# Universidade Federal do Rio Grande do Norte
## Programa de Pós Graduação em Matemática Aplicada e Estatística
## Exame de Seleção 2022.1
## Tópicos em Matemática e Probabilidade
## 07/03/2022

Nome: ____________________

Assinatura: ____________________

1. Durante a prova, o(a) candidato(a) não deve levantar-se, ou realizar qualquer tipo de comunicação com outro candidato. Para ser atendido deverá levantar o braço e esperar.
2. As provas devem ser respondidas a caneta esferográfica (azul ou preta).
3. Não é permitido o uso de qualquer outra folha que não sejam as fornecidas.
4. Caso necessite, solicite mais folhas para responder as questões. Questões diferentes devem estar em folhas diferentes.
5. Não é permitido consulta e utilização de qualquer tipo de material ou aparelho eletrônico, incluindo o aparelho celular.
6. Ao terminar a conferência da prova, caso a mesma esteja incompleta ou tenha qualquer defeito, o(a) candidato(a) deverá solicitar ao responsável que a substitua, não cabendo reclamações posteriores nesse sentido.
7. Cabe única e exclusivamente ao(à) candidato(a) interpretar as questões da prova.
8. O(A) candidato(a) tem uma tolerância de 25 minutos para entrar no recinto de realização da prova.
9. O(A) candidato(a) somente poderá retirar-se do local de realização da prova após 25 minutos de seu início.
10. A desobediência a qualquer uma das recomendações constantes nas presentes instruções, poderá implicar na anulação da prova do(a) candidato(a).

Escolha cinco (5) questões para responder. Marque as questões escolhidas com um X no quadro a seguir

| Questão | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Matemática | | | | | |

| Questão | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| Probabilidade | | | | | |

Nome:

1. $\boxed{2,0 \text{ Pontos}}$ Prove que a fim de que a sequência $(x_n)$ não possua subsequência convergente é necessário e suficiente que $\lim |x_n| = +\infty$.

| **Resposta Questão 1** |
| --- |
| |

Nome:

2. $\boxed{2,0 \text{ Pontos}}$ Mostre que se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ também converge. Dê um exemplo tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge mas $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ não converge.

**Resposta Questão 2**

Nome:

3. $\boxed{2,0 \text{ Pontos}}$ Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. Mostre que $f$ possui ponto de mínimo absoluto.

| **Resposta Questão 3** |
| --- |
| |

Nome:

4. $\boxed{2,0 \text{ Pontos}}$ Prove que a função $f(x) = |x|^3$ é de classe $C^2$ na reta inteira mas não é 3 vezes derivável.

**Resposta Questão 4**

Nome:

5. $\boxed{2,0 \text{ Pontos}}$ Defina a distância de um ponto $a \in \mathbb{R}$ a um conjunto não-vazio $X \subset \mathbb{R}$ como $\mathrm{d}(a, X) = \inf\{|x - a| : x \in X\}$. Prove:

   a) $\mathrm{d}(a, X) = 0$ se e somente se, $a \in \overline{X}$ (conjunto dos pontos de aderência de $X$);

   b) Se $F \subset \mathbb{R}$ é fechado, então para todo $a \in \mathbb{R}$ existe $b \in F$ tal que $\mathrm{d}(a, F) = |b - a|$.

| **Resposta Questão 5** |
| --- |
| |

Nome:

6. (2,0 pontos) Daniel tinha um par de dados e os lançou simultaneamente. Qual a probabilidade de

   a) o produto dos números seja igual à 4?
   b) a soma das faces seja divisível por 5?
   c) obter um número ímpar na soma das faces ou a soma das faces é pelo menos 9?

| **Resposta Questão** 6 |
| --- |
| |

Nome:

7. (2 Pontos) O Bingo é um jogo sem limite de participantes,onde todos recebem uma cartela com 24 números de 1 a 75, distribuídos entre 5 linhas e 5 colunas, estas com as letras B, I, N, G e O no topo, como referência. Considere uma cartela de Bingo como na Figura 1, sendo que a coluna da letra N tem somente 4 casas com números. Responda as perguntas abaixo. Obs.: Pode deixar as respostas em termos de fatoriais ou combinações.

| B | I | N | G | O |
|---|---|---|---|---|
| 12 | 18 | 41 | 47 | 61 |
| 7 | 26 | 39 | 54 | 70 |
| 4 | 27 | · | 49 | 63 |
| 5 | 23 | 35 | 58 | 73 |
| 3 | 30 | 32 | 52 | 75 |

FIGURA 1: Exemplo de uma cartela de Bingo

a) Quantas cartelas de Bingo diferentes são possíveis?

b) De quantas maneiras podemos pegar uma cartela que ganhe o Bingo?

c) Você decidiu jogar o Bingo e claro que deseja ganhar. Qual o número de elementos do espaço amostral deste experimento?

**Resposta Questão** 7

**8**. (2 Pontos) Duas bolas são escolhidas de uma urna contendo 4 bolas azuis, 3 vermelhas e 2 laranjas. Suponha que ganhamos 10 reais para cada bola azul selecionada, ganhamos 1 real para cada bola laranja, porém perdemos 8 reais para cada bola vermelha. Seja $X$ o nosso lucro.

a) Determine a função de probabilidade de $X$;

b) Determine a função de distribuição acumulada de $X$;

c) Obtenha o valor esperado de $X$.

**Resposta Questão** 8

**9** (2 Pontos) Um cliente que visita o departamento de roupas masculinas de uma loja compra um terno com probabilidade $2/5$, uma gravata com probabilidade $5/12$ e uma camisa com probabilidade $1/2$. O cliente compra um terno e uma gravata com probabilidade $2/15$, um terno e uma camisa com probabilidade $17/60$ e uma gravata e uma camisa com probabilidade $1/4$; compra os três itens com probabilidade $1/12$. Considere os eventos $A$: O cliente compra um terno. $B$: O cliente compra uma gravata. $C$: O cliente compra uma camisa.

a) Os eventos $A$, $B$ e $C$ são independentes?

b) Qual a probabilidade de que o cliente não compre nenhum dos itens?

c) Dado que o cliente vai comprar uma camisa, qual a probabilidade de que também compre uma gravata e um terno?

**Resposta Questão** 9

Nome:

10. (2 Pontos) Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma partição de $\Omega$, isto é $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$ e $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$. Seja $\mathbb{P}(A_i) = ab^i,\ i \geq 1$. Quais condições $a$ e $b$ devem satisfazer para que $\mathbb{P}$ seja uma medida de probabilidade?

| **Resposta Questão** 10 |
|---|
| |