2, se relacionam com as deformações pela matriz de elasticidade  $\mathbf{D}$ , de modo que:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} N_s \\ N_\theta \\ M_s \\ M_\theta \end{Bmatrix} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.14)$$

Para uma casca de material linear isotrópico, a matriz de elasticidade é dada por:

$$\mathbf{D} = \frac{Et}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^2/12 & \nu t^2/12 \\ 0 & 0 & \nu t^2/12 & t^2/12 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

sendo  $E$  e  $\nu$ , respectivamente, o módulo de elasticidade longitudinal e o coeficiente de Poisson do material da casca e  $t$  a sua espessura.

### 3.5 Trabalho Virtual Interno

O trabalho virtual interno, para o modelo em questão, pode ser escrito como

$$\delta W_i = \int_{V^e} \boldsymbol{\sigma}^* \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV^e \quad (3.16)$$

que, em sua forma matricial, se torna:

$$\delta W_i = \int_{V^e} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}^* dV^e = \int_{A^e} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}^* dz dA^e \quad (3.17)$$

onde  $V^e$  é o volume do elemento e  $\boldsymbol{\sigma}^*$  o vetor de tensões (antes da integração ao longo da espessura), o qual, levando em conta os efeitos da variação de temperatura, considerada uma função linear ao longo da espessura, é dado por:

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \begin{Bmatrix} \sigma_s \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{s \cdot z} \\ \sigma_{\theta \cdot z} \end{Bmatrix} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\sigma}_t^* = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{E \alpha}{1 - \nu} \begin{Bmatrix} \Delta_t \\ \Delta_t \\ -\Delta_t \cdot z \\ -\Delta_t \cdot z \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

onde:

$$\Delta_t = \frac{\Delta_{t_i} + \Delta_{t_e}}{2} + \frac{z}{t} (\Delta_{t_i} - \Delta_{t_e}) \quad (3.19)$$

Após integração ao longo da espessura, obtém-se:

$$\int_0^L \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T (\mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\sigma}_t) 2\pi r(s) ds \quad (3.20)$$

onde:

$$\boldsymbol{\sigma}_t = \frac{E \alpha}{1 - \nu} \begin{Bmatrix} \frac{\Delta_{t_i} + \Delta_{t_e}}{2} t \\ \frac{\Delta_{t_i} + \Delta_{t_e}}{2} t \\ -\frac{(\Delta_{t_i} - \Delta_{t_e})}{12} t^2 \\ -\frac{(\Delta_{t_i} - \Delta_{t_e})}{12} t^2 \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

Substituindo (3.2), (3.11), (3.12) e (3.13), obtém-se:

$$\delta W_i = 2\pi \left[ \int_0^L \delta(\mathbf{u}^e)^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{u}^e r(s) ds - \int_0^L \delta(\mathbf{u}^e)^T \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_t r(s) ds \right] \Rightarrow \quad (3.22)$$

$$\delta W_i = 2\pi \delta(\mathbf{u}^e)^T \left[ \int_0^L \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{u}^e r(s) ds - \mathbf{F}_t^e \right]$$

onde  $\mathbf{F}_t^e$  é o vetor de ações nodais equivalentes devidas à atuação de um gradiente de temperatura ao longo da espessura, dado por:

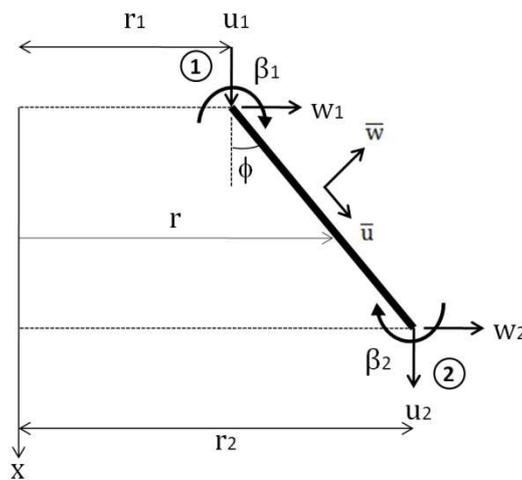
$$\mathbf{F}_t^e = \int_0^L \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_t r(s) ds \quad (3.23)$$

### 3.6 Trabalho Virtual Externo

O trabalho virtual externo, segundo (2.58) e levando-se em conta os sistemas de coordenadas indicados na Figura 3.2, as hipóteses simplificadoras e as solicitações consideradas no modelo, se escreve:

$$\delta W_e = \int_0^L (p_s \delta \bar{u} + p_t \delta \bar{w}) 2\pi r(s) ds \quad (3.24)$$

$$+ 2\pi \left[ r(s) \left( \bar{N}_s \delta \bar{u} + \bar{Q}_s \delta \bar{w} - \bar{M}_s \delta \frac{d\bar{w}}{dx} \right) \right]_0^L$$



(a)

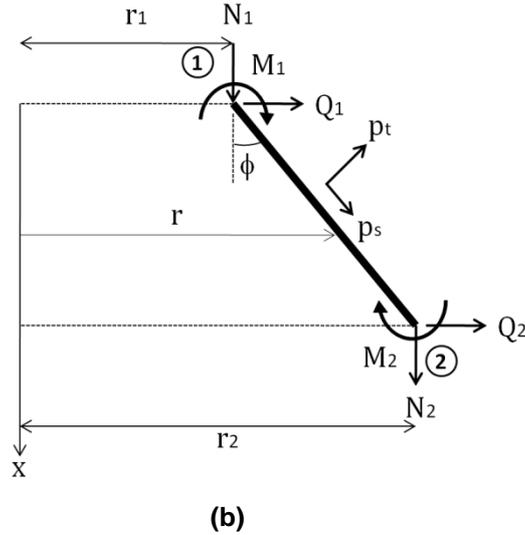


Figura 3.3 (a) Deslocamentos nodais globais e campo de deslocamentos locais do elemento (b) Forças nodais prescritas e carregamentos de domínio prescritos

Deve-se observar que na expressão (3.24) todos os parâmetros se referem ao sistema local. Matricialmente, obtém-se:

$$\delta W_e = 2\pi \left[ \int_0^L \delta \bar{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{f}} r(s) ds + \delta(\bar{\mathbf{u}}^e)^T \bar{\mathbf{F}}_r^e \right] =$$

$$2\pi \delta(\mathbf{u}^e)^T \left[ \int_0^L \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{N}} \bar{\mathbf{f}} r(s) ds + \mathbf{T}^T \mathbf{T} \mathbf{F}_r^e \right]$$
(3.25)

sendo  $\bar{\mathbf{F}}_r^e$  e  $\mathbf{F}_r^e$  os vetores de forças nodais multiplicadas pelo raio nas direções locais e globais, respectivamente, e  $\bar{\mathbf{f}}$  o vetor de cargas distribuídas aplicadas no domínio do elemento. Os dois últimos são dados por:

$$\mathbf{F}_r^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1^e r_1 \\ \mathbf{F}_2^e r_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_1 r_1 \\ Q_1 r_1 \\ M_1 r_1 \\ N_2 r_2 \\ Q_2 r_2 \\ M_2 r_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{r1}^e \\ \mathbf{F}_{r2}^e \end{Bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{f}} = \begin{Bmatrix} p_s \\ p_t \end{Bmatrix}$$
(3.26)

onde  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $p_s$  e  $p_t$  são, respectivamente, os raios inicial e final e as taxas de carregamento paralela e transversal à direção do elemento, esta última variando linearmente ao longo do comprimento, sendo dada pela expressão:

$$p_t = \frac{p_{t2} - p_{t1}}{L} s + p_{t1} \quad (3.27)$$

Após a integração e manipulações algébricas, chega-se à seguinte expressão:

$$\delta W_e = 2\pi\delta(\mathbf{u}^e)^T [\mathbf{F}_{eq}^e + \mathbf{F}_r^e] \quad (3.28)$$

onde  $\mathbf{F}_{eq}^e$  e  $\mathbf{F}_r^e$  são, respectivamente, o vetor de forças nodais equivalente e o vetor de forças nodais (multiplicadas pelo raio).

### 3.7 Aplicação do PTV

A aplicação do PTV, através da igualdade entre as expressões (3.22) do TVI e (3.28) do TVE, fornece:

$$\int_0^L \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{u}^e r(s) ds = \mathbf{F}_{eq}^e + \mathbf{F}_r^e + \mathbf{F}_t^e \quad (3.29)$$

Do primeiro membro da equação, obtém-se a matriz de rigidez do elemento  $\mathbf{K}^e$ , em coordenadas globais:

$$\mathbf{K}^e = \int_0^L \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} r(s) ds \quad (3.30)$$

Podendo também ser expressa por:

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{K}}^e \mathbf{T} \quad (3.31)$$

onde  $\bar{\mathbf{K}}^e$  é a matriz de rigidez do elemento em coordenadas locais, dada por:

$$\bar{\mathbf{K}}^e = \int_0^L \bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{D}} \bar{\mathbf{B}}(s) r(s) ds \quad (3.32)$$

Assim, a equação (3.29) é reescrita como:

$$\mathbf{K}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{F}_{eq}^e + \mathbf{F}_r^e + \mathbf{F}_t^e \quad (3.33)$$

### 3.8 Parâmetros globais e sistema de equações

Uma vez obtidos os parâmetros locais dos elementos, matrizes de rigidez e vetores de ações nodais, parte-se para a obtenção dos parâmetros globais, através da superposição das contribuições de cada elemento. Assim, a matriz de rigidez global da estrutura,  $\mathbf{K}^g$ , é obtida conforme ilustrado na Figura 3.4.

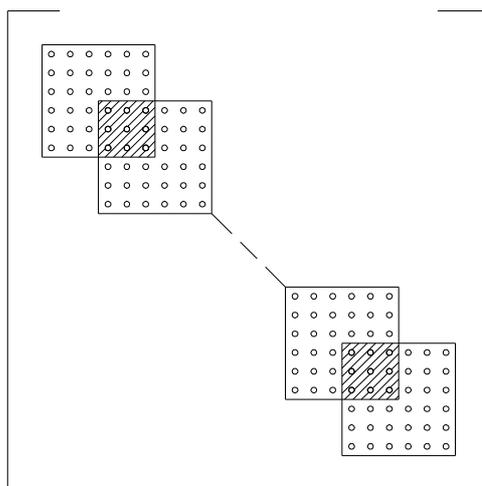


Figura 3.4 Matriz de rigidez global da casca

O mesmo procedimento é utilizado em relação ao vetor de cargas global,  $\mathbf{F}^g$ , que leva em conta o vetor de forças prescritas na estrutura e os vetores de forças equivalentes nodais de todos os elementos. A Figura 3.5 ilustra esse processo.

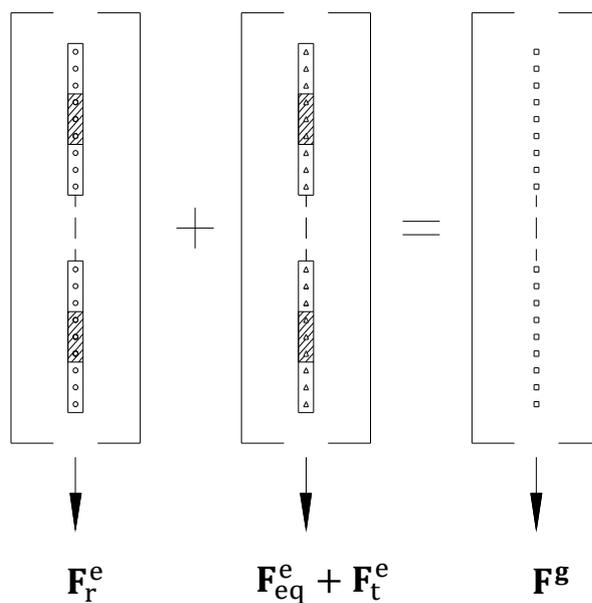


Figura 3.5 Montagem do vetor global de cargas nodais

Uma vez obtidos a matriz de rigidez global e o vetor de cargas global, chega-se a um sistema de equações lineares (**Erro! Fonte de referência não encontrada.**) expresso por:

$$\mathbf{K}^g \mathbf{U} = \mathbf{F}^g \quad (3.34)$$

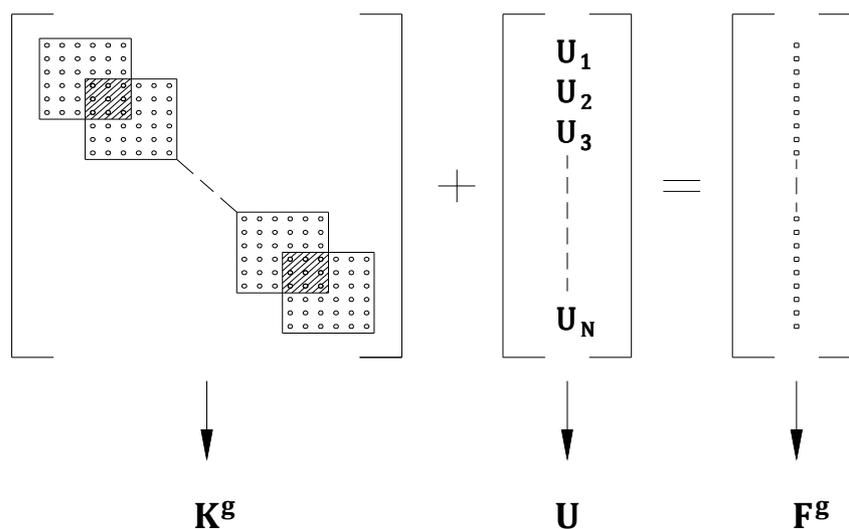


Figura 3.6 Sistema de equações lineares

A sua resolução é feita através do Método de Gauss impondo-se, previamente, as condições de contorno cinemáticas, as quais dependem do tipo de vinculação externa da casca. As referidas condições são introduzidas através da técnica dos zeros e uns, conforme utilizado em Mittelbach (2002).

Uma vez resolvido o sistema, ou seja, obtido o vetor  $\mathbf{U}$  de deslocamentos da estrutura, constrói-se, para cada elemento, o respectivo vetor de deslocamentos nodais. Dessa maneira, podem-se calcular os esforços nos elementos através da expressão:

$$\bar{\mathbf{F}}_r^e = \bar{\mathbf{K}}^e \bar{\mathbf{u}}^e - \bar{\mathbf{F}}_{el}^e - \bar{\mathbf{F}}_t^e \quad (3.35)$$

onde todos os parâmetros se referem ao sistema local de coordenadas.

A partir da formulação apresentada neste capítulo, desenvolveu-se um código computacional e os resultados obtidos, bem como a verificação de sua acurácia, são apresentados no Capítulo 4, a seguir.

## CAPÍTULO 4

# Apresentação e Análise dos Resultados

### 4.1 Introdução

Neste capítulo, são abordados aspectos sobre o desenvolvimento e funcionamento do código computacional, tais como a integração numérica e os tipos de discretização utilizados nos problemas.

Em seguida, trata-se da validação de resultados, onde serão analisados diferentes exemplos de estruturas axissimétricas, tendo-se soluções analíticas como valores referência para análise do erro. Por fim, serão analisados exemplos de peças acopladas.

### 4.2 Código computacional

A ferramenta computacional desenvolvida neste trabalho teve como base a formulação numérica apresentada no Capítulo 3, implementada através da linguagem de programação FORTRAN 95. A seguir, são explicados alguns aspectos da rotina da ferramenta desenvolvida.

#### 4.2.1 Placas Circulares e Cascas Esféricas

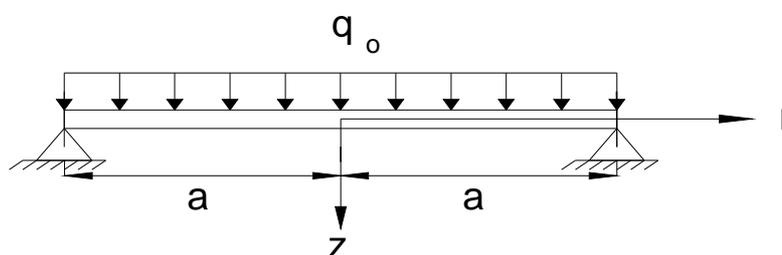
Na formulação do capítulo anterior, cada elemento finito apresenta uma inclinação  $\phi$ , constante ao longo de seu comprimento. Assim, considerando-se a axissimetria e mantendo-se constante o ângulo  $\phi$  de todos os elementos ao longo da seção transversal da casca, obtém-se a geratriz de um tronco de cone. Se o referido ângulo apresentar valor nulo ou igual a  $-\pi$ , a geratriz representará uma casca cilíndrica. Do mesmo modo, se o ângulo  $\phi$  for igual a  $\pi/2$  ou a  $-\pi/2$ , a geratriz descreve uma placa axissimétrica.

Uma abordagem analítica tratando da obtenção de modelos de placas e cascas cilíndricas axissimétricas a partir de uma formulação geral para cascas cônicas pode ser encontrada em Rodrigues (2009). No que diz respeito a métodos numéricos, Bhatia e Sekhon (1999) mencionam que Ross desenvolveu um elemento cilíndrico de casca e um elemento de casca axissimétrico com curvatura meridional constante.

Sobre a discretização de cascas esféricas e outras superfícies axissimétricas curvas, levou-se em conta, nesta dissertação, o que é explicado em Zienkiewicz e Taylor (2000); Segundo eles, através da formulação para elemento retilíneo abordada neste trabalho, a continuidade entre os elementos de casca é sempre satisfeita e, portanto, para uma casca axissimétrica com meridiano poligonal sempre haverá convergência.

Nos modelos de estruturas axissimétricas obtidos pela formulação utilizada nesta dissertação, existe ainda uma limitação de outra natureza, relacionada à continuidade geométrica das estruturas. Em decorrência dela, placas axissimétricas geometricamente contínuas em seu centro, cúpulas esféricas sem abertura na parte superior, entre outros exemplos de estruturas de superfície com geometria contínua em seu eixo de revolução, apresentam uma restrição no cálculo dos esforços internos.

Tomando-se como exemplo a placa axissimétrica da Figura 4.1, devido ao problema de continuidade citado, não é possível calcular os esforços internos do nó de coordenada  $r = 0$ .



**Figura 4.1 Placa axissimétrica maciça**

Isso ocorre porque os esforços internos apresentam dimensão de força (ou momento) dividida por unidade de comprimento, sendo necessário, durante o procedimento descrito no item 3.8, que se efetue uma divisão pelo raio referente à

posição do elemento. Assim, na implementação numérica, em  $r = 0$ , ocorre uma divisão por zero, gerando uma indeterminação no resultado.

Tal incompatibilidade ocorre somente no cálculo dos esforços internos, e na seção central da estrutura, de coordenada global  $z = 0$ . Desse modo e, sabendo-se também que essa indeterminação não ocorre nas respostas analíticas de referência, testou-se três soluções.

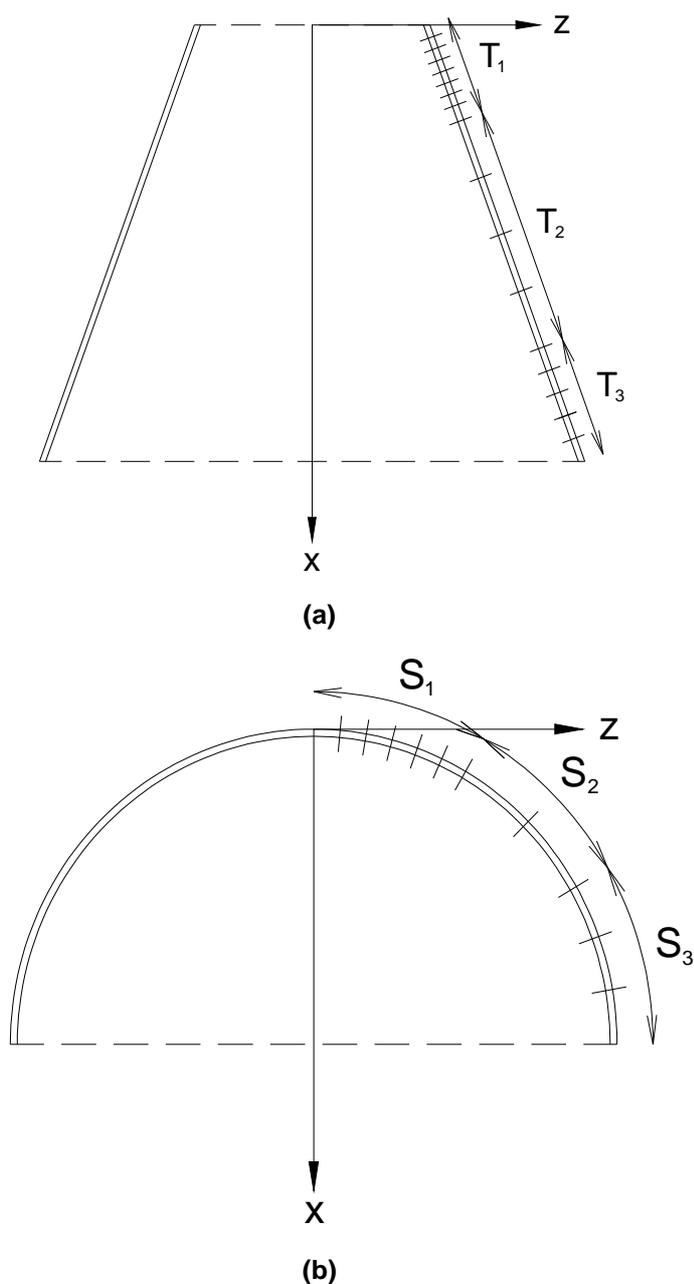
Inicialmente, foram feitos sucessivos refinamentos de malha nas proximidades da seção central, os quais mostraram uma convergência dos valores em relação à solução analítica à medida que se aumentava o número de elementos finitos. Apesar de fornecer resultados satisfatórios, esta aproximação resulta em um aumento substancial no número total de elementos da malha, sendo descartada sua utilização.

A segunda solução tratava da simulação da continuidade por um furo central muito pequeno, da ordem de  $1,0 \times 10^{-3}$  a  $1,0 \times 10^{-16}$ . Entretanto, erros de arredondamento foram verificados, sendo, dessa forma, abandonado este procedimento. Dessa forma, partiu-se para a estimativa dos referidos esforços a partir da extrapolação dos resultados, com base nos valores de esforços das seções da vizinhança.

Todos estes procedimentos ainda levam em conta a continuidade do carregamento, ou seja, a não existência de cargas concentradas aplicadas sobre o nó central. De fato, não devem existir cargas concentradas, uma vez que, assim como os esforços internos, os carregamentos de contorno estão relacionados ao raio de sua posição; dessa forma, para um raio nulo a resultante é nula, não sendo possível considerar, na rotina desenvolvida, cargas concentradas atuantes no nó central.

#### **4.2.2 Tipos de discretização**

No algoritmo desenvolvido, cada peça pode apresentar 3 diferentes trechos de discretização, conforme ilustra a Figura 4.2.



**Figura 4.2 Exemplos de discretização (a) casca cônica (b) casca esférica**

Esta consideração permite um refino mais intenso nos bordos, onde as peças se conectam a outros elementos ou aos apoios da estrutura, sendo esta a região onde geralmente ocorre a concentração dos valores extremos (máximos ou mínimos) de deflexões e esforços internos. Caso a discretização seja uniforme, somente o trecho  $T_1$  (ou  $S_1$  para setores de esfera) será ativado. Podem ainda ser ativados apenas dois trechos (por exemplo,  $T_1 = 0$ ,  $T_2 \neq 0$  e  $T_3 \neq 0$ ).

### 4.2.3 Integração numérica

De acordo com a formulação do Capítulo 3, observa-se que é necessário realizar integração numérica durante o processo de resolução. A expressão (3.30), a qual representa a matriz de rigidez de cada elemento, é um exemplo de função polinomial que depende da variável raio, devendo, portanto, ser integrada. Para tanto, optou-se por utilizar a Regra de Quadratura de Gauss como método de integração numérica, sendo esta escolha decorrente de sua eficiência, adequação, e simplicidade de implementação.

Segundo Rodrigues (2009), que analisou o erro na integração da matriz de rigidez de um elemento finito, realizada através da Regra de Quadratura de Gauss, a partir de 4 pontos o erro relativo já é bastante baixo, sendo este inferior a 1%. Entretanto, o mesmo autor afirma ainda que, embora seja possível fazer deduções a partir de seu estudo da matriz de rigidez, obtendo-se uma idéia da grandeza do número de pontos de Gauss a utilizar na integração, estas informações não podem ser rigorosamente generalizadas para diferentes tipos de problemas.

Assim sendo, decidiu-se realizar um teste baseado no procedimento por ele adotado, utilizando-se uma casca cilíndrica discretizada por um único elemento finito. Os resultados obtidos pela integração numérica, utilizando 2 e 4 pontos de Gauss, foram comparados com os respectivos valores calculados pela expressão exata da matriz de rigidez, apresentada em Vieira (2007). Os resultados obtidos estão apresentados na Tabela 4.1 e na Tabela 4.2.

**Tabela 4.1 Erro (%) da Matriz de Rigidez para 2 pontos de Gauss**

|   | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         |
|---|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1 | 0.00E+00  | 0.00E+00  | -3.28E-08 | 0.00E+00  | -1.21E-14 | -3.28E-08 |
| 2 | 0.00E+00  | -7.19E+00 | -1.49E+01 | 0.00E+00  | 2.08E+01  | 2.52E+01  |
| 3 | -3.28E-08 | -1.49E+01 | 2.78E+00  | -3.28E-08 | 2.52E+01  | 3.52E+01  |
| 4 | 0.00E+00  | 0.00E+00  | -3.28E-08 | 0.00E+00  | -1.21E-14 | -3.28E-08 |
| 5 | -1.21E-14 | 2.08E+01  | 2.52E+01  | -1.21E-14 | -7.19E+00 | -1.49E+01 |
| 6 | -3.28E-08 | 2.52E+01  | 3.52E+01  | -3.28E-08 | -1.49E+01 | 2.78E+00  |

Tabela 4.2 Erro (%) da Matriz de Rigidez para 4 pontos de Gauss

|   | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         |
|---|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1 | 0.00E+00  | 0.00E+00  | -4.17E-06 | 0.00E+00  | 0.00E+00  | -4.17E-06 |
| 2 | 0.00E+00  | 2.11E-06  | -2.95E-06 | 0.00E+00  | -6.10E-06 | -6.25E-06 |
| 3 | -4.17E-06 | -2.95E-06 | -5.52E-06 | -4.17E-06 | -6.25E-06 | -6.57E-06 |
| 4 | 0.00E+00  | 0.00E+00  | -4.17E-06 | 0.00E+00  | 0.00E+00  | -4.17E-06 |
| 5 | 0.00E+00  | -6.10E-06 | -6.25E-06 | 0.00E+00  | 2.11E-06  | -2.95E-06 |
| 6 | -4.17E-06 | -6.25E-06 | -6.57E-06 | -4.17E-06 | -2.95E-06 | -5.52E-06 |

A partir destas tabelas, nas quais cada item representa o erro relativo para um dos elementos da matriz de rigidez, observaram-se, para 2 pontos de Gauss, erros de ordem muito baixa em alguns itens; até mesmo menores do que os provenientes do emprego de 4 pontos, como é o caso do referente à linha 6, coluna 1. Entretanto, outros itens da Tabela 4.1 apresentam erros de até 35 % e, além disso, nota-se uma uniformidade nos resultados correspondentes a 4 pontos de Gauss, já que os erros máximos não ultrapassam a ordem de  $1 \times 10^{-6}$ .

Por esses motivos, optou-se por utilizar 4 pontos de Gauss na rotina de integração do algoritmo desenvolvido. Uma vez que os resultados desta análise se mostraram coerentes com as observações feitas por Rodrigues (2009) e que, além disso, caracterizam uma boa precisão para os valores da matriz de rigidez, descartou-se a possibilidade de utilização de um maior número de pontos de Gauss, visando à diminuição do esforço computacional.

#### 4.2.4 Representação do erro

O erro de uma solução numérica pode ser determinado de maneira exata caso haja uma solução analítica disponível. Nesta dissertação, serão utilizadas soluções analíticas como referência, sendo possível, portanto, determiná-lo de maneira exata. Ele pode ser expresso de forma absoluta ou relativa, sendo esta última definida como:

$$E_{\text{rel}} = \left| \frac{E}{a_{\text{ex}}} \right| = \frac{|a_{\text{ex}} - a_{\text{num}}|}{a_{\text{ex}}} \quad (4.1)$$

onde  $a_{ex}$  e  $a_{num}$  são, respectivamente, os valores exato e numérico da grandeza considerada.

O erro absoluto representa o numerador da expressão (4.1), ou seja,  $E_{abs} = E = |a_{ex} - a_{num}|$ . Nos exemplos de cálculo do presente capítulo, optou-se pela representação do erro de forma relativa, através de porcentagem, de modo que:

$$E_{rel(\%)} = \left| \frac{E}{a_{ex}} \right| \times 100 = \frac{|a_{ex} - a_{num}|}{a_{ex}} \times 100 \quad (4.2)$$

### 4.3 Exemplos de validação

Neste item, são apresentados os resultados obtidos, a partir do código computacional desenvolvido, para exemplos de peças estruturais isoladas e acopladas. No subitem 4.3.1, são tratados quatro tipos de peças isoladas, semelhantes às usadas em 4.3.2, onde se estudam peças acopladas. Neste primeiro subitem, analisa-se o desempenho de diferentes malhas na obtenção dos resultados e, dessa forma, são determinadas as discretizações a serem utilizadas para cada tipo de geometria em 4.3.2.

Em cada exemplo, montou-se uma tabela para apresentação do erro relativo entre os resultados de cada discretização e os valores de referência. Nestas tabelas, são analisados os deslocamentos  $u$  e  $w$ , nas direções globais, ou apenas o mais relevante, dependendo do tipo de geometria, vinculação e solicitação da estrutura. O mesmo ocorre em relação aos esforços de membrana  $N_{\phi}$  e de flexão  $M_{\phi}$ , os quais assumem nomenclaturas diferentes, de acordo com o tipo de elemento estrutural.

O erro é apresentado de forma relativa, conforme explicado em 4.2.4, e calculado da mesma maneira para deslocamentos e esforços. No caso de  $w$ , tem-se:

$$E_{rel.(\%)} = \left( \frac{W_{m\acute{a}x.An.} - W_{m\acute{a}x.MEF}}{W_{m\acute{a}x.An.}} \right) \times 100 \quad (4.3)$$

sendo  $w_{\text{máx. An}}$  e  $w_{\text{máx. MEF}}$  os valores de  $w$  obtidos, respectivamente, a partir do programa e pelas soluções analíticas de referência.

### 4.3.1 Peças isoladas e análise da discretização

Em cada exemplo, assim como em Mittelbach (2002) e Vieira (2007), inicia-se a análise da peça a partir de uma discretização uniforme, sendo posteriormente adotadas malhas não-uniformes, visando à melhoria dos resultados nas regiões de ocorrência de perturbações de bordo.

#### 4.3.1.1 Exemplo 1 – Casca Cilíndrica apoiada na base, submetida à pressão hidrostática e a uma força prescrita por unidade de comprimento ao longo do perímetro superior

O exemplo encontra-se representado na Figura 4.3, onde também são indicados os dados geométricos, da solicitação e do material da casca.

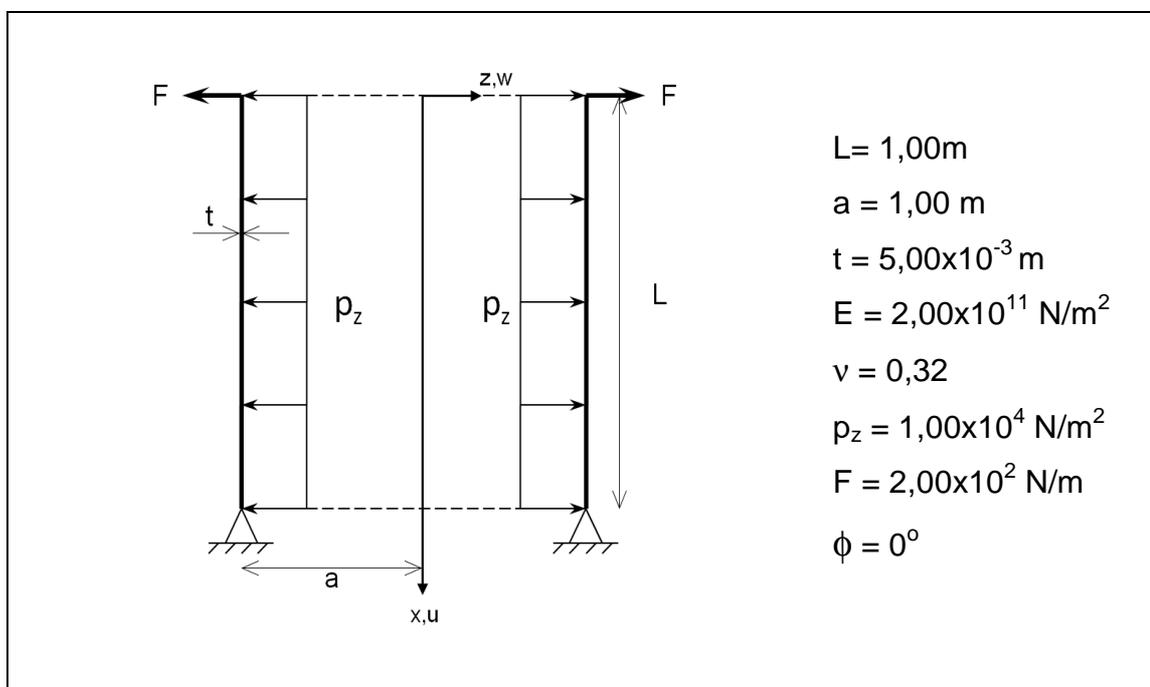


Figura 4.3 Representação e dados do exemplo 4.3.1.1

As discretizações utilizadas, com base na distribuição ilustrada na Figura 4.2, estão indicadas na Tabela 4.3 a seguir.

Tabela 4.3 Discretizações utilizadas no exemplo 4.3.1.1

| Discret. | Tipo         | Comp. dos trechos (m) | Numero de elementos | Comp. dos elementos (m) |
|----------|--------------|-----------------------|---------------------|-------------------------|
| MEF I    | Uniforme     | $T_1 = 1$             | 30                  | 0,033                   |
| MEF II   | Não-uniforme | $T_1 = 0,13$          | 10                  | 0,020                   |
|          |              | $T_2 = 0,74$          | 10                  | 0,060                   |
|          |              | $T_3 = 0,13$          | 10                  | 0,020                   |

Apresentam-se, a seguir, os resultados obtidos para o problema. Os valores máximos (em módulo) de  $w$  e  $M_x$  nos bordos da casca cilíndrica, para cada discretização e para as fórmulas analíticas são apresentados nas Tabelas 4.4 e 4.5. As curvas de  $w$  (ampliado  $1 \times 10^5$  vezes) e  $M_x$  ao longo da casca cilíndrica estão representadas nas Figura 4.4 e Figura 4.5.

Tabela 4.4 Valores máximos de  $w$ 

| Modelo    | Bordo Superior |              |          | Bordo Inferior |              |          |
|-----------|----------------|--------------|----------|----------------|--------------|----------|
|           | w máx. (m)     | orden. x (m) | erro (%) | w máx. (m)     | orden. x (m) | erro (%) |
| Analítico | 1,725E-05      | 0            | -        | 1,067E-05      | 0,870        | -        |
| MEF I     | 1,721E-05      | 0            | 0,237    | 1,066E-05      | 0,867        | 0,090    |
| MEF II    | 1,723E-05      | 0            | 0,042    | 1,065E-05      | 0,870        | 0,078    |

Tabela 4.5 Valores máximos de  $M_x$ 

| Modelo    | Bordo Superior    |              |          | Bordo Inferior    |              |          |
|-----------|-------------------|--------------|----------|-------------------|--------------|----------|
|           | $M_x$ máx. (Nm/m) | orden. x (m) | erro (%) | $M_x$ máx. (Nm/m) | orden. x (m) | erro (%) |
| Analítico | -3,559E-00        | 0,044        | -        | 4,911E+00         | 0,956        | -        |
| MEF I     | -3,400E-00        | 0,033        | 4,460    | 4,797E+00         | 0,967        | 3,910    |
| MEF II    | -3,535E-00        | 0,040        | 0,667    | 4,934E+00         | 0,960        | 0,468    |

Para a peça deste exemplo, a presença de uma força prescrita no bordo superior e de um apoio do segundo gênero em sua base originam deslocamentos e

esforços de flexão nestas regiões. Entretanto, o efeito da flexão é amortecido quanto maior for a distância do ponto considerado em relação aos extremos da peça e, por este motivo, em sua parte central ela trabalha sob regime de membrana. A seguir, comentam-se os resultados obtidos para cada discretização.

### **Discretização MEF I**

Os resultados obtidos com esta malha foram satisfatórios em relação à determinação de  $w$ , já que, segundo a Tabela 4.4, o erro correspondente aos valores máximos em ambos os bordos não chega a 1% e, na Figura 4.4, a curva que a representa tem configuração muito semelhante à da resposta analítica.

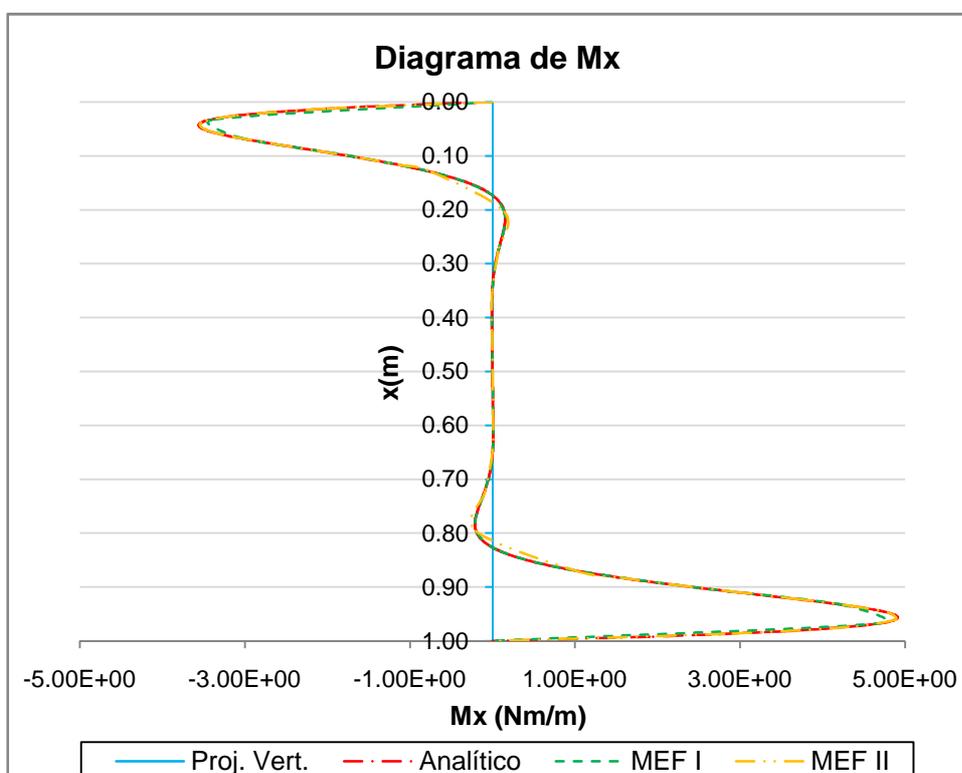
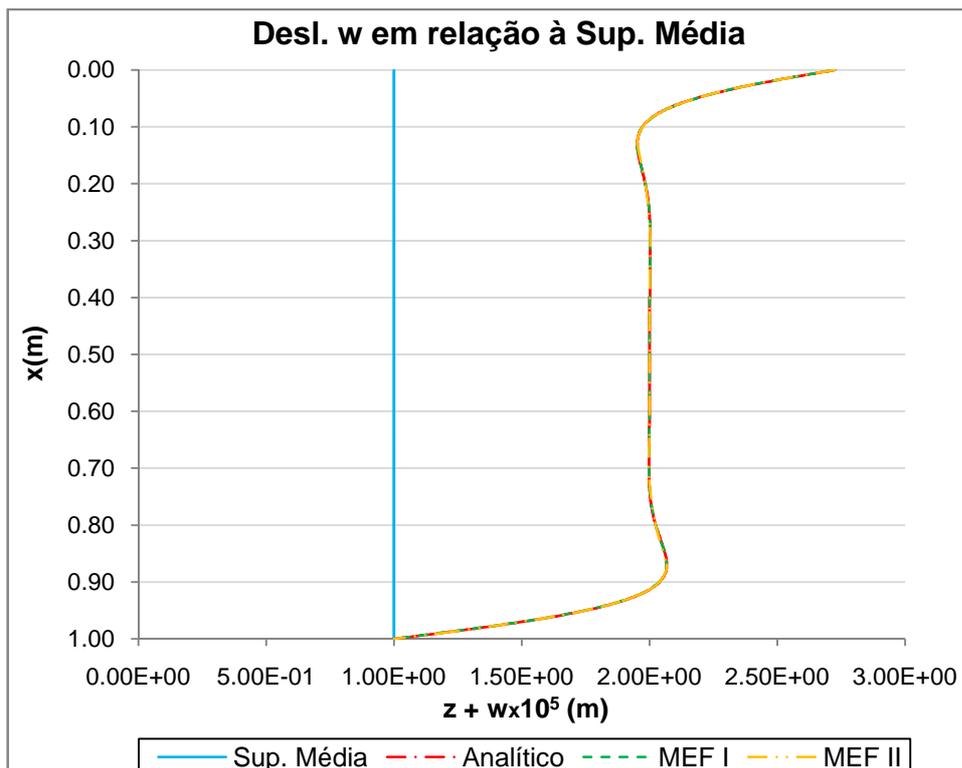
Sobre os resultados de  $M_x$ , o maior erro ocorre no bordo inferior, sendo da ordem de 4% e na Figura 4.5 sua curva apresenta bom comportamento em relação à da solução analítica.

Apesar de os resultados já serem considerados satisfatórios, buscou-se uma melhoria na determinação de  $M_x$ , através da utilização de uma discretização com refino nas proximidades dos contornos da peça, região de ocorrência das perturbações de bordo.

### **Discretização MEF II**

Com o refino adotado nesta segunda discretização, os resultados obtidos foram ainda melhores na determinação dos valores máximos de  $w$ , uma vez que o erro em ambos os bordos foi inferior a 0,08%. Observa-se também, a partir da Figura 4.1, que a curva apresenta bom comportamento até mesmo na região central, menos refinada.

Obteve-se uma melhora considerável em relação aos valores máximos do momento fletor, sendo o erro menor que 0,7% em ambos os bordos. A Figura 4.2 evidencia os bons resultados obtidos, uma vez que as curvas correspondentes à discretização MEF II e à solução analítica apresentam comportamento muito semelhante nas proximidades dos bordos. Entretanto, na parte central da peça, as referidas curvas apresentam configuração levemente distinta em alguns trechos, devido ao menor refinamento de MEF II nesta região.



### 4.3.1.2 Exemplo 2 – Casca esférica apoiada na base sob atuação de seu peso próprio

O exemplo encontra-se representado na Figura 4.6, onde também são indicados os dados geométricos, da solicitação e do material da casca.

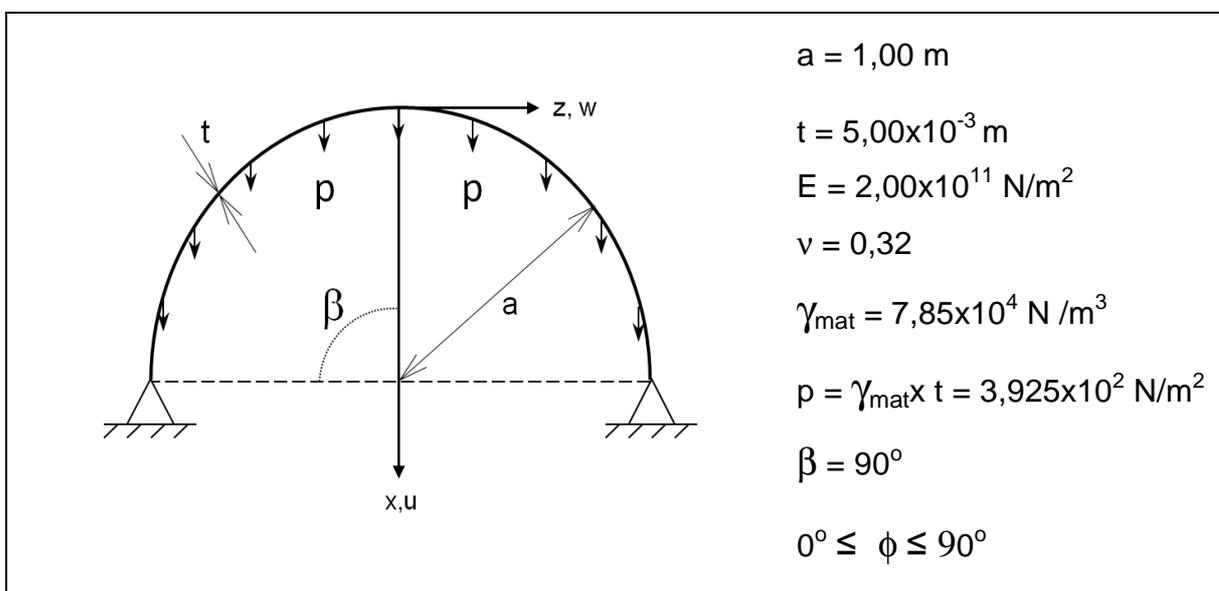


Figura 4.6 Representação e dados do exemplo 4.3.1.2

As discretizações utilizadas, com base na distribuição ilustrada na Figura 4.2, estão indicadas na Tabela 4.6 a seguir.

Tabela 4.6 Discretizações utilizadas no exemplo 4.3.1.2

| Discret. | Tipo         | Ângulos dos trechos (graus) | Numero de elementos | Comp. dos elementos (m) |
|----------|--------------|-----------------------------|---------------------|-------------------------|
| MEF I    | Uniforme     | $S_1 = 90,00$               | 50                  | 0,031                   |
| MEF II   | Não-uniforme | $S_1 = 80,00$               | 30                  | 0,047                   |
|          |              | $S_2 = 10,00$               | 20                  | 0,009                   |

Apresentam-se, a seguir, os resultados obtidos para o problema. Os valores máximos (em módulo) de  $w$ ,  $M_\phi$  e  $N_\phi$  da semi-esfera, para cada discretização e para as fórmulas analíticas são apresentados nas Tabelas 4.7, 4.8 e 4.9.

As curvas de  $w$  (ampliado  $1 \times 10^5$  vezes),  $N_\phi$  e  $M_\phi$  ao longo da casca esférica estão representadas nos Figuras 4.8 e 4.9.

**Tabela 4.7 Valores máximos de  $w$**

| Modelo    | Bordo Inferior |              |          |
|-----------|----------------|--------------|----------|
|           | $w$ máx. (m)   | orden. x (m) | erro (%) |
| Analítico | 4,499E-07      | 0,897        | -        |
| MEF I     | 4,428E-07      | 0,906        | 1,561    |
| MEF II    | 4,550E-07      | 0,895        | -1,135   |

**Tabela 4.8 Valores máximos de  $M_\phi$**

| Modelo    | Bordo Inferior       |              |          |
|-----------|----------------------|--------------|----------|
|           | $M_\phi$ máx. (Nm/m) | orden. x (m) | erro (%) |
| Analítico | 2,545E-01            | 0,956        | -        |
| MEF I     | 2,562E-01            | 0,969        | -0,691   |
| MEF II    | 2,545E-01            | 0,956        | -0,023   |

**Tabela 4.9 Valores máximos de  $N_\phi$**

| Modelo    | Bordo Inferior      |              |          |
|-----------|---------------------|--------------|----------|
|           | $N_\phi$ máx. (N/m) | orden. x (m) | erro (%) |
| Analítico | -3,925E+02          | 1,000        | -        |
| MEF I     | -3,926E+02          | 1,000        | -0,025   |
| MEF II    | -3,925E+02          | 1,000        | -0,000   |

Na peça em questão, devido à atuação do peso próprio, predominam esforços de membrana que, assim como os momentos fletores e deslocamentos  $w$ , apresentam maiores valores próximo aos apoios. Assim, considerou-se a análise de máximos apenas no bordo inferior.

A seguir, comentam-se os resultados obtidos para cada discretização.

### **Discretização MEF I**

Os resultados obtidos para esta discretização já apresentam boa acurácia, de modo geral. Em relação a  $w$ , o erro em relação ao valor máximo é menor que 2% e em relação a  $M_\phi$  e  $N_\phi$ , os erros não ultrapassam 0,7% e 0,03%, respectivamente. Em relação às Figuras 4.7 a 4.9, a curva que representa  $M_\phi$  apresenta configuração semelhante e valores muito próximos aos da solução de referência da base até o valor máximo, depois do qual as curvas se distanciam, apresentando, contudo, a mesma configuração.

Já as curvas de  $w$  e de  $N_\phi$  apresentam a mesma configuração e valores muito próximos aos da solução de referência ao longo de todo o domínio da casca.

### **Discretizações MEF II e MEF III**

Para MEF II, em relação ao ponto do deslocamento máximo, houve uma suave diminuição do erro, o qual passou a ser da ordem de 0,02% para o momento fletor e nulo em relação a  $N_\phi$ . É interessante notar que, em relação aos esforços internos, as ordenadas de ocorrência do valor máximo são coincidentes (considerando 4 dígitos significativos) com as da solução analítica, o que proporcionou uma melhoria brusca nos valores do momento. Para o deslocamento, apesar de a ordenada ser muito próxima, seria necessário um maior refino para melhoria do resultado.

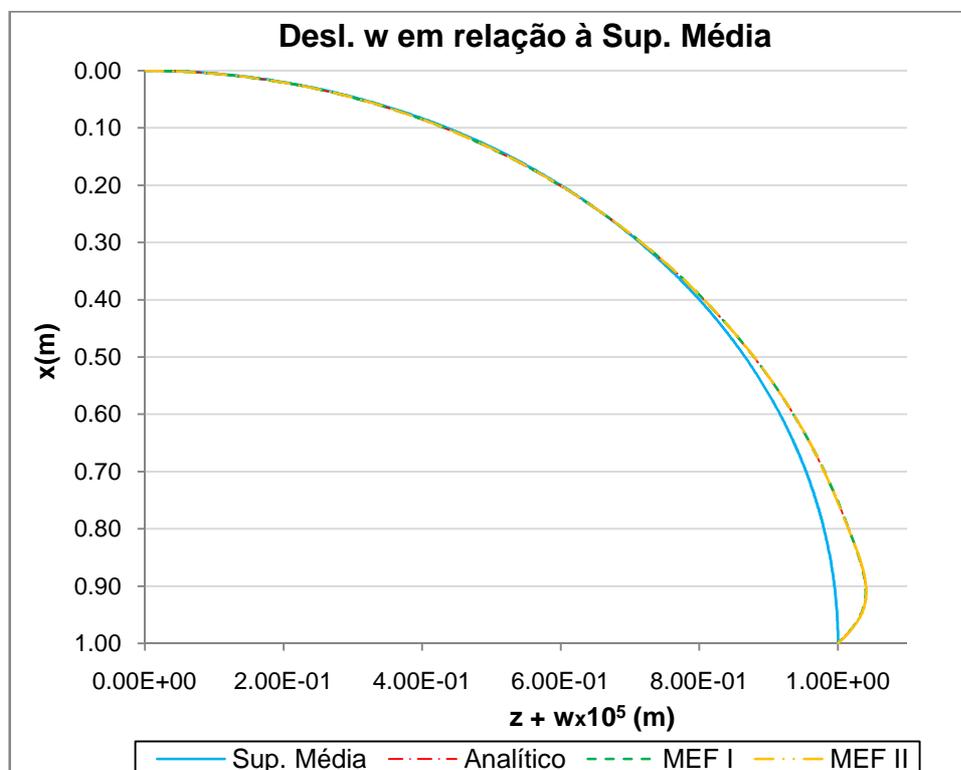
Assim sendo, percebe-se que a acurácia está relacionada tanto ao refino da malha na região de ocorrência do valor máximo quanto à distância de sua coordenada na solução analítica àquela do nó mais próximo (no modelo discretizado).

No que diz respeito às curvas, as de  $w$  e de  $N_\phi$  permanecem com mesma configuração da solução ao longo da semi-esfera e, por outro lado, o diagrama de  $M_\phi$  apresenta ótima configuração no entorno do máximo, distanciando-se de forma relevante em relação à resposta analítica após este valor. Isto ocorre devido à mudança de refino entre os trechos da discretização e como nessa região a malha

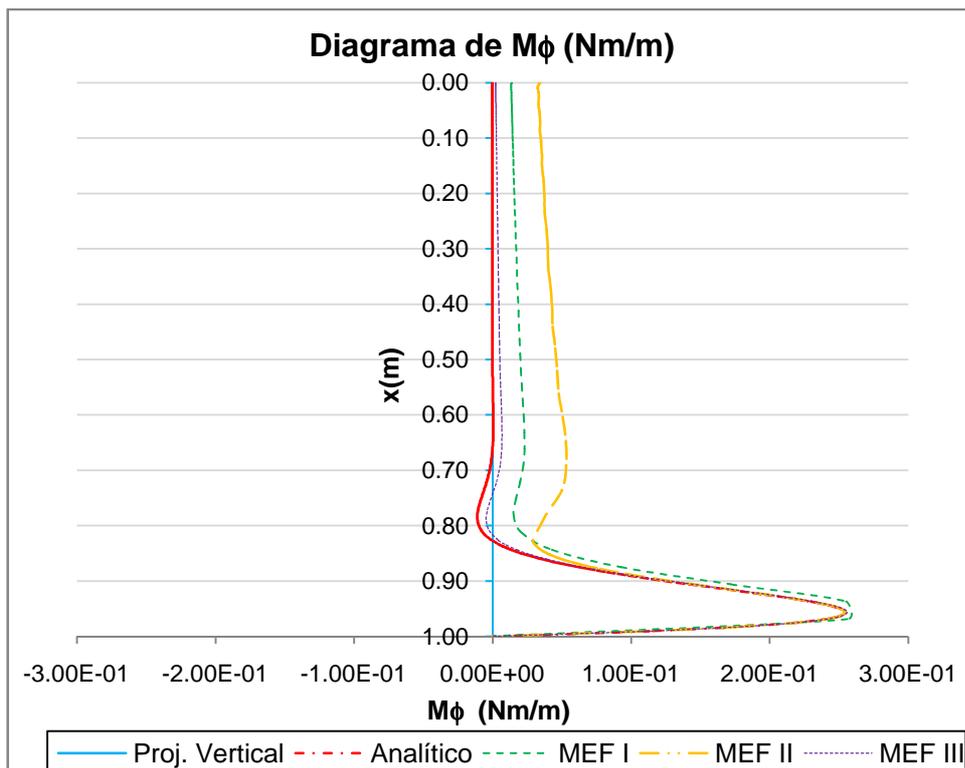
de MEF II apresenta maior espaçamento do que a de MEF I, explica-se a razão de esta última apresentar melhor comportamento neste trecho.

Segundo Zienkiewicz e Taylor (2000), sobre o problema da aproximação de uma casca curva por um modelo poligonal, muitos exemplos indicam que ocorre convergência. Quando o carregamento causa esforços predominantemente de membrana, existem discrepâncias no valor do momento, que tendem a desaparecer com o aumento do número de elementos finitos. Este refinamento é necessário para eliminar a aproximação física envolvida na representação da casca por uma série de troncos de cone.

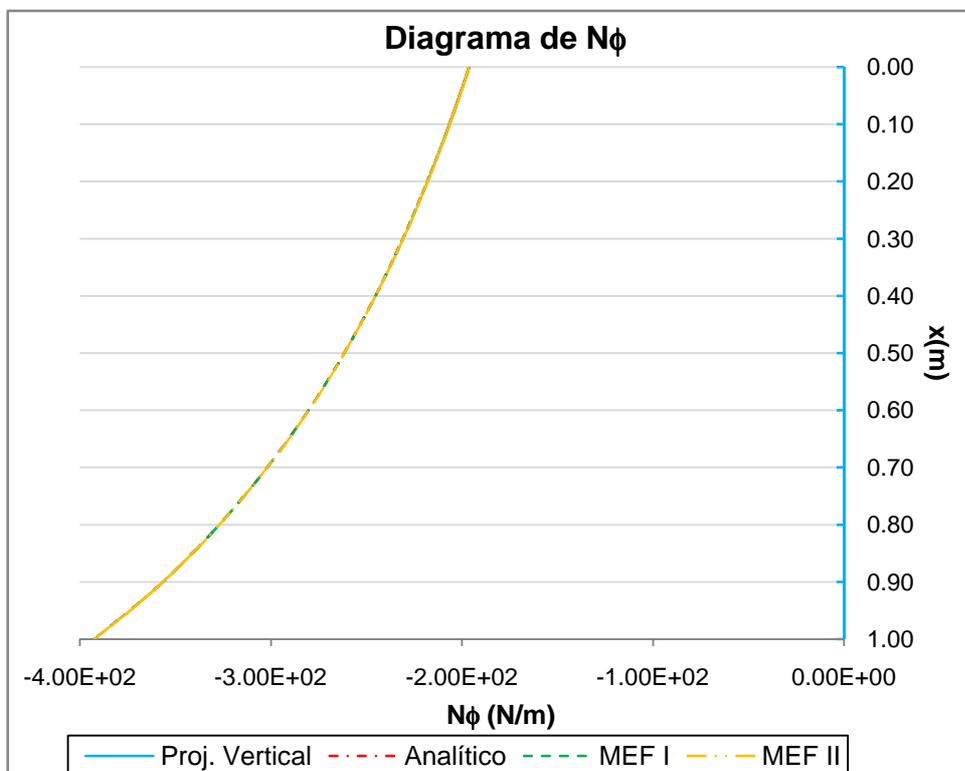
Dessa forma, visando à comprovação do que acaba de ser explicado, utilizou-se mais uma discretização, MEF III, a qual apresenta o mesmo refino em torno do máximo, mas com maior número de elementos na região inicial ( $S_1=80^\circ$ ). A resposta obtida, como esperado, foi mais satisfatória, pois o aumento no número de elementos no trecho mencionado ocasionou a melhoria da aproximação da esfera por um polígono.



**Figura 4.7 Deslocamento w da casca esférica**



**Figura 4.8 Diagrama de  $M_x$  da casca esférica**



**Figura 4.9 Diagrama de  $N_x$  da casca esférica**

### 4.3.1.3 Exemplo 3 – Placa circular apoiada submetida a carregamento lateral uniforme, variação uniforme de temperatura e momento nos bordos

O exemplo encontra-se representado na Figura 4.10, onde também são indicados os dados geométricos, da solicitação e do material da placa.

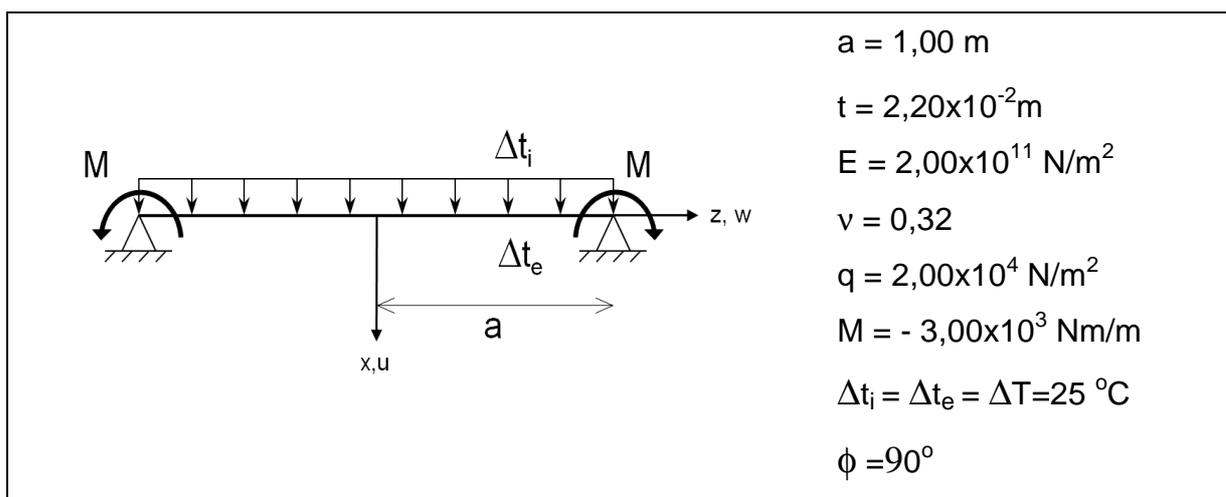


Figura 4.10 Representação e dados do exemplo 4.3.1.3

As discretizações utilizadas, com base na distribuição ilustrada na Figura 4.2, estão indicadas na Tabela 4.10 a seguir.

Tabela 4.10 Discretizações utilizadas no exemplo 4.3.1.3

| Discret. | Tipo     | Comp. dos trechos (m) | Numero de elementos | Comp. dos elementos (m) |
|----------|----------|-----------------------|---------------------|-------------------------|
| MEF I    | Uniforme | $T_1 = 1,00$          | 10                  | 0,100                   |

Apresentam-se, a seguir, os resultados obtidos para o problema. Os valores máximos (em módulo) de  $u$ ,  $M_r$  e  $N_r$  da placa, para a discretização MEF I e para as fórmulas analíticas são apresentados nas Tabelas 4.11, 4.12 e 4.13. Nas Figuras 4.11, 4.12 e 4.13 estão representadas suas respectivas curvas de variação ao longo do raio da placa.

**Tabela 4.11 Valores máximos de u**

| Modelo    | Região Central |               |           |
|-----------|----------------|---------------|-----------|
|           | u máx. (m)     | abscis. z (m) | erro (%)  |
| Analítico | 8,288E-04      | 0             | -         |
| MEF I     | 8,288E-04      | 0             | -1,448E-5 |

**Tabela 4.12 Valores máximos de Mr**

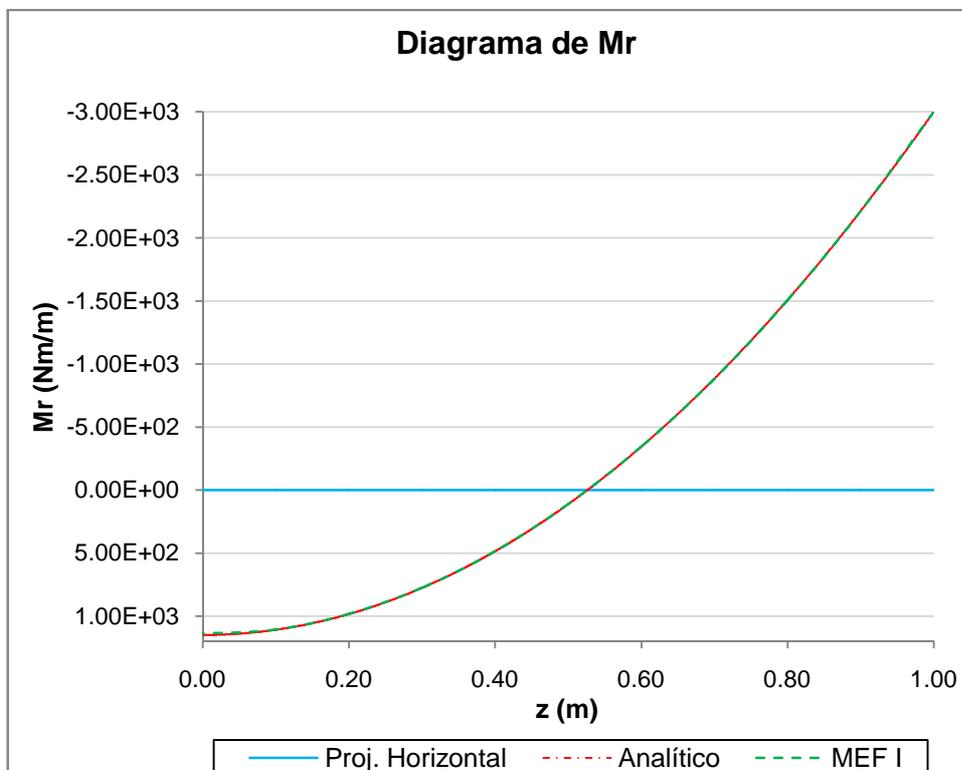
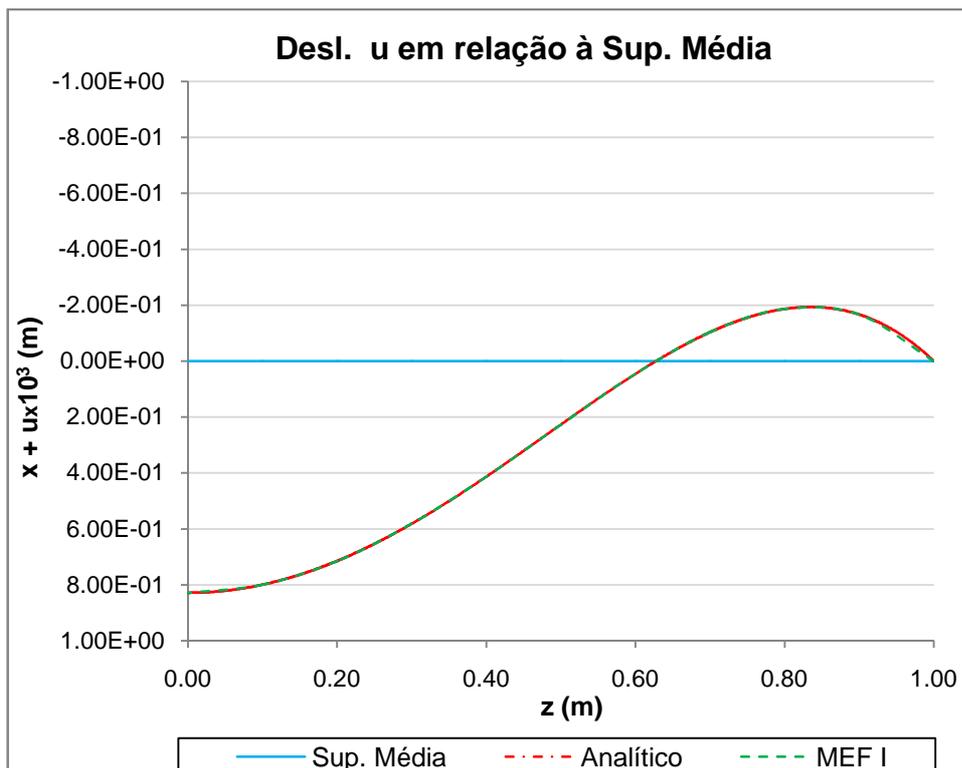
| Modelo    | Região central |               |           |
|-----------|----------------|---------------|-----------|
|           | Mr máx. (Nm/m) | abscis. z (m) | erro (%)  |
| Analítico | 1,150E+03      | 0             | -         |
| MEF I     | 1,139E+03      | 0             | -9,658E-3 |

**Tabela 4.13 Valores máximos de Nr**

| Modelo    | Região central |               |          |
|-----------|----------------|---------------|----------|
|           | Nr máx. (N/m)  | abscis. z (m) | erro (%) |
| Analítico | -1,765E+06     | 0             | -        |
| MEF I     | -1,765E+06     | 0             | 1,666E-4 |

Neste exemplo, a carga distribuída e o momento fletor geram deslocamentos transversais e momentos fletores e a variação de temperatura ocasiona esforços de membrana. Os esforços e deslocamentos de flexão apresentam seus valores com módulo máximo na região central da placa e os esforços de membrana são constantes ao longo de seu raio. Dessa forma, a análise dos máximos foi feita no entorno do centro da placa. A única discretização utilizada, uniforme e composta por apenas 10 elementos, apresentou resultados bastante satisfatórios. De acordo com as Tabelas 4.11 a 4.13, o maior erro se deu na determinação de  $M_r$ , sendo este menor que 0,01%.

As curvas das Figuras 4.11 a 4.13 confirmam o bom desempenho da discretização, pois como se pode observar, as curvas apresentam a mesma configuração e valores muito próximos, sobrepondo-se quase integralmente na escala em que estão representadas.



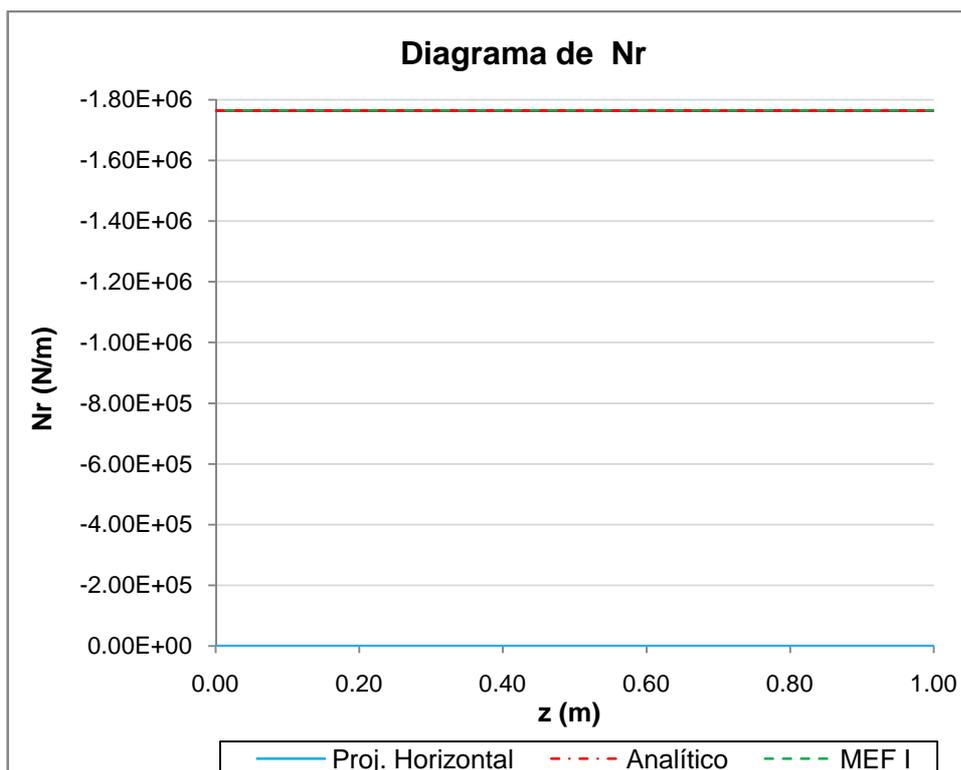


Figura 4.13 Diagrama de Nr da placa

#### 4.3.1.4 Exemplo 4 – Casca cônica apoiada na base sob atuação de seu peso próprio

O exemplo encontra-se representado na Figura 4.14, onde também são indicados os dados geométricos, da solicitação e do material da casca.

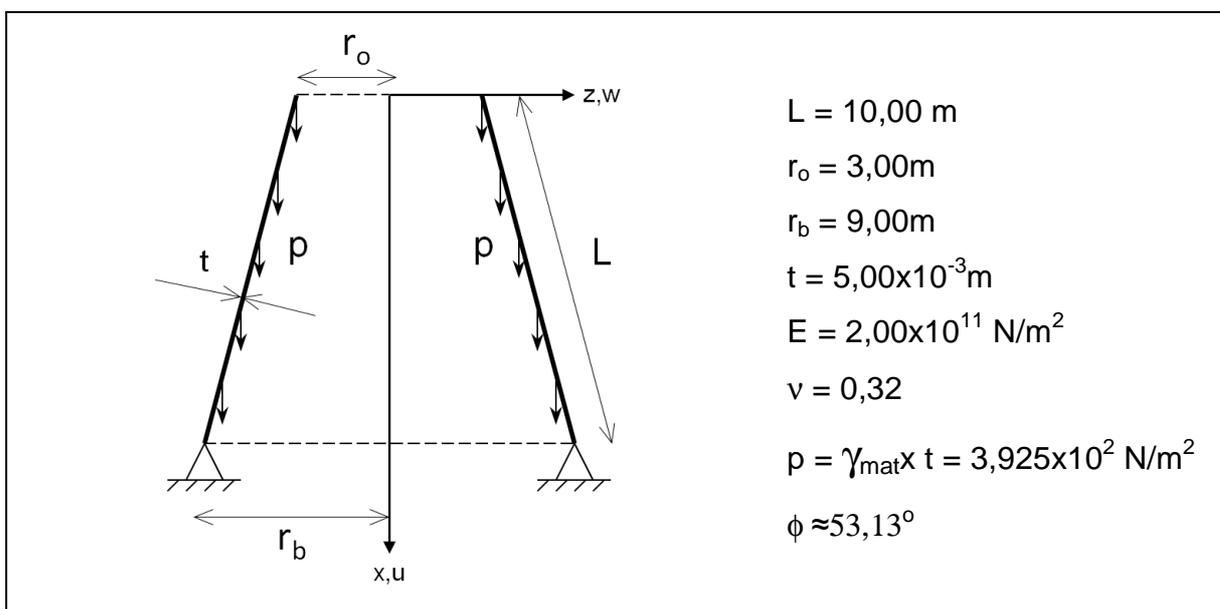


Figura 4.14 Representação e dados do exemplo 4.3.1.4

As discretizações utilizadas, com base na distribuição ilustrada na Figura 4.2, estão indicadas na Tabela 4.14 a seguir.

**Tabela 4.14 Discretizações utilizadas no exemplo 4.3.1.4**

| Discret. | Tipo         | Comp. dos trechos (m) | Numero de elementos | Comp. dos elementos (m) |
|----------|--------------|-----------------------|---------------------|-------------------------|
| MEF I    | Uniforme     | $T_1 = 10$            | 30                  | 0,333                   |
| MEF II   | Não-uniforme | $T_1 = 8,75$          | 10                  | 0,875                   |
|          |              | $T_2 = 1,25$          | 20                  | 0,063                   |

Apresentam-se, a seguir, os resultados obtidos para o problema. Os valores máximos (em módulo) de  $w$ ,  $M_s$  e  $N_s$  da casca cônica, para a discretização e para as fórmulas analíticas são apresentados nas Tabelas 4.15, 4.16 e 4.17. Nas Figuras 4.15, 4.16 e 4.17 estão representadas suas respectivas curvas de variação ao longo da casca cônica.

**Tabela 4.15 Valores máximos de  $w$**

| Modelo    | Bordo Inferior |              |          |
|-----------|----------------|--------------|----------|
|           | w máx. (m)     | orden. x (m) | erro (%) |
| Analítico | -1,457E-05     | 7,680        | -        |
| MEF I     | -1,434E-05     | 7,733        | 1,550    |
| MEF II    | -1,466E-05     | 7,650        | -0,313   |

**Tabela 4.16 Valores máximos de  $M_s$**

| Modelo    | Bordo Inferior    |              |          |
|-----------|-------------------|--------------|----------|
|           | $M_s$ máx. (Nm/m) | orden. x (m) | erro (%) |
| Analítico | -7,830E-01        | 7,888        | -        |
| MEF I     | -3,813E-01        | 7,733        | 51,302   |
| MEF II    | -7,924E-01        | 7,900        | -0,193   |

**Tabela 4.17 Valores máximos de  $N_s$** 

| Modelo    | Bordo Inferior   |              |          |
|-----------|------------------|--------------|----------|
|           | $N_s$ máx. (N/m) | orden. x (m) | erro (%) |
| Analítico | -3,261E+03       | 8,000        | -        |
| MEF I     | -3,260E+03       | 8,000        | 0,029    |
| MEF II    | -3,261E+03       | 8,000        | -0,002   |

Na peça em análise, a atuação do peso próprio desencadeia um comportamento de membrana ao longo do domínio, exceto na região de vinculação, onde a restrição aos deslocamentos vertical e horizontal provoca também esforços e deslocamentos de flexão. É, portanto, no entorno dos apoios onde os momentos fletores apresentam seus maiores módulos, assim como o deslocamento  $w$ . Em relação a  $N_s$ , seu módulo aumenta de forma diretamente proporcional ao da ordenada  $x$ , atingindo o seu valor máximo nos apoios. A partir dessas considerações, a análise da peça se concentrou no bordo inferior. A seguir, comenta-se o desempenho de cada discretização.

#### **Discretização MEF I**

De acordo com as Tabelas 4.15 a 4.17, os resultados de  $w$  e  $N_s$  máximos são satisfatórios, sendo os erros da ordem de 2% e 0,03%, respectivamente. Entretanto, em relação ao valor máximo de  $M_s$ , o erro é considerável e, assim, a malha uniforme não se mostrou adequada com a utilização de apenas 30 elementos finitos neste exemplo. A grandeza deste erro está associada à ordenada de ocorrência do valor máximo do momento fletor e também à sua variação brusca nesta região da peça, conforme pode ser visto na Figura 4.15. Dessa forma, uma vez que os pontos da malha de MEF I mais próximos da ordenada de ocorrência do momento máximo encontram-se a uma certa distância da ordenada analítica deste momento e que a variação deste esforço é muito intensa entre esses dois pontos, o erro obtido foi relevante.

Em relação às Figuras 4.16 e 4.17, observa-se o bom comportamento das curvas de  $w$  e  $N_s$  e também, a diferença entre os valores de  $M_s$  na região de ocorrência de flexão.

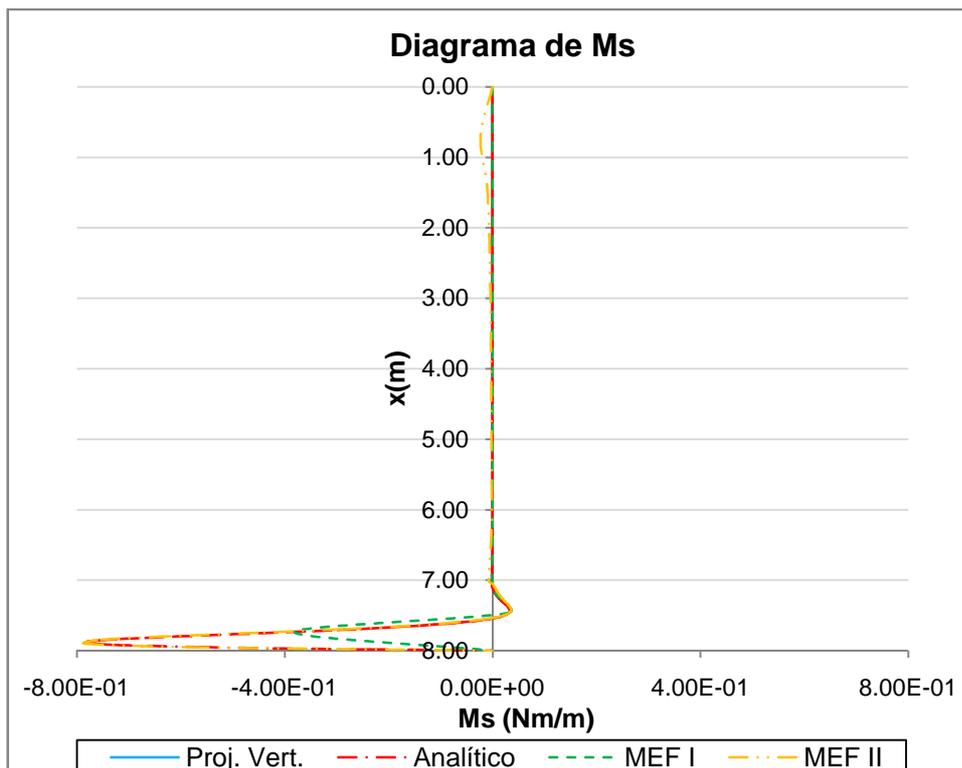


Figura 4.15 Diagrama de  $M_s$  da casca cônica

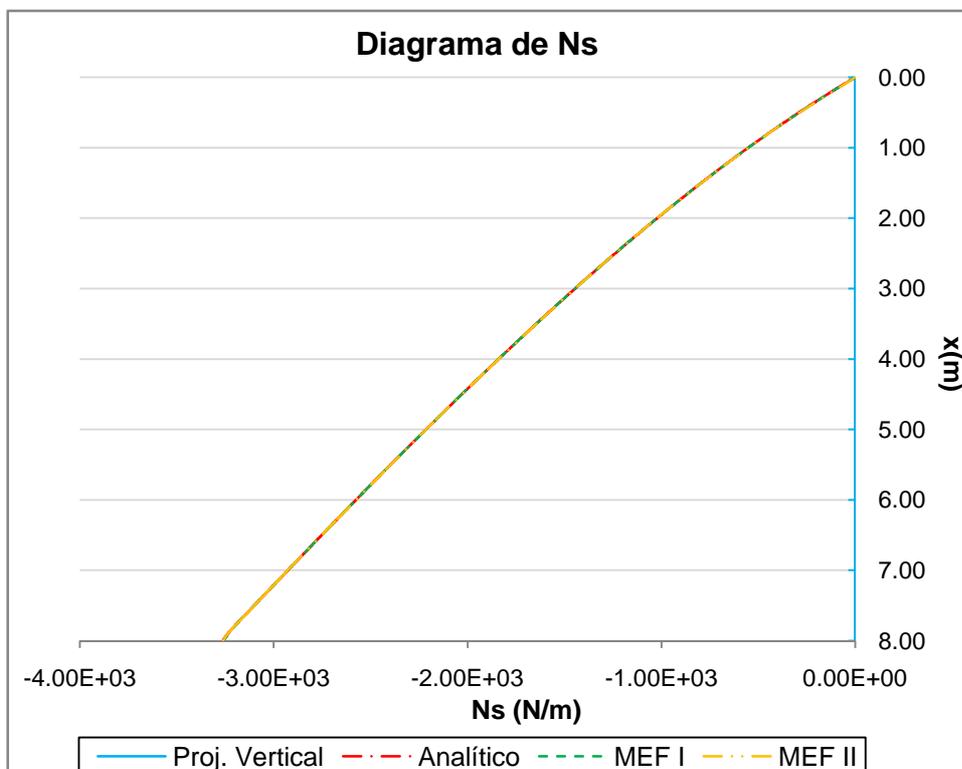


Figura 4.16 Diagrama de  $N_s$  da casca cônica

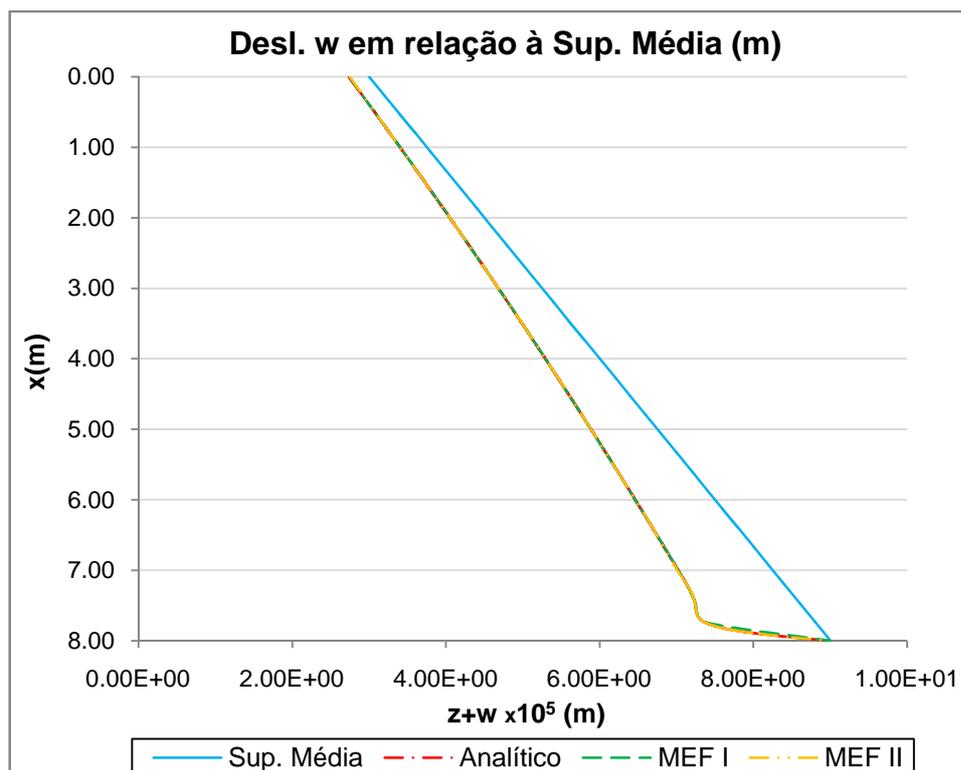


Figura 4.17 Deslocamento  $w$  na casca cônica

### **Discretização MEF II**

O erro na determinação de  $M_s$  máximo motivou a aplicação de um refinamento em sua região de ocorrência. Os resultados, como esperado, foram melhores e, de acordo com as Tabelas 4.15 a 4.17, o maior erro nos resultados obtidos foi da ordem de 3%. As curvas das Figuras 4.15 a 4.17 também apresentam boa configuração, com destaque para a de  $M_s$ , cujo comportamento é muito semelhante à da solução analítica na região de flexão, diferindo desta somente nas proximidades do bordo superior, devido à ausência de refino nesta região.

Uma vez que os resultados para MEF II se apresentaram satisfatórios e que a pequena diferença de configuração das curvas mencionada ocorreu somente para  $M_s$ , e em uma região onde os valores não apresentam ordem de grandeza relevante, nenhuma outra malha foi utilizada.

#### **4.3.1.5 Escolha da discretização**

As discretizações utilizadas nos exemplos de peças acopladas serão, conforme analisado nos exemplos anteriores, as mais adequadas para cada tipo de

peça. Assim, com exceção da placa circular, onde se utilizou apenas uma malha, para cada elemento estrutural serão utilizadas as discretizações MEF II.

### 4.3.2 Peças acopladas

Na análise das peças acopladas, buscou-se, em cada exemplo, avaliar a acurácia das respostas do código computacional para a análise de uma estrutura composta pelo agrupamento de diferentes peças. Foram montados um reservatório com fluido interno, um acoplamento simulando um domo esférico apoiado em uma parede cilíndrica e ainda um vaso de pressão composto pela junção de placa circular, casca cônica e casca esférica.

#### 4.3.2.1 Exemplo 5 - Reservatório aberto, apoiado na base e composto por casca cilíndrica com placa circular na base, submetido ao peso próprio de seus elementos e à pressão hidrostática

O exemplo encontra-se representado na Figura 4.18, onde também são indicados os dados geométricos, das solicitações e do material componente da casca e da placa que formam o reservatório.

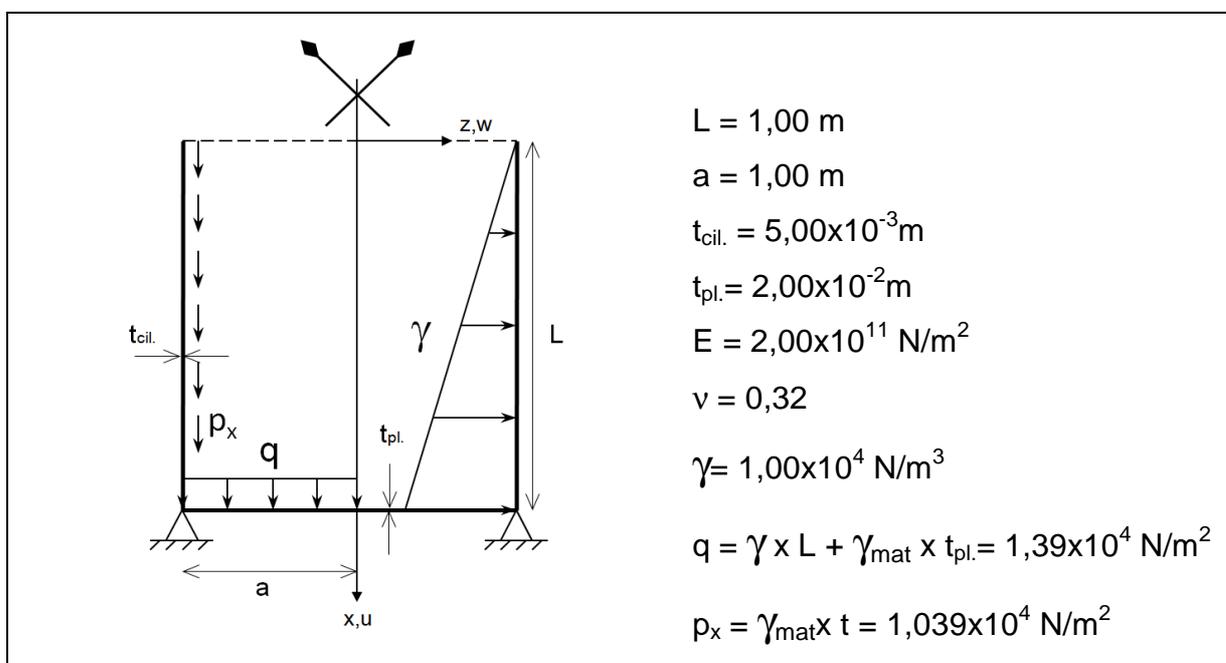


Figura 4.18 Representação e dados do exemplo 4.3.2.1

As discretizações utilizadas para cada peça estão indicadas na Tabela 4.14 a seguir.

**Tabela 4.18 Discretizações utilizadas no exemplo 4.3.1.4**

| Peça       | Tipo         | Comp. dos trechos (m) | Numero de elementos | Comp. dos elementos (m) |
|------------|--------------|-----------------------|---------------------|-------------------------|
| Casca cil. | Não-uniforme | $T_1 = 0,13$          | 10                  | 0,020                   |
|            |              | $T_2 = 0,74$          | 10                  | 0,060                   |
|            |              | $T_3 = 0,13$          | 10                  | 0,020                   |
| Placa      | Uniforme     | $T_1 = 1,00$          | 10                  | 0,100                   |

Apresentam-se, a seguir, os resultados obtidos para o problema. Os valores máximos de deslocamentos e momentos para cada peça são apresentados nas Tabelas 4.19 a 4.22. Nas Figuras 4.19 a 4.21 estão representadas as curvas de variação dos esforços internos e na Figura 4.22 apresenta-se o aspecto geral da estrutura deformada.

**Tabela 4.19 Valores máximos de w**

| Modelo    | Casca cil. |          | Placa      |          |
|-----------|------------|----------|------------|----------|
|           | w máx. (m) | erro (%) | w máx. (m) | erro (%) |
| Analítico | -8,747E-05 | -        | -          | -        |
| MEF       | -8,740E-05 | 0,088    | -          | -        |

**Tabela 4.20 Valores máximos de u**

| Modelo    | Casca cil. |          | Placa      |          |
|-----------|------------|----------|------------|----------|
|           | u máx. (m) | erro (%) | u máx. (m) | erro (%) |
| Analítico | -2,24E-06  | -        | 3,77E-03   | -        |
| MEF       | -2,23E-06  | 0,224    | 3,77E-03   | 0,013    |

**Tabela 4.21 Valores máximos de Momento**

| Modelo    | Casca cil.     |          | Placa          |          |
|-----------|----------------|----------|----------------|----------|
|           | Mx máx. (Nm/m) | erro (%) | Mr máx. (Nm/m) | erro (%) |
| Analítico | -4,443E+02     | -        | 1,96E+03       | -        |
| MEF       | -4,445E+02     | -0,045   | 1,95E+03       | 0,229    |

Tabela 4.22 Valores máximos de Resultante de Tensões

| Modelo    | Casca cil.       |          | Placa            |          |
|-----------|------------------|----------|------------------|----------|
|           | Nx máx.<br>(N/m) | erro (%) | Nr máx.<br>(N/m) | erro (%) |
| Analítico | -3,925E+02       | -        | -                | -        |
| MEF       | -3,925E+02       | 0,000    | -                | -        |

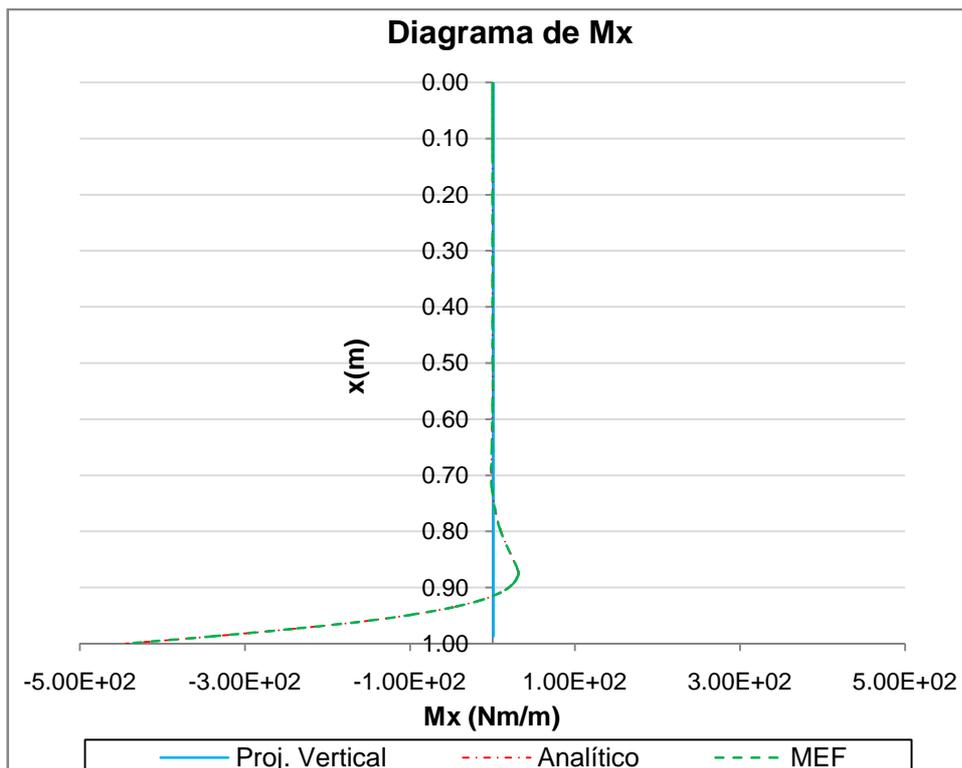
No reservatório em análise, a atuação do peso próprio gera esforços de membrana na casca cilíndrica e de flexão na placa, originando em ambos os elementos deslocamentos  $u$ .

Além disso, o fluido interno ocasiona comportamento de membrana ao longo do domínio da casca, de modo que haja flexão somente nas proximidades dos apoios e, em relação à placa, ele a solicita na forma de um carregamento transversal.

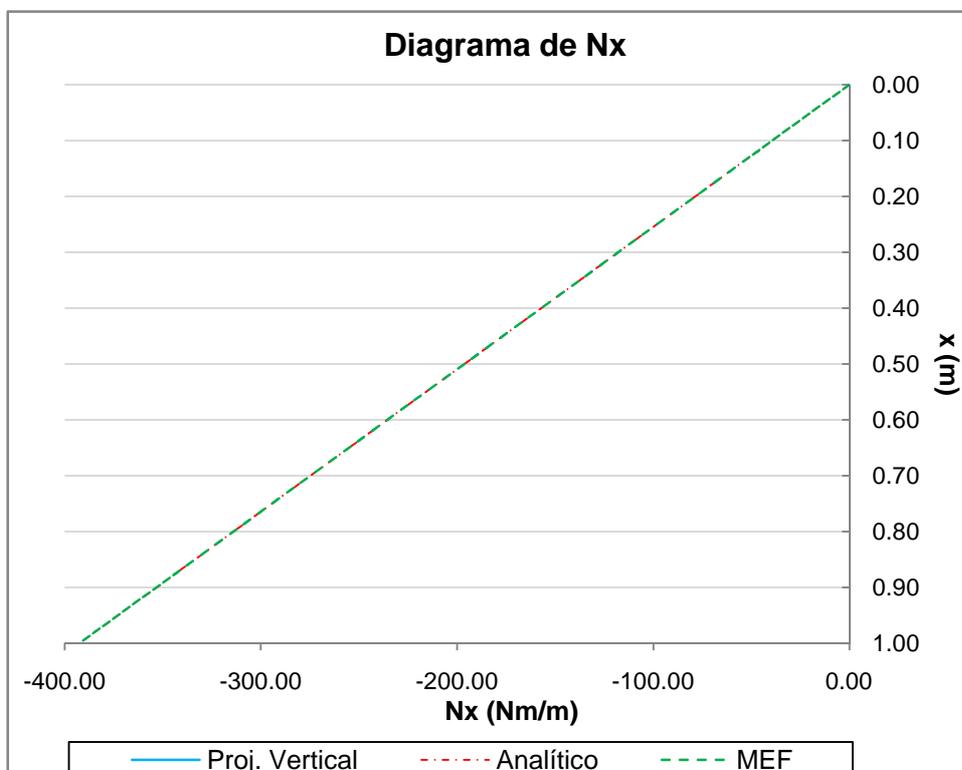
Uma terceira solicitação decorre do acoplamento entre as duas peças, ou seja, do momento de compatibilidade na região da ligação entre elas. Desse modo, a análise de máximos se concentrou no entorno dos apoios, onde ocorrem os valores mais relevantes de esforços internos e deslocamentos.

De acordo com as Tabelas 4.23 a 4.25, nenhum dos erros superou 0,3%, evidenciando o caráter satisfatório dos resultados. Nas Figuras 4.19 a 4.22, observa-se o bom comportamento das curvas obtidas pelo MEF em relação às das soluções analíticas. Uma vez que os resultados foram bastante satisfatórios, conclui-se que a formulação pôde ser utilizada com êxito no cálculo do reservatório.

No que se refere aos deslocamentos, levando-se em conta os seus valores em coordenadas globais para as duas peças, a Figura 4.22 ilustra a situação deformada da estrutura.



**Figura 4.19 Diagrama de Mx da casca cilíndrica**



**Figura 4.20 Diagrama de Nx da casca cilíndrica**

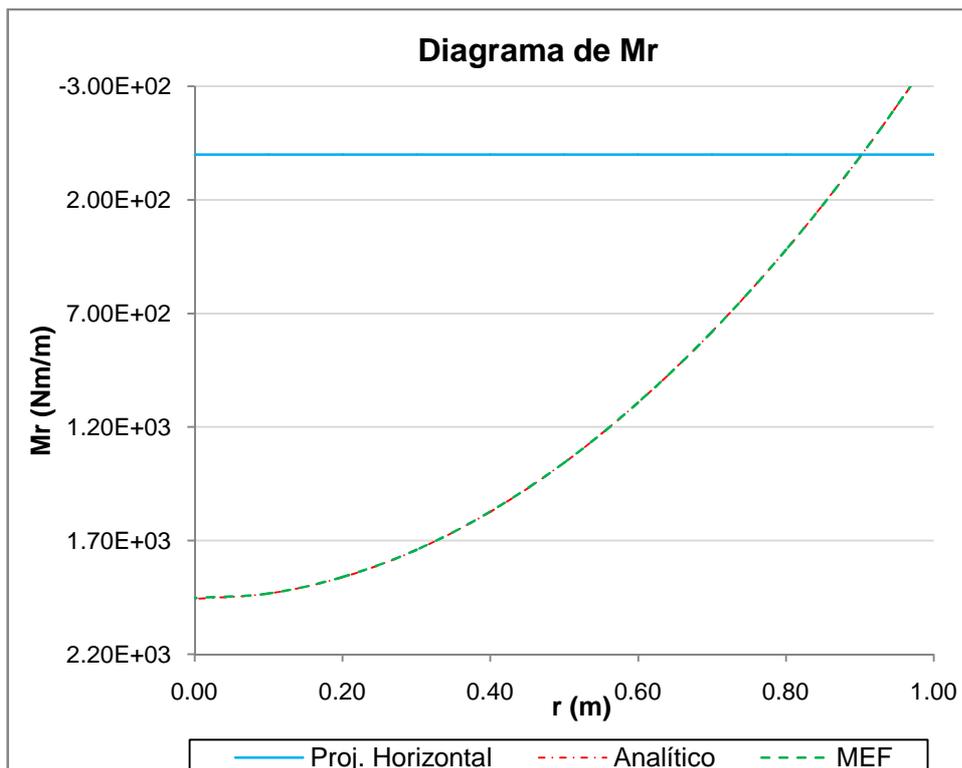


Figura 4.21 Diagrama de Ns da casca cônica

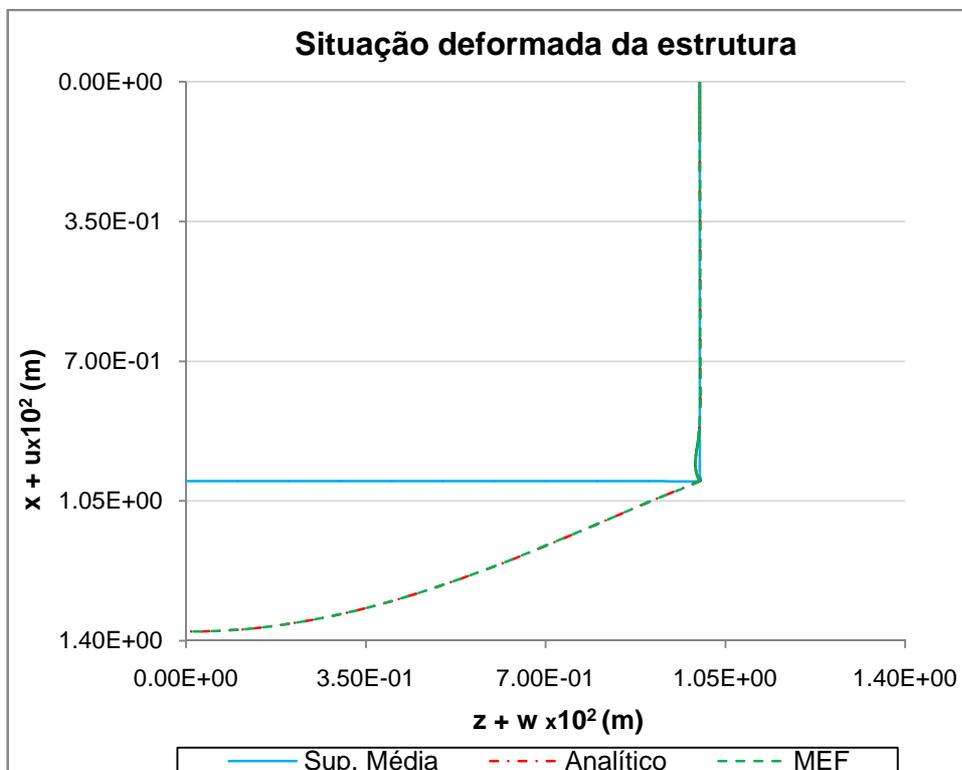


Figura 4.22 Situação deformada do reservatório

#### 4.3.2.2 Exemplo 6 – Estrutura formada por acoplamento entre casca cilíndrica apoiada na base e casca esférica na parte superior, submetida ao peso próprio dos elementos e a uma variação uniforme de temperatura

O exemplo encontra-se representado na Figura 4.23, onde também são indicados os dados geométricos, das solicitações e do material do acoplamento.

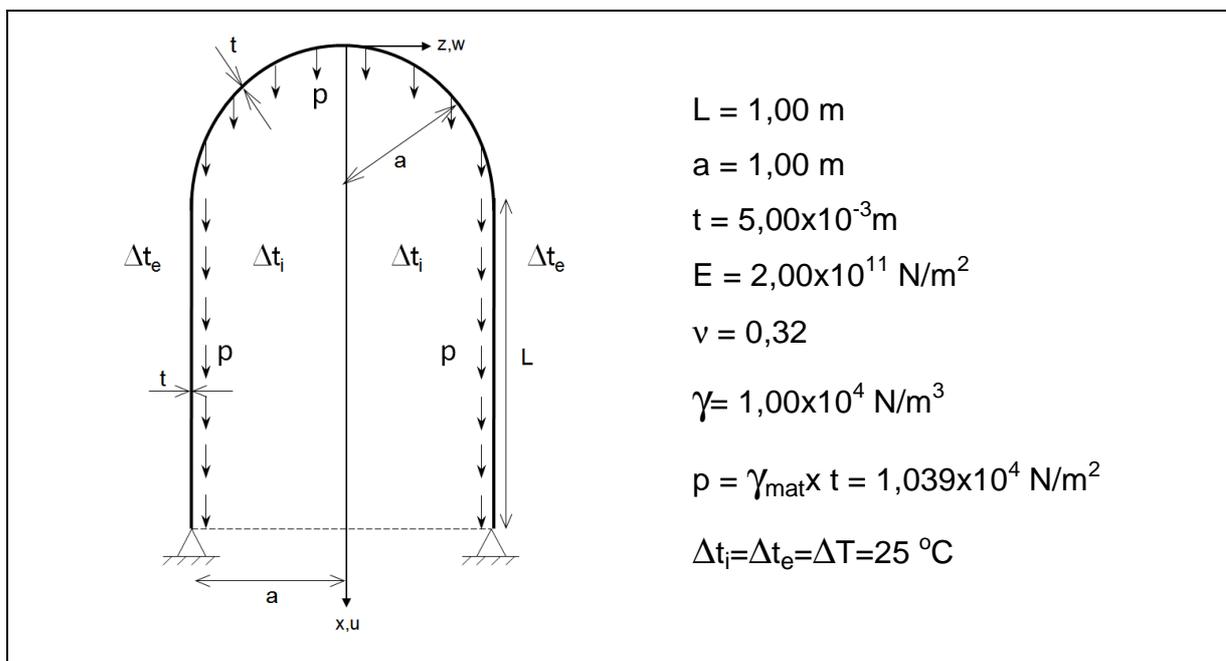


Figura 4.23 Representação e dados do exemplo 4.3.2.2

As discretizações utilizadas para cada peça estão indicadas na Tabela 4.23 a seguir.

Tabela 4.23 Discretizações utilizadas no exemplo 4.3.1.4

| Peça       | Tipo         | Comp. dos trechos (graus/m) | Numero de elementos | Comp. dos elementos (m) |
|------------|--------------|-----------------------------|---------------------|-------------------------|
| Casca esf. | Não-uniforme | $S_1 = 80$                  | 30                  | 0,047                   |
|            |              | $S_2 = 10$                  | 20                  | 0,009                   |
| Casca cil. | Não-uniforme | $T_1 = 0,13$                | 10                  | 0,020                   |
|            |              | $T_2 = 0,74$                | 10                  | 0,060                   |
|            |              | $T_3 = 0,13$                | 10                  | 0,020                   |

Apresentam-se, a seguir, os resultados obtidos para o problema. Os valores máximos de deslocamentos e momentos para cada peça são apresentados nas

Tabelas 4.24 a 4.27. Nas Figuras 4.24 a 4.27 estão representadas as curvas de variação dos esforços internos e na Figura 4.27 apresenta-se o aspecto geral da estrutura deformada.

**Tabela 4.24 Valores máximos de w**

| Modelo    | Casca esf. |          | Casca cil. |          |
|-----------|------------|----------|------------|----------|
|           | w máx. (m) | erro (%) | w máx. (m) | erro (%) |
| Analítico | 3,006E-04  | -        | 3,204E-04  | -        |
| MEF       | 3,003E-04  | 0,110    | 3,201E-04  | 0,078    |

**Tabela 4.25 Valores máximos de u**

| Modelo    | Casca esf. |          | Casca cil. |          |
|-----------|------------|----------|------------|----------|
|           | u máx. (m) | erro (%) | u máx. (m) | erro (%) |
| Analítico | -6,013E-04 | -        | -3,021E-04 | -        |
| MEF       | -6,013E-04 | 0,002    | -3,021E-04 | -0,001   |

**Tabela 4.26 Valores máximos de Momento**

| Modelo    | Casca esf.           |          | Casca cil.     |          |
|-----------|----------------------|----------|----------------|----------|
|           | M $\phi$ máx. (Nm/m) | erro (%) | Mx máx. (Nm/m) | erro (%) |
| Analítico | -                    | -        | 1,465E+02      | -        |
| MEF       | -                    | -        | 1,465E+02      | 0,005    |

**Tabela 4.27 Valores máximos de Resultante de Tensões**

| Modelo    | Casca esf.          |          | Casca cil.    |          |
|-----------|---------------------|----------|---------------|----------|
|           | N $\phi$ máx. (N/m) | erro (%) | Nx máx. (N/m) | erro (%) |
| Analítico | -3,925E+02          | -        | -7,850E+02    | -        |
| MEF       | -3,924E+02          | 0,025    | -7,849E+02    | 0,013    |

Na semi-esfera, tanto a atuação do peso próprio quanto a variação uniforme de temperatura originam esforços de membrana ao longo de seu domínio, sendo irrelevante a ordem de grandeza dos momentos fletores. Em se tratando dos deslocamentos, predomina a tendência proveniente da variação de temperatura. Os

valores máximos para esforços e deslocamentos ocorrem no bordo inferior deste elemento, sendo, por este motivo, a região dele analisada.

Em relação à casca cilíndrica, a variação de temperatura também tende a ocasionar esforços de membrana ao longo do domínio (esforço  $N_\theta$ ), ocorrendo flexão apenas nas proximidades dos apoios. O peso próprio da peça e ainda o peso total da semi-esfera ocasionam como esforço relevante apenas  $N_x$ . No que se refere aos esforços ocasionados na junção das duas peças, sua ordem de grandeza resultou pequena para este tipo de solicitação, de modo que não apresentam grande influência sobre esforços e deslocamentos.

De acordo com as Tabelas 4.24 a 4.27, nenhum dos erros superou 0,1%, indicando acurácia satisfatória na determinação dos resultados. Nas Figuras 4.24 a 4.27, observa-se o bom comportamento das curvas obtidas pelo MEF em relação às das soluções analíticas. Dessa forma, comprovaram-se, mais uma vez, a eficiência da formulação numérica na análise de estruturas formadas por acoplamentos entre peças axissimétricas.

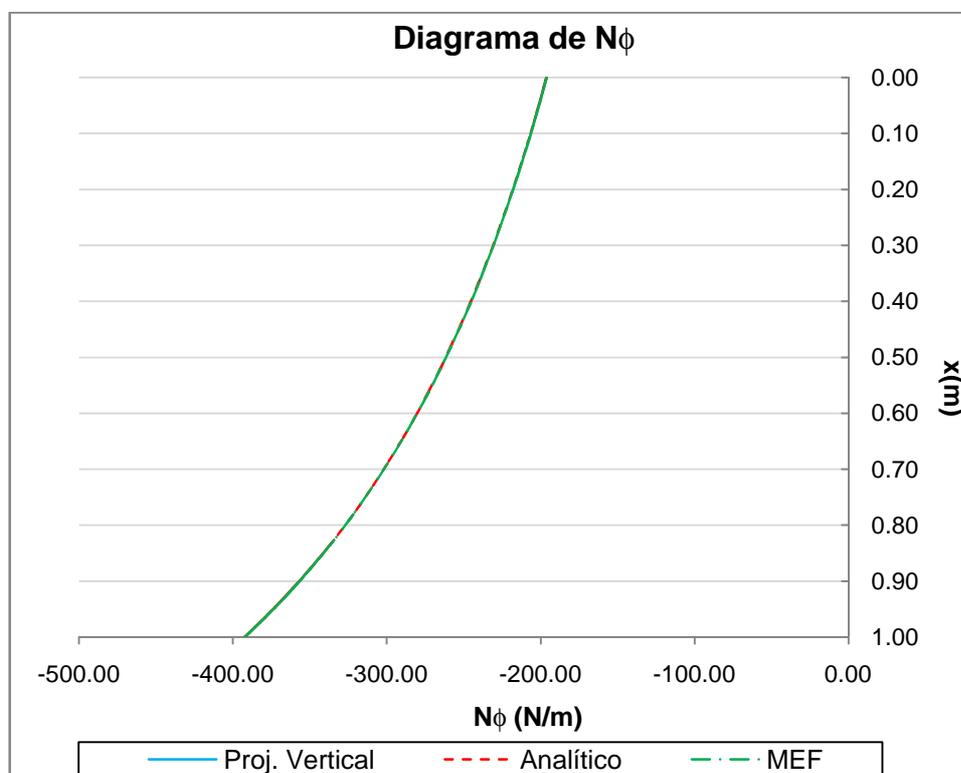
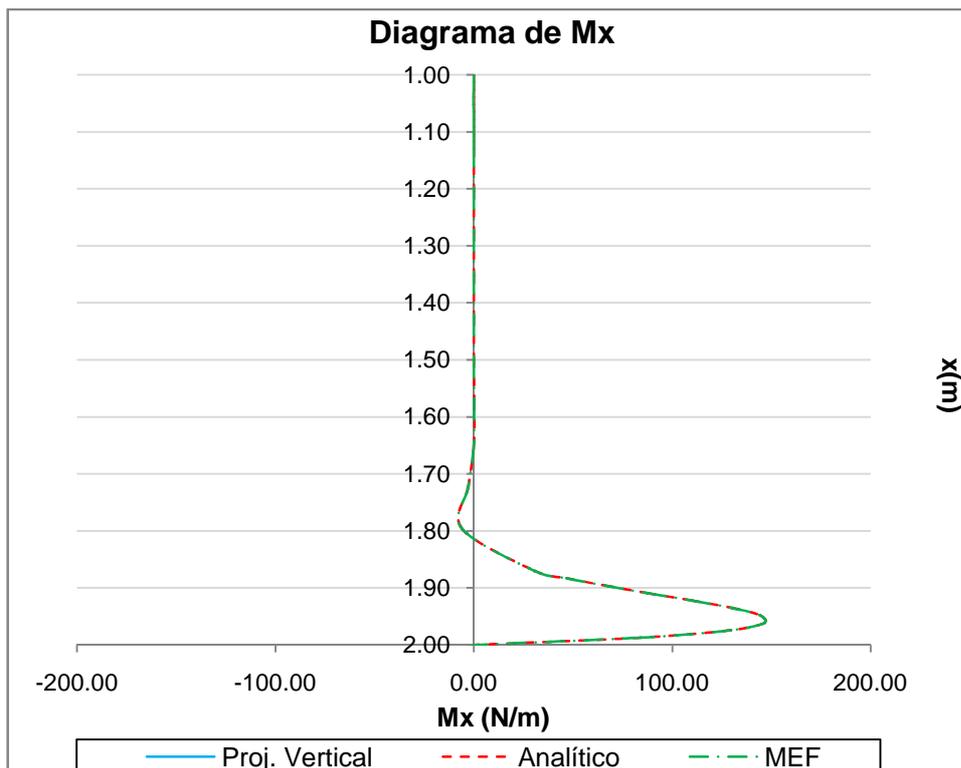
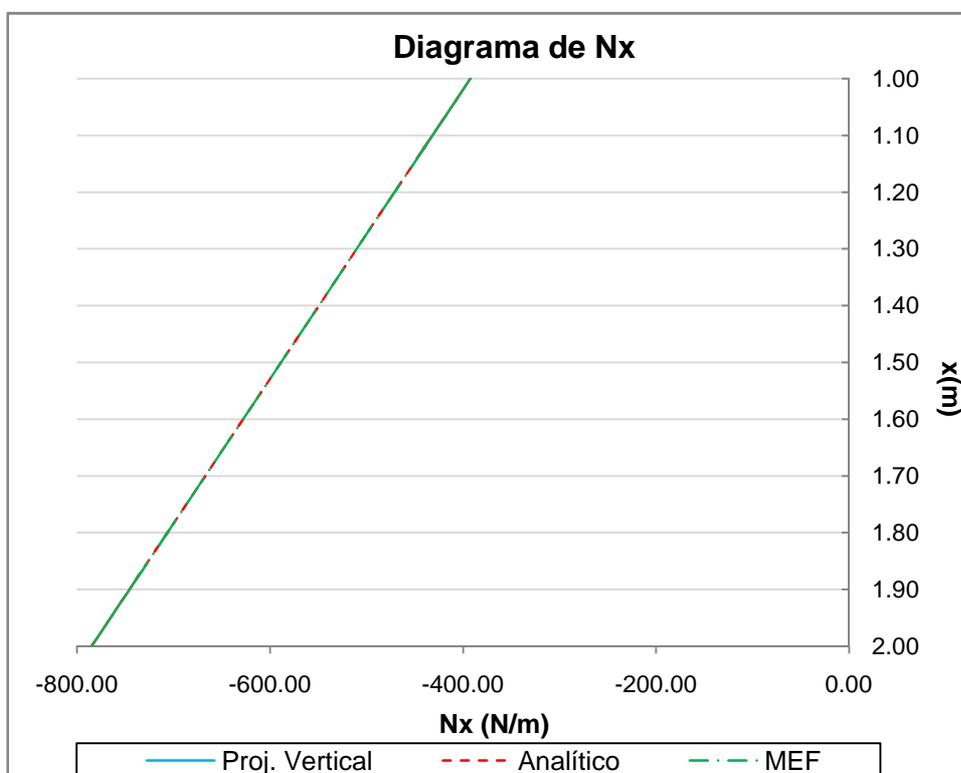


Figura 4.24 Diagrama de  $N_\phi$  da casca esférica



**Figura 4.25 Diagrama de Mx da casca cilíndrica**



**Figura 4.26 Diagrama de Nx da casca cilíndrica**

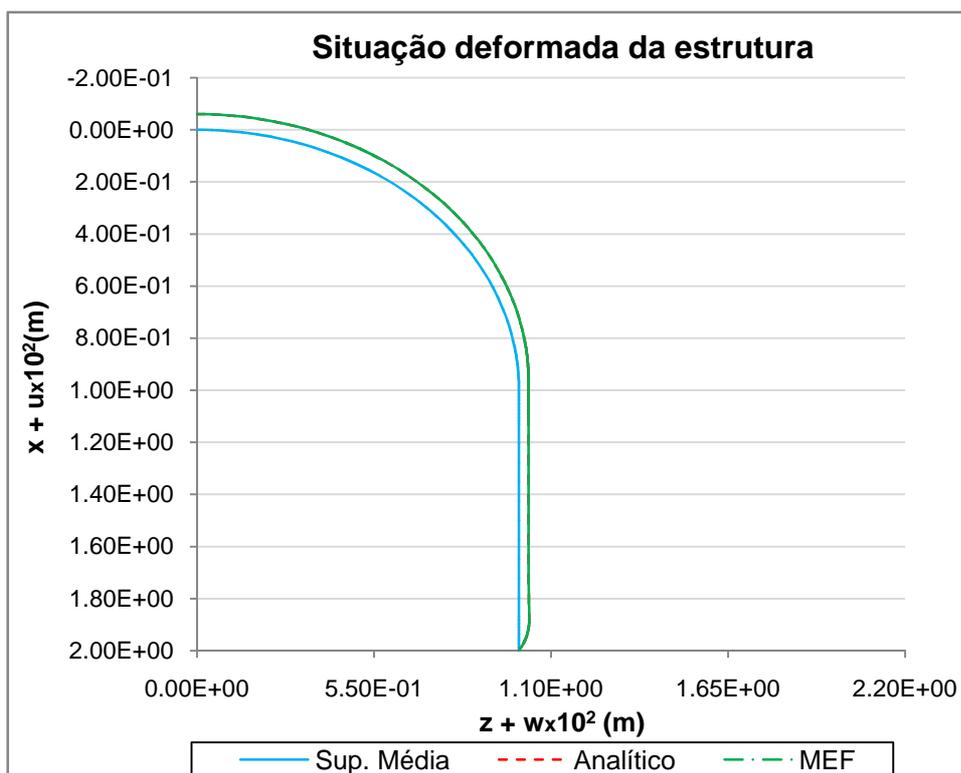


Figura 4.27 Situação deformada do acoplamento

#### 4.3.2.3 Exemplo 7 – Vaso de pressão apoiado, composto por casca cônica e placa circular na base, submetido a uma pressão interna

O exemplo encontra-se representado na Figura 4.28, onde também são indicados os dados geométricos, das solicitações e do material do vaso de pressão.

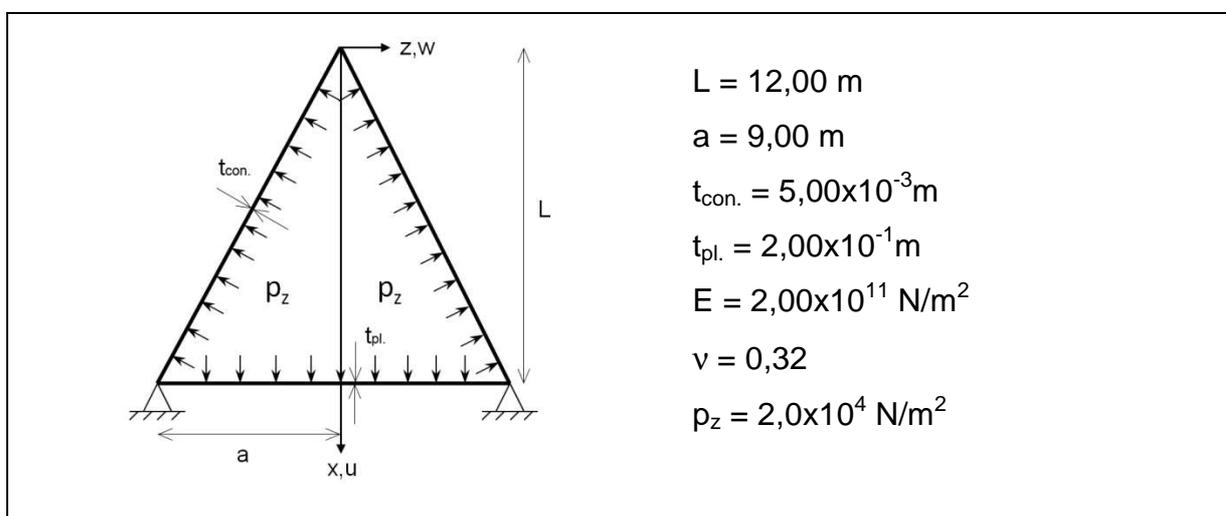


Figura 4.28 Representação e dados do exemplo 4.3.2.2

As discretizações utilizadas para cada peça estão indicadas na Tabela 4.28 a seguir.

**Tabela 4.28 Discretizações utilizadas no exemplo 4.3.1.4**

| Peça        | Tipo     | Comp. dos trechos (m) | Numero de elementos | Comp. dos elementos (m) |
|-------------|----------|-----------------------|---------------------|-------------------------|
| Casca con.  | Uniforme | $T_1 = 12,00$         | 50                  | 0,3                     |
| Placa circ. |          | $T_1 = 9,00$          | 10                  | 0,9                     |

Apresentam-se, a seguir, os resultados obtidos para o problema. Os valores máximos de deslocamentos e momentos para cada peça são apresentados nas Tabelas 4.29 a 4.32. Nas Figuras 4.29 a 4.32 estão representadas as curvas de variação dos esforços internos e na Figura 4.33 apresenta-se o aspecto geral da estrutura deformada.

**Tabela 4.29 Valores máximos de w**

| Modelo    | Casca côn. |          | Placa circ. |          |
|-----------|------------|----------|-------------|----------|
|           | w máx. (m) | erro (%) | w máx. (m)  | erro (%) |
| Analítico | 1,637E-03  | -        | -           | -        |
| MEF       | 1,641E-03  | -0,199   | -           | -        |

**Tabela 4.30 Valores máximos de u**

| Modelo    | Casca côn. |          | Placa circ. |          |
|-----------|------------|----------|-------------|----------|
|           | u máx. (m) | erro (%) | u máx. (m)  | erro (%) |
| Analítico | -1,637E-03 | -        | 5,552E-02   | -        |
| MEF       | -1,281E-03 | -1,162   | 5,552E-02   | -0,001   |

**Tabela 4.31 Valores máximos de Momento**

| Modelo    | Casca côn.     |          | Placa circ.    |          |
|-----------|----------------|----------|----------------|----------|
|           | Ms máx. (Nm/m) | erro (%) | Mr máx. (Nm/m) | erro (%) |
| Analítico | -2,709 E+05    | -        | 3,356E+05      | -        |
| MEF       | -2,840 E+05    | -4,829   | 3,340E+05      | 0,477    |

**Tabela 4.32 Valores máximos de Resultante de Tensões**

| Modelo    | Casca côn.       |          | Placa circ.      |          |
|-----------|------------------|----------|------------------|----------|
|           | Ns máx.<br>(N/m) | erro (%) | Nr máx.<br>(N/m) | erro (%) |
| Analítico | 1,091 E+00       | -        | -                | -        |
| MEF       | 1,092 E+00       | 0,091    | -                | -        |

Em face da solicitação, são originados esforços de membrana ao longo do domínio da casca cônica, havendo momentos de flexão apenas no entorno do apoio. Em relação aos deslocamentos, predomina, nesta peça, a influência proveniente da pressão interna atuante. Os valores máximos para os referidos esforços e deslocamentos ocorrem no bordo inferior.

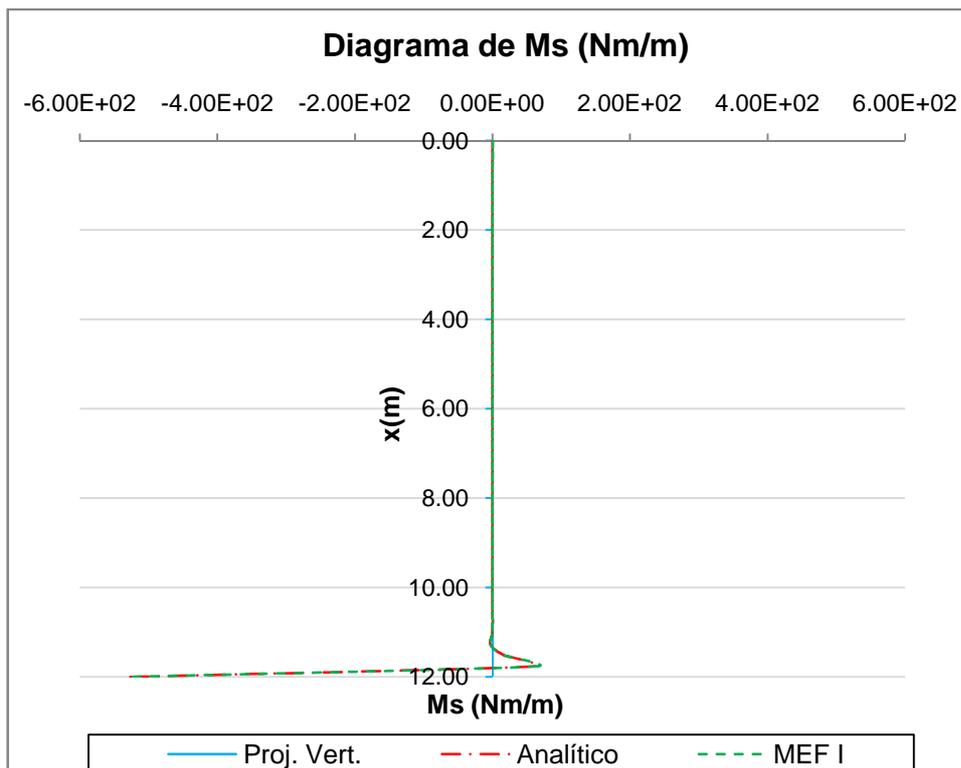
Em relação à placa circular, diferentemente da casca cônica, a solicitação interna atua como uma carga transversal e, conseqüentemente, causa esforços de flexão e deslocamentos transversais em seu domínio.

Analisando-se as Tabelas 4.29 a 4.32, nota-se que nenhum dos erros superou 5%, indicando acurácia na determinação dos resultados. A partir das Figuras 4.29 a 4.33, observa-se o bom comportamento das curvas obtidas pelo MEF em relação às das soluções analíticas. Dessa forma, comprova-se novamente o caráter satisfatório do uso da formulação numérica na análise de estruturas axissimétricas.

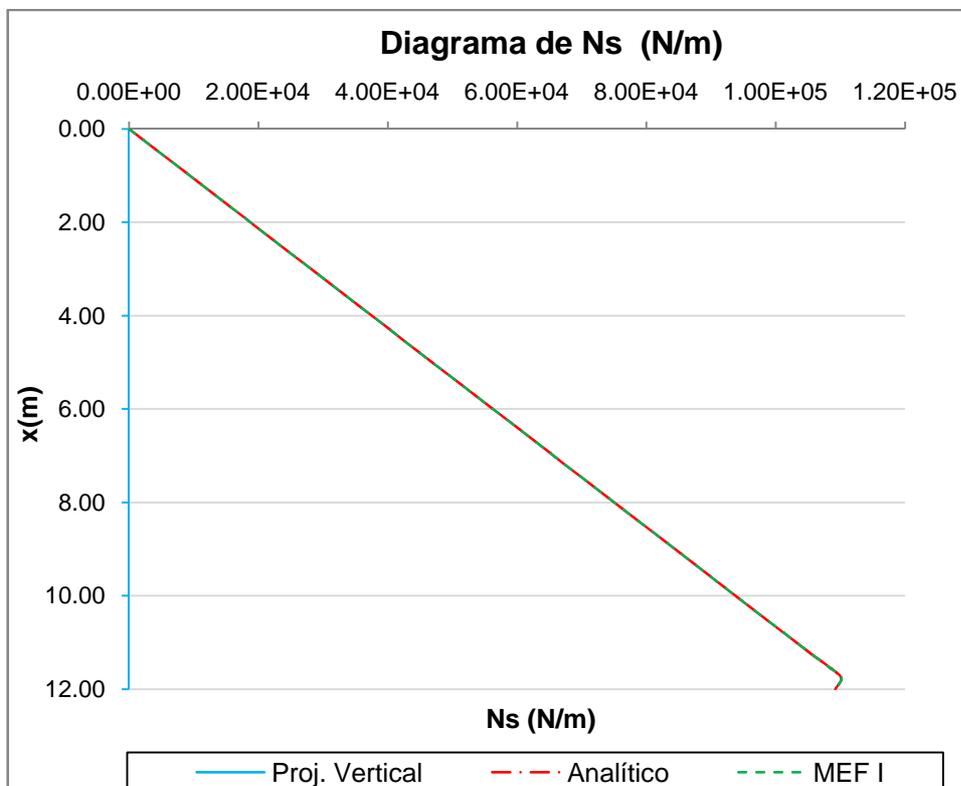
Em relação aos deslocamentos, a Figura 4.32 ilustra a situação deformada da estrutura levando-se em conta os deslocamentos globais das três peças.

Uma observação deve ser feita em relação ao erro de - 4,829% referente ao cálculo do momento fletor máximo na casca cônica (Tabela 4.31). O valor em questão corresponde a um momento negativo e, como se percebe através da Figura 4.29, não corresponde ao módulo máximo atuante, entretanto, foi o que apresentou o maior erro dentre os módulos máximos, razão pela qual foi utilizado.

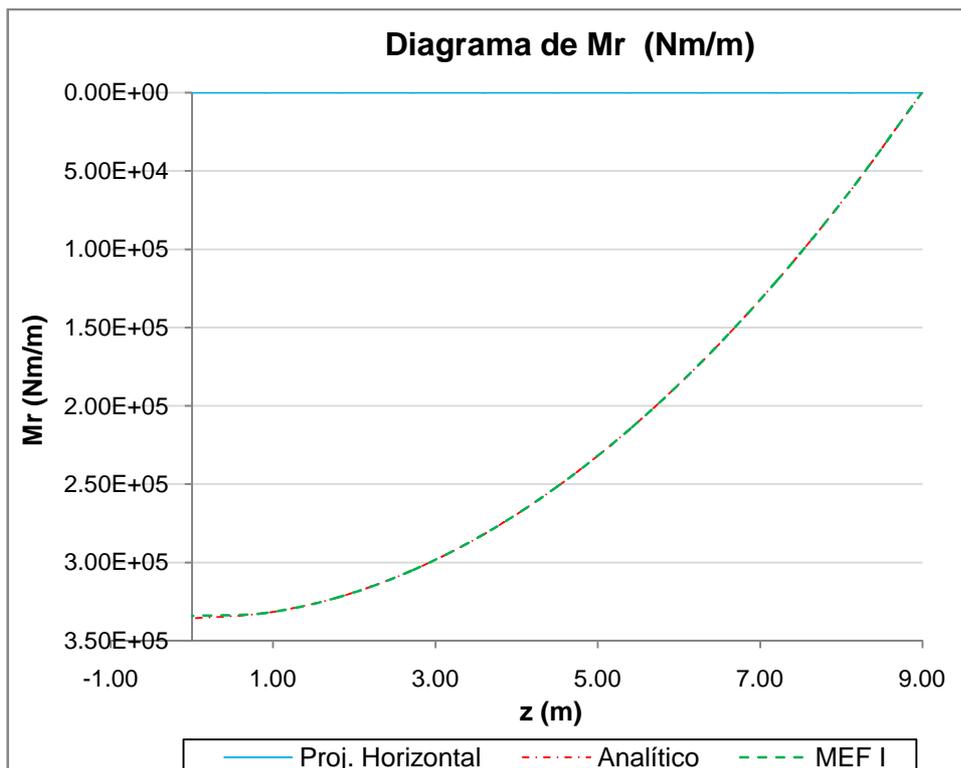
Também como observação, deve-se comentar que, neste exemplo, em vez do padrão MEF II para a casca cônica optou-se por uma discretização uniforme, com maior número de elementos, e manteve-se satisfatória a acurácia dos resultados.



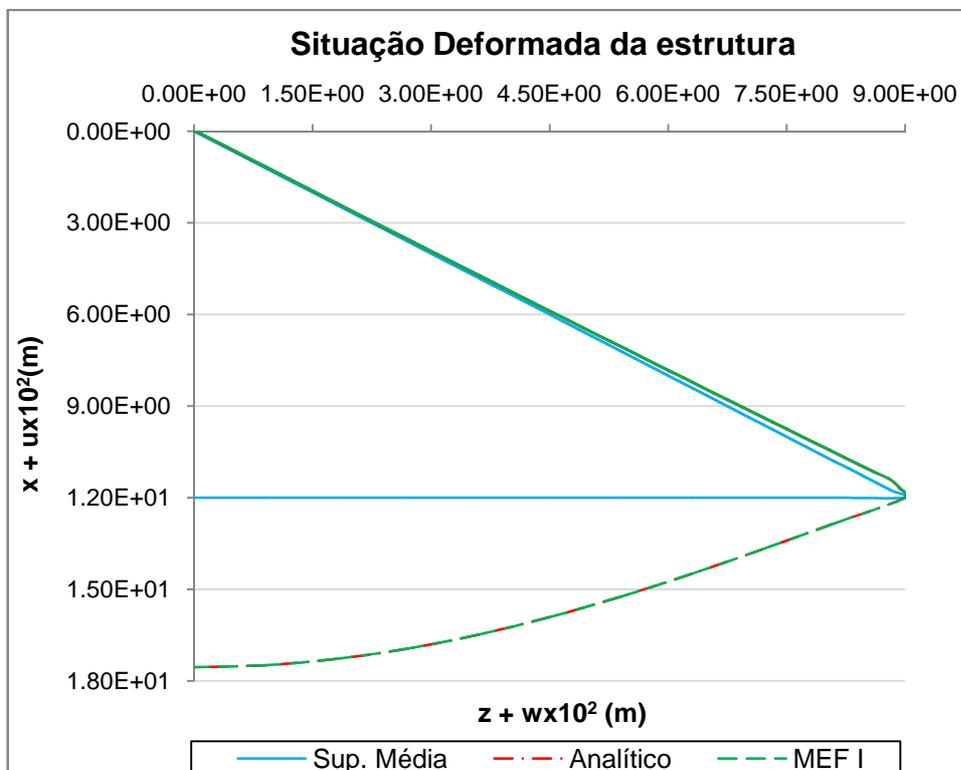
**Figura 4.29 Diagrama de Ms da casca cônica**



**Figura 4.30 Diagrama de Ns da casca cônica**



**Figura 4.31 Diagrama de Mr da placa circular**



**Figura 4.32 Situação deformada do vaso de pressão**

## CAPÍTULO 5

# Conclusões e Propostas de Continuidade da Pesquisa

A partir das análises do Capítulo 4 e também de outros exemplos estudado, mas não apresentados nesta dissertação, observou-se o desempenho satisfatório da formulação numérica desenvolvida, no que diz respeito à sua aplicação a problemas de estruturas axissimétricas constituídas por peças isoladas ou compatibilizadas. O referido desempenho tornou-se evidenciado através da acurácia percebida na comparação entre seus resultados e os valores analíticos de referência.

Nos problemas abordados no capítulo anterior, nota-se que nas cascas o efeito da flexão ocorre no entorno dos apoios ou das proximidades do ponto de contato entre peças acopladas, efeito este decorrente da perturbação de bordo, sendo válida a teoria de membrana ao longo do restante do domínio destas estruturas. Levando-se em conta este comportamento estrutural, fez-se necessária a utilização de discretizações com maior refino nestas regiões particulares. Assim, definiram-se geratrizes, representativas das estruturas axissimétricas, com malhas não-uniformes a fim de não ser utilizado um grande número de divisões, o que tenderia a aumentar o esforço computacional; para que se respeitasse a margem de erro estabelecida no cálculo de esforços internos e deslocamentos.

De uma maneira geral, nos problemas que tratavam somente cascas axissimétricas, foi necessário um maior número de elementos finitos e a utilização de malhas não uniformes. Entretanto, nas placas axissimétricas, demonstrou-se adequada a utilização de uma discretização uniforme e com uma menor quantidade de elementos.

Neste trabalho, deu-se ênfase ao cálculo dos esforços internos, os quais representam fundamental importância para o dimensionamento estrutural. Dessa forma, foram analisados qualitativa e quantitativamente, sendo possível, inclusive, observar os diferentes comportamentos da estrutura em face do tipo de solicitação e

vinculação a ela imposta, ou seja, as regiões de ocorrência de regime de membrana e dos efeitos de flexão.

Dessa forma, é alcançado o objetivo principal desta dissertação, que se define como a demonstração do potencial da utilização do MEF convencional na análise de estruturas axissimétricas utilizando uma formulação baseada em um elemento finito retilíneo.

Para a continuidade desta pesquisa, apresentam-se como propostas:

- Comparação entre o desempenho da formulação com elemento finito retilíneo, abordada neste trabalho, e a formulação com elemento curvo, com ênfase na análise estrutural de cascas esféricas e elípticas.
- Estudar a viabilidade de utilização da formulação apresentada, utilizando as rotinas já implementadas, para elaboração de uma formulação numérica para o dimensionamento de cascas e placas axissimétricas
- Implementação de rotinas para otimização da discretização, de maneira automática, tendo como base respostas analíticas preliminares de modo a reduzir o esforço computacional e a complexidade do processo de análise estrutural.

## CAPÍTULO 6

# Referências

Barros, F. B. (2002) Método sem malha e Método dos elementos finitos generalizados em análise não-linear de estruturas. Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos/USP, São Carlos, SP, 2002.

Bathe, K. J. (1996): Finite Element Procedures. 1 ed. New Jersey, Prentice Hall, p. 1037.

Belluzzi, O. (1980): Scienza delle Costruzioni - Volume 3. Bologna, Zanichelli, p.730.

Bhatia, R.S.; Sekhon, G.S. (1999) Generation of exact stiffness matrix for a conical *shell element*. Computer and Structures, vol. 70, p. 425-435.

Chapelle, D.; Bathe, K.J (1998) Fundamental considerations for the finite element analysis of shell structures. Computer and Structures, Vol. 66, p. 19-36.

Flügge, W. (1973): Stresses in shells. 2 ed. New York, Springer, p. 499.

Grafton, P.E.; Strome, D.R. (1963) Analysis of axisymmetric shells by the direct stiffness method. JAIAA, vol. 1, p. 2342-2347.

Hansteen, O.E. (1969): A conical element for displacement analysis of axis-symmetric shells, finite element methods. Trondheim: TAPIR, International Journal for Computer-Aided Engineering and Software, vol. 29, 636-660.

Jones, R.E.; Strome, D.R. (1965) A survey of analysis of shells by the displacement method. In: Proceedings of the Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics. Ohio: Air Force Flight Dynamics Laboratory.

Jones R.E.; Strome, D.R.(1966) Direct stiffness method of analysis of shells of revolution utilizing curved elements. JAIAA, Vol. 4, p. 1519-1525.

Klein, S.A (1965): Study of the matrix displacement method as applied to shells of revolution. Proceedings of the Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics. Ohio: Air Force Flight Dynamics Laboratory.

Mangini, M. (2006) Método dos Elementos Finitos Generalizados para Análise de Estruturas em Casca de Revolução. Dissertação de M.Sc. Escola de Engenharia de São Carlos/USP, São Carlos, SP, 2006.

Mittelbach, F. R. (2002) Método das Diferenças Finitas Energéticas na Análise de Reservatórios Cilíndricos. Dissertação de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Nirschl, G. C. (2005) Método dos elementos finitos e técnicas de enriquecimento da aproximação aplicados à análise de tubos cilíndricos e cascas esféricas. Dissertação de M.Sc. Escola de Engenharia de São Carlos/USP, São Carlos, SP.

Nobrega, S. H. S. (1997) Sobre o desenvolvimento de elementos finitos de casca. Uma classe de formulações mistas. Tese de Doutorado, USP, São Paulo, SP0.

Percy, J.H.; Pian T.H.H.; Klein S. (1965) Navaratna Dr. Application of matrix displacement method to linear elastic analysis of shells of revolution. JAIAA, Vol. 3, p. 2138-2145.

Rodrigues, C. Y. C. (2009) Análise de Estruturas Axissimétricas – Aplicação a Reservatórios Circulares. Dissertação de M.Sc., INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO/UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA, Lisboa, Portugal.

Ross, C.T.F. (1974) Axisymmetric finite elements for circular plates and cylinders. Transactions of the Royal Institution of Naval Architects. Vol. 116, p. 275-282.

Ross, C.T.F.(1984) Finite element programs for axisymmetric problems in engineering. West Sussex, Ellis Horwood.

Rotter, J. M.; & Sadowski, A. J. (2012) Cylindrical shell bending theory for orthotropic shells under general axisymmetric pressure distributions. Engineering Structures, Vol. 42, p. 258-265.

Sekhon G.S.; Bhatia R.S. (2000) Generation of exact stiffness matrix for a conical shell element. Computer and Structures, Vol. 74, p. 335-349.

Soriano, H.L. (2003): Método dos Elementos Finitos em Análise de Estruturas. São Paulo, Editora da Universidade de São Paulo.

Suarez, O. A. G. *et al.* (2012) Enrichment of a rational polynomial family of shape functions with regularity  $C_0^k$ ,  $k = 0,2,4 \dots$ . Applications in axisymmetric plates and shells.

Timoshenko, S.P.; GOODIER, J.N. (1970) Theory of Elasticity 3ed. New York, McGraw-Hill.

Timoshenko, S.P; Woinowsky-Krieger, S. (1959) Theory of Plates and Shells. 2ed. New York, McGraw-Hill.

Ugural, A. C. (1981) Stresses in Plates and Shells. New York, McGraw-Hill

Vieira, A. P. G. (2007) Método das Diferenças Finitas Energéticas versus Método dos Elementos Finitos na Análise dos Efeitos de Perturbação de Bordo em Cascas Cilíndricas Axissimétricas. Dissertação de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Vivio, F.; Vullo, V. (2010) Closed form solutions of axisymmetric bending of circular plates having non-linear variable thickness. International Journal of Mechanics Sciences, Vol. 52, p. 1234-1252.

Zienkiewicz, O.C. (2000): The Finite Element Method - Volume 2 Solid Mechanics. 5ed., Butterworth-Heinemann