



Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e de
Computação



CONTROLE COM ADAPTAÇÃO EM MODO DUAL UTILIZANDO UMA REDE RBF

Odailson Cavalcante de Oliveira

Orientador: Prof. Dr. Aldayr Dantas de Araújo

Co-orientador: Prof. Dr. Allan de Medeiros Martins

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e de Computação da UFRN (área de concentração: Automação e Sistemas) como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências.

Natal, RN, setembro de 2016

Divisão de Serviços Técnicos.
Catalogação da publicação na fonte.
IFRN / Biblioteca Natanael Gomes da Silva

O48c Oliveira, Odailson Cavalcante de.
Controle com adaptação em modo dual utilizando uma rede RBF./ Odailson Cavalcante de Oliveira. – Natal, 2016.
94f.

Orientador: Prof. Dr. Aldayr Dantas de Araújo.
Co-orientador: Prof. Dr. Allan de Medeiros Martins
Tese (Doutorado). Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica de Computação - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2016.

1. Controle Adaptativo. 2. Controle em Modo Dual. 3. Redes Neurais. I. Título.

CDU 004.8

CONTROLE COM ADAPTAÇÃO EM MODO DUAL UTILIZANDO UMA REDE RBF

Odailson Cavalcante de Oliveira

Tese de Doutorado aprovada em 1 de setembro de 2016 pela banca examinadora composta pelos seguintes membros:



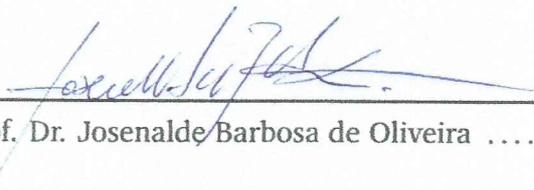
Prof. Dr. Aldayr Dantas de Araújo (orientador) UFRN



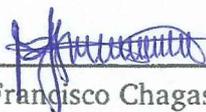
Prof. Dr. Allan de Medeiros Martins (co-orientador) UFRN



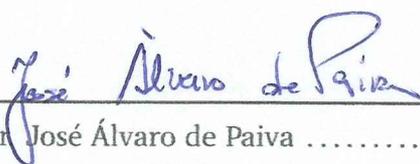
Prof. Dr. Caio Dorneles Cunha UFRN



Prof. Dr. Josenalde Barbosa de Oliveira UFRN



Prof. Dr. Francisco Chagas de Lima Junior UERN



Prof. Dr. José Álvaro de Paiva IFRN

*Aos meus pais, Maria e Francisco
Aos meus irmãos
À minha esposa, Rose*

Agradecimentos

Aos meus orientadores, Aldayr e Allan, pelas diversas sugestões e pelo conhecimento transmitido que contribuiu significativamente para os avanços da pesquisa.

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte (IFRN) pelo incentivo à capacitação, dispensando-me temporariamente das atividades para a conclusão do meu doutorado.

Aos meus amigos Leonardo Rodrigues e Francisco Chagas pelo apoio e incentivo.

À minha família, especialmente meus pais, que em muito me apoiaram e deram as condições essenciais para que eu pudesse enfrentar os desafios diários da vida.

À minha amada esposa, Rose, que sempre acreditou em mim e ofereceu sua acolhedora companhia.

Resumo

Neste trabalho será apresentada uma estratégia de controle utilizando uma rede com funções de base radial (rede RBF) com adaptação em modo dual. O objetivo da estratégia é utilizar a capacidade aproximativa da rede RBF no controle de sistemas não-lineares desconhecidos, ou conhecidos com incertezas. O controle proposto utiliza a estrutura do Controle Adaptativo por Modelo de Referência (MRAC) e uma rede RBF cujos parâmetros são ajustados em tempo real através de uma adaptação em modo dual, o que permitirá um rápido transitório e um sinal de controle suave em regime permanente. A adaptação em modo dual dos parâmetros da rede RBF é feita usando a função tangente hiperbólica, que durante o transitório proporcionará um comportamento similar ao controle por estrutura variável, e durante o regime permanente atuarão as leis integrais do MRAC reguladas pela função secante hiperbólica. A tangente hiperbólica é usada no lugar da função sinal das leis chaveadas para reduzir o fenômeno de *chattering*. A função secante hiperbólica é usada para regular a lei integral, aumentando seu efeito em regime permanente e reduzindo durante o transitório, evitando oscilações na resposta do sistema. Serão apresentadas uma prova de estabilidade baseada na teoria de Lyapunov para a rede RBF em modo dual e comparações através de simulações.

Palavras-chave: Controle Adaptativo, Controle em Modo Dual, Redes Neurais, Funções de Base Radial.

Abstract

This work presents a control strategy using a network with radial basis function (RBF network) with adaptation in dual mode. The objective of the strategy is to use the approximate capacity of the RBF network to control nonlinear systems with unknown parameters or with uncertainties. The proposed control uses the structure of Model Reference Adaptive Control (MRAC) and a RBF network whose parameters are adjusted in real time in dual mode, which will allow a fast transient and a smooth control signal in steady state. The dual mode adaptive method of RBF network parameters uses the hyperbolic tangent function, which during the transient provides a similar behavior to variable structure control, and integral laws of MRAC that are regulated by a hyperbolic secant function during steady state. A hyperbolic tangent is used instead of signal function what reduces the chattering phenomenon. A hyperbolic secant is used to regulate the integral law, increasing its effects on steady state and reducing on transient time. It is presented a Lyapunov proof for dual mode method and comparisons through simulations.

Keywords: Adaptive Control, Dual Mode Control, Neural Network, Radial Basis Functions.

Sumário

Sumário	i
Lista de Figuras	ii
Lista de Tabelas	v
Lista de Símbolos e Abreviaturas	vii
1 Introdução	1
1.1 Motivação	1
1.2 Estrutura da Tese	4
2 Controle Adaptativo	5
2.1 Controle Adaptativo por Modelo de Referência - MRAC	5
2.1.1 Problema de Controle, Caso Vetorial ($n^* = 1$)	10
2.2 Leis de Adaptação - MRAC	16
2.3 VS-MRAC	18
2.4 Leis de Adaptação - VS-MRAC	20
2.5 Conclusão do Capítulo	21
3 Redes de Funções de Base Radial	23
3.1 Introdução	23
3.2 Redes RBF	23
3.3 Conclusão do Capítulo	30
4 Análise de Estabilidade	31
4.1 Introdução	31
4.2 Estrutura de Controle do MRAC com a rede RBF	32
4.2.1 Metodologia de Adaptação em Modo Dual	35
4.2.2 Rede RBF com Leis de Adaptação Integral e Chaveada	37

4.2.3	Estabilidade da rede RBF em Modo Dual ($k^{\text{nom}} = 1, n^* = 1$) . . .	40
4.3	Conclusão do Capítulo	44
5	Simulações	45
5.1	Introdução	45
5.2	Síntese do Controle e Simulações	45
5.3	Conclusão do Capítulo	56
6	Conclusões	57
6.1	Contribuições e Perspectivas da Pesquisa	59
	Referências Bibliográficas	60
A	Informações Matemáticas Auxiliares	65
A.1	Normas e Espaço \mathcal{L}_p	65
A.2	Conjuntos, Matrizes e Funções	67
A.2.1	Conjunto Aberto	67
A.2.2	Positividade de Matrizes	67
A.2.3	Continuidade de Funções	68
A.3	Considerações sobre Estabilidade	68
A.3.1	Teoria de Lyapunov	69

Lista de Figuras

2.1	Estrutura Básica do MRAC	7
2.2	Estrutura de Controle do MRAC Convencional	11
3.1	Estrutura Fundamental da Rede RBF	24
3.2	Função Gaussiana	25
3.3	Aproximação da Rede RBF com Pesos Não-ideais	26
3.4	Aproximação da Rede RBF para Pesos Ideais	26
4.1	Rede RBF	32
4.2	Estrutura de Controle do MRAC com a Rede RBF	34
4.3	Regiões de Controle	36
5.1	Saídas Planta/Modelo	49
5.2	Erros de Saída	50
5.3	Sinais de Controle	51
5.4	Parâmetros do MRAC	52
5.5	Parâmetros da Rede RBF com Leis do MRAC	53
5.6	Parâmetros da Rede RBF com Leis Tangente Hiperbólica	54
5.7	Parâmetros da Rede RBF com Leis em Modo Dual	55

Lista de Tabelas

A.1	Principais Normas Induzidas no Espaço \mathbb{R}^n	66
-----	--	----

Lista de Símbolos e Abreviaturas

- $(.)^*$ Refere-se ao valor ideal de uma variável ou ao grau relativo da planta
- $(.)^T$ Operador transposição
- $(.)^{\text{nom}}$ Refere-se ao valor nominal ou valor *à priori* de uma variável
- $B(\mathbf{a}, \delta)$ Bola aberta centrada em \mathbf{a} de raio δ
- $D_p(s), D_m(s)$ Denominadores de $W(s)$ e de $M(s)$, respectivamente
- D_R Refere-se ao conjunto residual para o qual o sistema de controle em modo dual converge
- $G_u(s), G_y(s)$ Funções de transferência dos sinais realimentados no esquema do MRAC
- K_e, K Constantes positivas
- N Refere-se ao número de centros ou gaussianas da rede RBF
- $N_p(s), N_m(s)$ Numeradores de $W(s)$ e de $M(s)$, respectivamente
- $N_u^*(s), N_y^*(s)$ Polinômios do numerador de G_u e G_y , respectivamente
- P Dimensão do vetor de entrada da rede RBF
- S Subespaço vetorial de entrada da rede RBF
- U Sinal de controle do MRAC sem o termo dependente de r
- U_{RBF} Sinal de controle da rede RBF sem o termo dependente de r ou sem o *bias*
- V Função de energia de Lyapunov ou candidata à função de energia de Lyapunov
- V_0 Valor inicial da função de energia de Lyapunov
- V_∞ Valor final da função de energia de Lyapunov
- $W(s)$ Função de transferência da planta

- $W_d(s)$ Função de transferência entre o sinal de controle e a referência r no esquema do MRAC
- δ Dependendo do contexto, pode referir-se ao erro de aproximação da rede RBF ou ao raio de uma bola aberta B
- $(\dot{\cdot})$ Refere-se à derivada no tempo de uma variável
- ϵ Constante que limita o erro de aproximação da rede RBF
- γ_1, γ_2 Ganhos adaptativos para o caso escalar
- $(\hat{\cdot})$ Refere-se ao valor de uma variável cujos parâmetros que a define não são os corretos
- κ, ρ Constantes que determinam a incerteza entre k_p e k_p^{nom}
- λ_1, λ_2 Parâmetros de ajuste das funções \tanh e sech , respectivamente
- $\lambda_{\min Q}, \lambda_{\max Q}$ Refere-se aos autovalores mínimo e máximo, respectivamente, de uma matrix qualquer Q
- \mathbb{R}^n Espaço dos números reais de dimensão n
- \mathcal{L}_p Espaço das funções p -integráveis, para $p = [1, \infty)$
- $\text{sech}(\cdot)$ Secante hiperbólica
- $\text{sgn}(\cdot)$ Função sinal
- A_p, A_o, A_c Matrizes referentes à planta, à planta aumentada e ao modelo de referência, respectivamente
- J Matriz Jacobiana do vetor g
- J_1 Matriz quadrada composta pelas linhas LI de J
- J_2 Matriz quadrada composta pelas linhas LD de J
- Q, P Matrizes simétricas definidas-positivas
- Γ Matriz diagonal com os ganhos adaptativos do MRAC
- Λ Matriz estável para filtros

- θ, θ_ξ Vetor de parâmetros do MRAC
- θ^+ Vetor de parâmetros definido como $\theta^+ = \theta_\xi^{\text{nom}} - \theta_\xi^{*\text{nom}}$ do MRAC
- ξ, ξ_ξ Vetores regressores
- ξ_ξ Vetor de entrada da rede RBF
- $\mathbf{b}_p, \mathbf{b}_c, \mathbf{b}, \mathbf{b}_f, \mathbf{b}'_0, \mathbf{h}_p, \mathbf{h}_c$ Vetores das equações de estado do sistema
- \mathbf{c}_i Vetor de coordenadas do i -ésimo(a) centro ou gaussiana da rede RBF
- \mathbf{e} Erro entre as variáveis de estado da planta e do modelo de referência
- \mathbf{g} Vetor de respostas das funções gaussianas da rede RBF
- $\mathbf{v}_y, \mathbf{v}_u$ Vetores dos filtros para a planta
- \mathbf{w} Vetor de pesos da rede RBF
- \mathbf{w}_1 Vetor de pesos cujas componentes ponderam as linhas LI de \mathbf{J}
- \mathbf{w}_2 Vetor de pesos cujas componentes ponderam as linhas LD de \mathbf{J}
- \mathbf{x} Dependendo do contexto pode indicar um vetor no \mathbb{R}^n ou o vetor de estado da planta
- \mathbf{x}_m Vetor de estado do modelo
- \mathbf{x}_p Vetor de estado da planta
- \bar{U} Sinal composto pelos termos desconhecidos da planta e das perturbações de entrada
- $\bar{W}_d(s)$ Função de transferência em malha fechada entre d e e_0 para o sinal de controle ideal, i. e. $u = u^*$
- $\bar{\theta}$ Amplitude das funções chaveadas do VS-MRAC
- \bar{c}_i Constante que define a amplitude da função sgn nas leis de adaptação em modo dual quando o erro cruza a região k
- \bar{w}_i Amplitude da função φ_i das leis em modo dual
- ϕ Refere-se à função $\text{sech}(\cdot)$

- ϕ_i Função responsável pela adaptação dos pesos i da rede RBF durante o regime permanente nas leis de adaptação em modo dual
- σ Largura da i -ésima(o) gaussiana ou centro da rede RBF
- $\text{tgh}(\cdot)$ Tangente hiperbólica
- θ_1, θ_2 Parâmetros adaptativos para o caso escalar
- φ_i Função responsável pela adaptação dos pesos i da rede RBF durante o transitório nas leis de adaptação em modo dual
- $\widetilde{(\cdot)}$ Refere-se ao erro entre duas variáveis
- a_p, k_p, a_m, k_m Parâmetros da planta e do modelo de referência para o caso escalar
- $c_d, K_w, \zeta, \Delta_w$ Constantes positivas que determinam o tamanho do conjunto residual D_R
- e_0 Erro de saída entre a planta e o modelo de referência
- $f(t), f_v(t), f_l(t)$ Funções no tempo
- g_i Resposta da i -ésima(o) gaussiana ou centro da rede RBF
- k Região de transição entre o VS-MRAC e o MRAC nas leis em modo dual
- k^* Ganho de alta-frequência da função de transferência do erro e_0 , e é igual à $\frac{1}{\theta_{2n}^*} = \frac{k_p}{k_m}$
- k^{nom} Valor nominal para k^*
- k_p, k_m Ganhos de alta-frequência da planta e do modelo de referência
- n Dependendo do contexto pode indicar a ordem da planta ou dimensão do espaço real \mathbb{R}^n
- r Sinal de referência
- s Variável complexa no domínio da frequência
- t Variável tempo
- u Sinal de controle

u_{RBF}	Sinal de controle da rede RBF
w_i	Componente do vetor w ou peso da i -ésima gaussiana ou centro da rede RBF
w_{ai}	Termo da lei de adaptação para os pesos i da rede RBF em modo dual responsável pelo regime permanente
w_{si}	Termo da lei de adaptação para os pesos i da rede RBF em modo dual responsável pelo transitório
x	Estado escalar para planta
x_m	Estado escalar para o modelo de referência
y	Sinal de saída da planta
y_m	Sinal de saída do modelo de referência
$z(t)$	Variável de estado da não-linearidade do exemplo nas simulações
<i>chattering</i>	Fenômeno que ocorre quando o sinal de controle chaveia em altíssima frequência para manter a planta em modo deslizante
DMARC	<i>Dual Mode Adaptive Robust Control</i>
ERP	Estritamente real positivo
KYL	Refere-se ao lema de <i>Kalman-Yakubovich-Lefschetz</i>
LD	Linearmente dependente
LI	Linearmente independente
MIMO	<i>Multiple-Input and Multiple-Output</i>
RBF	<i>Radial Basis Functions</i>
RBF-DMARC	Rede RBF com pesos adaptados com leis em modo dual
RBF-HTAC	Rede RBF com pesos adaptados com leis utilizando $\tanh(\cdot)$
RBF-MRAC	Rede RBF com pesos adaptados com leis integrais do MRAC
SISO	<i>Single-Input Single-Output</i>
SMC	<i>Sliding Mode Control</i>
VS-MRAC	<i>Variable Structure Model Reference Adaptive Control</i>

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

As últimas décadas de pesquisas na área de controle trouxeram contribuições que proporcionaram soluções para o controle de sistemas não lineares. Cada solução desenvolvida tem vantagens e restrições quando aplicadas a certas classes de sistemas não lineares. A dificuldade dos projetistas é que não há regra geral que possa ser utilizada na análise de estabilidade de qualquer classe de sistema não linear. Assim, cada sistema não linear é específico, merecendo sua própria análise, conforme sua natureza e aplicação. De modo geral, as ferramentas matemáticas para a análise de estabilidade requerem modelos para esses sistemas, o que nem sempre é fácil de se obter. Um sistema não linear geralmente possui parâmetros desconhecidos ou conhecidos com incertezas, o que é um obstáculo para as estratégias de controle e para as ferramentas matemáticas utilizadas na análise de estabilidade. Um dos principais avanços alcançados no controle dos sistemas descritos anteriormente foi o controle adaptativo por modelo de referência (*Model Reference Adaptive Control-MRAC*). Este tipo de controle adaptativo ofereceu uma saída para casos em que não se conhece ou não se tem certeza acerca dos parâmetros da planta do sistema que se deseja controlar. O princípio geral do MRAC se baseia em adaptar os parâmetros do controlador a fim de reduzir o erro entre a saída da planta e a saída de um modelo de referência. Essa adaptação envolve o controle das derivadas dos parâmetros, aumentando ou reduzindo a taxa de variação desses. Essa técnica é chamada de lei integral de adaptação e garante estabilidade global e para um sinal de controle rico em frequências garante-se também que os parâmetros convergem para os ideais. No entanto, a convergência da planta para o modelo de referência é bastante lenta e oscilatória, o que reduziu a aplicação do MRAC a certas classes de sistemas (Hsu et al., 1994).

Com os problemas que foram trazidos à luz por Rohrs et al. (1982), que mostrou a

perda de estabilidade do controle adaptativo diante de perturbações e de dinâmica não-modelada, passou-se não apenas em se buscar rapidez e precisão no desempenho dos controladores, mas a robustez foi uma propriedade que deveria ser agregada ao projeto dos controladores. Como solução para o problema de estabilidade e robustez podem ser utilizados o Controle Adaptativo por Modelo de Referência e Estrutura Variável (*Variable Structure Model Reference Adaptive Control*- VS-MRAC) ou Controle por Modos Deslizantes (*Sliding Mode Control*-SMC). Tanto o VS-MRAC como o SMC utilizam funções com descontinuidades incorporadas às leis de controle, fazendo o sinal de controle comutar bruscamente em determinadas valores para se obter a convergência desejada.

O VS-MRAC tem como objetivo, assim como o MRAC, fazer a saída da planta convergir para a saída de um modelo de referência. A ideia do VS-MRAC é utilizar leis chaveadas na adaptação dos parâmetros do controlador. Assim, o VS-MRAC conduz as trajetórias do sistema a uma superfície deslizante, onde o sistema se comportará como um modelo de referência escolhido. Pelas suas propriedades de rápida resposta no transitório, robustez e rejeição de perturbações e variações paramétricas, o VS-MRAC tem sido o foco de muitas pesquisas para o controle de sistemas não lineares. O problema é que para manter o sistema na superfície deslizante o sinal de controle comuta em altíssima frequência provocando um fenômeno conhecido como *chattering* (Young et al., 1999; Nouri et al., 1993; Hsu, 1990).

Outras técnicas foram desenvolvidas servindo como soluções para o problema de robustez e controle de sistemas não lineares. Um exemplo dessas técnicas é a combinação das redes neurais e de outras estratégias de controle. As Redes Neurais Artificiais, que são modelos matemáticos baseados na estrutura cerebral, têm sido discutidas e aplicadas como estratégia de controle de sistemas não lineares, e mostraram-se muito promissoras devido sua grande capacidade aproximativa. Dentro da área de redes neurais existem as redes de Funções de Base Radial (*Radial Basis Functions*-RBF), que são o foco desse trabalho, e têm sido bastante aplicadas como técnica de controle para casos não lineares e também possuem boa capacidade aproximativa (Chen e Chen, 1995; Park e Sandberg, 1991). As redes RBF mostram-se globalmente estáveis para certas classes de sistemas com dinâmicas não lineares desconhecidas e de difícil controle (Sanner e Slotine, 1992). As redes RBF já foram combinadas com outras estratégias de controle para solucionar casos não lineares, podendo-se mencionar, em especial, o uso de redes RBF e o controle por modos deslizantes, em que leis chaveadas são utilizadas para adaptação dos parâmetros da rede RBF (Hsu, 2011; Zhihong et al., 1995; Jinzhu e Hongtian, 2010). Em Yu et al. (2010), uma rede

RBF é empregada para controlar um sistema não-linear desconhecido e os pesos da RBF são adaptados através de uma lei chaveada. Em Guo et al. (2006), uma rede RBF com SMC é aplicada para controlar o sistema caótico de Lorenz. Em Frikha et al. (2010), um controlador proporcional integral (PI) é associado a uma rede RBF com SMC para reduzir o *chattering*. Como exemplo de caso múltiplas entradas e múltiplas saídas (*Multiple-Input and Multiple-Output-MIMO*), um braço robótico biarticulado é controlado através de uma rede RBF com SMC (Huang e Chiou, 2006). E o controle de motores de indução com RBF e SMC é descrito em Liu e Zhang (2008) e Yuan et al. (2009).

Na verdade, há um esforço dos pesquisadores da área para desenvolver soluções para eliminar as restrições das estratégias SMC e VSC. Em Cunha et al. (2005) propõe-se uma versão do Controle Adaptativo Robusto em Modo Dual (*Dual Mode Adaptive Robust Control-DMARC*) com a combinação de leis de adaptação do VS-MRAC e do MRAC, através de uma combinação convexa que permite uma transição automática e suave do VS-MRAC para o MRAC. Assim, o DMARC tem uma melhor capacidade de resposta durante o transitório, devido ao VS-MRAC, e o bom desempenho do MRAC em regime permanente. Isto resulta em um sinal de controle livre de *chattering*. Uma versão do DMARC associado à rede RBF é usado em Hsu e Real (1997) para aproximação de um termo não-linear presente na entrada da planta e, neste caso, os parâmetros da rede RBF são adicionados aos outros parâmetros do DMARC, criando um modelo aumentado do sistema de controle, sendo que os parâmetros são adaptados utilizando uma combinação convexa fixa das leis de adaptação do VS-MRAC e do MRAC.

Usando a ideia de adaptação em modo dual, este trabalho apresenta um controlador RBF para sistemas não lineares com apenas medições de entrada e saída. A adaptação dos pesos é feita através de uma combinação de leis chaveadas e integrais. A lei chaveada permite uma melhor capacidade de resposta do sistema no transitório e a lei integral atua na convergência do sistema para o modelo de referência em regime permanente. A tangente hiperbólica é usada ao invés da função sinal, o que elimina o *chattering*. A secante hiperbólica é utilizada para intercalar as metodologias, produzindo uma dualidade na lei de adaptação que resulta em uma boa convergência do erro de saída em regime permanente e um transitório sem oscilações. Através desta estratégia, busca-se proporcionar ao controlador as vantagens da utilização de uma rede RBF com sua capacidade aproximativa associada aos métodos de adaptação em modo dual. Como resultado, tem-se um sistema com rápido transitório, rejeição de perturbações e um sinal de controle suave (Oliveira et al., 2013).

1.2 Estrutura da Tese

No capítulo 2 será apresentada uma visão detalhada do que é o controle adaptativo. Será dada a motivação para as estratégias como MRAC e VS-MRAC e as suas leis de adaptação. Serão dados exemplos do caso escalar e do caso vetorial para ambos os controles. Também são desenvolvidas provas de estabilidade para os controladores citados. Mostra-se que o MRAC é estável e que o erro de saída entre o modelo de referência e a planta tende a se anular. No caso do VS-MRAC, mostra-se que o controle garante convergência assintótica e em tempo finito.

No capítulo 3 serão discutidos os conceitos básicos das redes de funções de base radial (RBF) e sua capacidade aproximativa de funções desconhecidas. Será exemplificado graficamente como a rede pode aproximar uma função desconhecida. Também será feita uma conexão da rede RBF e o controle adaptativo através de uma aproximação local das funções de base radial e, por comparação com os parâmetros do MRAC, será mostrada a condição de casamento para a rede RBF e os parâmetros ideais de controle.

No capítulo 4 será apresentado o desenvolvimento matemático do sistema de controle com a rede RBF e as provas de estabilidade através da teoria de Lyapunov. As leis de controle em modo dual serão detalhadas e será explicado o princípio de operação dessa estratégia. Também serão considerados os casos para a rede RBF utilizando leis integrais puras, similar ao MRAC, e as leis chaveadas baseadas no controle por estrutura variável. Provas de estabilidade para esses casos também são desenvolvidas. Na prova de estabilidade para as leis em modo dual, será mostrada a convergência do sistema em modo dual para um conjunto residual.

No capítulo 5 serão mostrados os resultados das simulações do sistema de controle em modo dual. Será possível observar o bom desempenho do controle com rede RBF com a metodologia em modo dual no rápido transitório, na rejeição de perturbações e variações paramétricas, robustez e na redução do *chattering*. As simulações consistirão em fazer tal sistema seguir um modelo de referência com grau relativo unitário. Simulações para efeito de comparação do desempenho entre os métodos da rede RBF com leis integrais e chaveadas também são mostradas.

No capítulo 6, serão apresentados os benefícios da aplicação da técnica de controle desenvolvida e uma visão geral do que foi discutido neste texto e os resultados obtidos nas simulações. Também é apresentada uma visão das perspectivas de novos trabalhos envolvendo estudos quanto ao grau relativo maior que 1, dinâmica não-modelada e desacoplamento de sistemas MIMO.

Capítulo 2

Controle Adaptativo

Neste capítulo será apresentada uma visão do que é controle adaptativo e sua evolução até a estrutura do controle adaptativo com estrutura variável. Inicialmente será comentado o que justificou o desenvolvimento de estratégias como o MRAC e o VS-MRAC e as suas leis de adaptação. Os exemplos para os casos escalares proporcionarão uma ideia simplificada do funcionamento do controle adaptativo para ambas as estratégias citadas. No exemplo escalar do MRAC, de modo simples, mostra-se a lei de adaptação integral que envolve os ajustes das derivadas dos parâmetros do controlador e sua prova de estabilidade através do método de Lyapunov. Segue-se, após isso, o desenvolvimento das equações para o caso vetorial, onde é apresentada a estrutura completa do controle. São comentadas as partes que compõe esta estrutura e as suposições que precisam ser feitas para o estudo analítico do MRAC e do VS-MRAC. Também são averiguadas as provas de estabilidade para os controladores citados. Mostra-se que o MRAC é estável e que o erro de saída entre o modelo e a planta vai a zero conforme o tempo de adaptação avança. No caso do VS-MRAC, também é feita uma análise escalar e apresentada uma prova de estabilidade para o mesmo. A análise vetorial é feita posteriormente, onde mostra-se que o controle garante convergência assintótica e em tempo finito.

2.1 Controle Adaptativo por Modelo de Referência

- MRAC

No projeto de um sistema de controle dificilmente informações completas a respeito do sistema que se deseja controlar estão disponíveis. Uma modelagem matemática qualquer que definirá uma planta para o sistema, com parâmetros estimados a partir de ensaios de um sistema real, certamente não irá representá-lo para vários pontos de ope-

ração. Os parâmetros obtidos desta forma compõem uma planta que representa apenas parte do conhecimento do sistema, pois o sistema real é não linear cuja complexidade é influenciada por diversos fatores. Uma planta modelada pode representar bem um sistema real diante de uma série de restrições e numa faixa estreita em torno de um ponto de operação. No entanto, o sistema real estará submetido a certas condições que podem causar variações paramétricas e perturbações, resultando em um desvio significativo entre a planta parametrizada e o sistema real. Para esta situação, em que se desconhece ou se conhece com incertezas os parâmetros da planta, o controle adaptativo pode ser empregado para compensar os desvios da planta parametrizada e do sistema real.

O controle adaptativo constitui-se basicamente de uma estrutura que se ajusta a partir do monitoramento dos sinais medidos da planta, e que regula o sinal de controle para que a planta tenha um comportamento desejado. No caso do MRAC, dispõe-se de uma planta modelo, definida pelo projetista de controle, que determinará a dinâmica para a planta seguir. A saída da planta é comparada com a saída do modelo sob o comando de um sinal de referência r . O controle, então, irá conduzir a planta para o modelo de referência conforme os ajustes dos parâmetros forem ocorrendo (Astrom e Wittenmark, 1994). A Fig. 2.1 mostra uma estrutura simples do MRAC. No bloco *Algoritmos de Adaptação* é onde são feitas as adaptações dos parâmetros θ do controlador para que o sinal de controle faça a planta convergir para o modelo. Em outros termos, espera-se que $u(\theta)$ faça o erro $e_0 = y - y_m \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$. Em teoria, deve existir um vetor de parâmetros θ^* tal que $u^* = u(\theta^*)$ seja capaz de fazer a planta se comportar como o modelo de referência $y \rightarrow y_m$, quando $t \rightarrow \infty$.

Existem, basicamente, duas formas de se implementar o controle MRAC, chamadas MRAC-direto e MRAC-indireto. No caso do MRAC-indireto, os parâmetros do controlador são ajustados a partir de estimativas em tempo-real dos parâmetros da planta, e depois a lei de controle é executada com tais estimativas. No caso do MRAC-direto, que é o foco desta tese, o controlador tem seus parâmetros atualizados a cada instante t , a partir de uma lei de adaptação baseada nas medições de u e de y e do erro e_0 , sem a necessidade de se saber os parâmetros da planta.

A seguir, são apresentados alguns lemas importantes para as análises de estabilidade, e consideraremos nas próximas seções uma análise geral do MRAC.

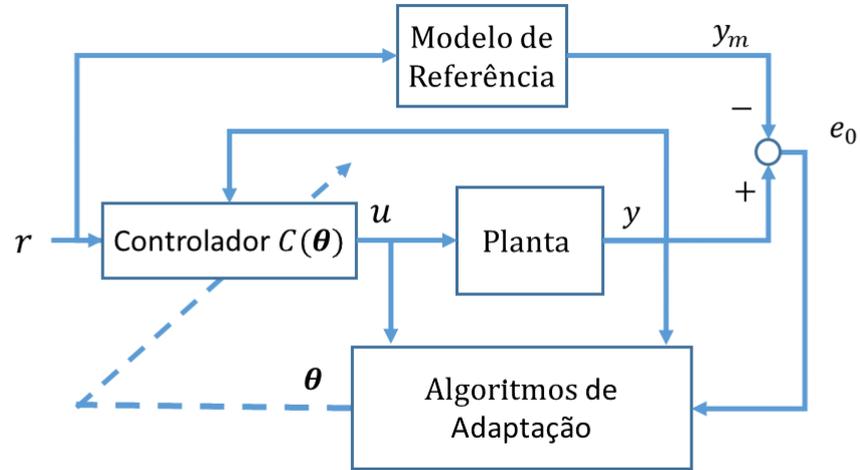


Fig. 2.1 Estrutura Básica do MRAC

Problema de Controle: Exemplo Escalar do MRAC

Considere a seguinte planta de primeira ordem:

$$\dot{y} = -a_p y + k_p u \quad (2.1)$$

e no domínio da frequência

$$y(s) = \frac{k_p}{s + a_p} u(s) \quad (2.2)$$

em que a_p e k_p são parâmetros desconhecidos (por conveniência $k_p > 0$). O objetivo da lei de controle em u é manter todos os sinais em malha-fechada uniformemente limitados e que o estado da planta $y \rightarrow y_m$ quando $t \rightarrow \infty$, sendo y_m a saída do modelo de referência dado por

$$\dot{y}_m = -a_m y_m + k_m r \quad (2.3)$$

$$y_m(s) = \frac{k_m}{s + a_m} r(s) \quad (2.4)$$

para um sinal de referência r , contínuo por partes. Os parâmetros $a_m > 0$ e $k_m > 0$ são conhecidos e $y_m(t)$ e $r(t)$ são mensurados a cada instante t . A lei de controle em u deve ser tal que a função de transferência de r a y seja igual à função de transferência do modelo em (2.4).

Considere a seguinte lei:

$$u^* = \theta_1^* y + \theta_2^* r \quad (2.5)$$

em que θ_1^* e θ_2^* são constantes. Aplicando-se u^* na planta em (2.1) pode-se encontrar a condição de casamento, i.e., obter-se o valor de θ_1^* e θ_2^* para que a função de transferência em malha-fechada seja igual a do modelo de referência

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{k_p \theta_2^*}{s + a_p - k_p \theta_1^*} = \frac{k_m}{s + a_m} = \frac{y_m(s)}{r(s)} \quad (2.6)$$

e conclui-se que

$$\theta_2^* = \frac{k_m}{k_p}, \quad \theta_1^* = \frac{a_p - a_m}{k_p} \quad (2.7)$$

Dado que $k_p > 0$, a lei de controle é capaz de fazer a planta em malha-fechada seguir o modelo de referência $\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{y_m(s)}{r(s)}$, e o sinal de controle ideal u^* , na equação (2.5) é computado para a_p e k_p conhecidos. No caso em que os parâmetros da planta não sejam conhecidos, a seguinte lei de controle pode ser utilizada:

$$u = \theta_1(t)y + \theta_2(t)r \quad (2.8)$$

onde agora $\theta_1(t)$ e $\theta_2(t)$ variam com o tempo conforme uma lei de adaptação escolhida em projeto. A proposta neste caso é utilizar o sinal de erro de saída $e_0 = y - y_m$ para adaptar θ_1 e θ_2 de modo que $u \rightarrow u^*$ e $e_0 \rightarrow 0$. Assim, verifica-se uma expressão para

$\dot{e}_0 = \dot{y} - \dot{y}_m$, através das expressões (2.1) e (2.3):

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_0 &= -a_p y + k_p u + a_m y_m - k_m r + k_p u^* - k_p u^* \\
 \dot{e}_0 &= -a_p y + a_m y_m + k_p [(\theta_1 - \theta_1^*)y + (\theta_2 - \theta_2^*)r] + k_p (\theta_1^* y + \theta_2^* r) - k_m r \\
 \dot{e}_0 &= -a_p y + a_m y_m + k_p (\tilde{\theta}_1 y + \tilde{\theta}_2 r) - k_m r + k_p \left(\frac{a_p - a_m}{k_p} y + \frac{k_m}{k_p} r \right) \\
 \dot{e}_0 &= -a_m (y - y_m) + k_m \frac{k_p}{k_m} (\tilde{\theta}_1 y + \tilde{\theta}_2 r) \\
 \dot{e}_0 &= -a_m e_0 + k_m k^* \tilde{\theta}_1 y + k_m k^* \tilde{\theta}_2 r
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

em que $\tilde{\theta}_1 = \theta_1 - \theta_1^*$ e $\tilde{\theta}_2 = \theta_2 - \theta_2^*$ e $k^* = \frac{k_p}{k_m} = \frac{1}{\theta_2^*}$. A expressão (2.9) no domínio da frequência pode ser escrita como:

$$e_0(s) = \frac{k_m}{s + a_m} (k^* \tilde{\theta}_1 y + k^* \tilde{\theta}_2 r) \tag{2.10}$$

em que $\frac{k_m}{s + a_m}$ é uma função de transferência estritamente real positiva (ERP). A escolha das leis de adaptação para os parâmetros θ_1 e θ_2 consiste em determinar funções f_l e f_v tais que $\dot{\theta}_1 = f_l(e_0, y, r, u)$ e $\dot{\theta}_2 = f_v(e_0, y, r, u)$ adequadas para fazer $e_0 \rightarrow 0$. As leis de adaptação podem ser obtidas por métodos de estabilidade como o de Lyapunov, conforme apresentado a seguir.

Define-se uma função candidata a Lyapunov como abaixo:

$$V(e_0, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2) = \frac{e_0^2}{2} + k_p \frac{\tilde{\theta}_1^2}{2\gamma_1} + k_p \frac{\tilde{\theta}_2^2}{2\gamma_2} \tag{2.11}$$

em que $V > 0$ é definida positiva e $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ são os ganhos de adaptação. Então, calculando-se \dot{V} e usando (2.9), tem-se

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= -a_m e_0^2 + k_p \tilde{\theta}_1 y e_0 + k_p \tilde{\theta}_2 r e_0 + k_p \frac{\tilde{\theta}_1}{\gamma_1} \dot{\tilde{\theta}}_1 + k_p \frac{\tilde{\theta}_2}{\gamma_2} \dot{\tilde{\theta}}_2 \\
 \dot{V} &= -a_m e_0^2 + k_p \tilde{\theta}_1 \left(y e_0 + \frac{\dot{\tilde{\theta}}_1}{\gamma_1} \right) + k_p \tilde{\theta}_2 \left(r e_0 + \frac{\dot{\tilde{\theta}}_2}{\gamma_2} \right)
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

e usando-se em \dot{V} as seguintes leis de adaptação:

$$\dot{\tilde{\theta}}_1 = \dot{\theta}_1 = -\gamma_1 y e_0 \tag{2.13}$$

$$\dot{\tilde{\theta}}_2 = \dot{\theta}_2 = -\gamma_2 r e_0 \tag{2.14}$$

tem-se que

$$\dot{V} = -a_m e_0^2 \leq 0 \quad (2.15)$$

Observa-se que $\dot{V} \leq 0$ é semi-definida negativa. Portanto, V é uma função de Lyapunov não-crescente, logo, o ponto de equilíbrio $(e_0, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2) = (0, 0, 0)$ é estável, o que nos permite concluir que $e_0, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2 \in \mathcal{L}_\infty$. E com base em (2.9) tem-se que $\dot{e}_0 \in \mathcal{L}_\infty$. Sabe-se ainda que $V \rightarrow V_\infty$ quando $t \rightarrow \infty$ (pois $V > 0$ e $\dot{V} \leq 0$), com $V(t = \infty) = V_\infty \geq 0$ constante. Através de (2.15), tem-se $\int_0^\infty -a_m e_0^2 d\tau = \int_0^\infty \dot{V} d\tau = V_\infty - V_0 < \infty$, onde $V(t = 0) = V_0$ constante. Então, conclui-se que $e_0 \in \mathcal{L}_2$. Assim, pelo Lema A.3.3 (Barbalat, página 70), implica que $e_0 \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$. E, para um sinal de referência r rico em frequências, tem-se ainda que $\theta_1 \rightarrow \theta_1^*$ e $\theta_2 \rightarrow \theta_2^*$.

Portanto, foram estabelecidas as leis de controle e de adaptação que garantem a convergência da planta para o modelo de referência e que todos os sinais do sistema em malha-fechada são uniformemente limitados. Vejamos a seguir o caso vetorial para uma planta SISO (*Single-Input Single-Output*).

2.1.1 Problema de Controle, Caso Vetorial ($n^* = 1$)

Considere o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_p &= \mathbf{A}_p \mathbf{x}_p + \mathbf{b}_p (u + d) \\ y &= \mathbf{h}_p^T \mathbf{x}_p \end{aligned} \quad (2.16)$$

em que $\mathbf{x}_p \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{A}_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{b}_p \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{h}_p \in \mathbb{R}^n$ e $y, u, d \in \mathbb{R}$ são o sinal de saída, sinal de controle e uma perturbação de entrada, respectivamente. O termo d pode incluir não-linearidades e distúrbios de medições. A função de transferência entre os sinais de entrada e a saída y é dada por:

$$W(s) = k_p \frac{N_p(s)}{D_p(s)} = \mathbf{h}_p^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_p)^{-1} \mathbf{b}_p \quad (2.17)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade, $N_p(s)$ e $D_p(s)$ são polinômios mônicos e k_p é o ganho de alta-frequência. Considere também o seguinte modelo de referência dado pela função de transferência:

$$y_m = M(s)r = k_m \frac{N_m(s)}{D_m(s)} r \quad (2.18)$$

onde y_m e r são a saída do modelo e um sinal de referência contínuo por partes, respectivamente. k_m é o ganho de alta-frequência, D_m é Hurwitz e N_m e D_m são polinômios mônicos. Para implementar o controle são adicionados à realimentação do sistema os seguintes filtros $\mathbf{v}_y, \mathbf{v}_u \in \mathbb{R}^{n-1}$ dados por:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{v}}_y &= \Lambda \mathbf{v}_y + \mathbf{b}_f y \\ \dot{\mathbf{v}}_u &= \Lambda \mathbf{v}_u + \mathbf{b}_f u\end{aligned}\quad (2.19)$$

onde o par (Λ, \mathbf{b}_f) é controlável e escolhido de modo que $N_m(s) = \det(sI - \Lambda)$, sendo $\Lambda \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ uma matriz estável. Na Fig. 2.2 é apresentada a estrutura de controle do MRAC.

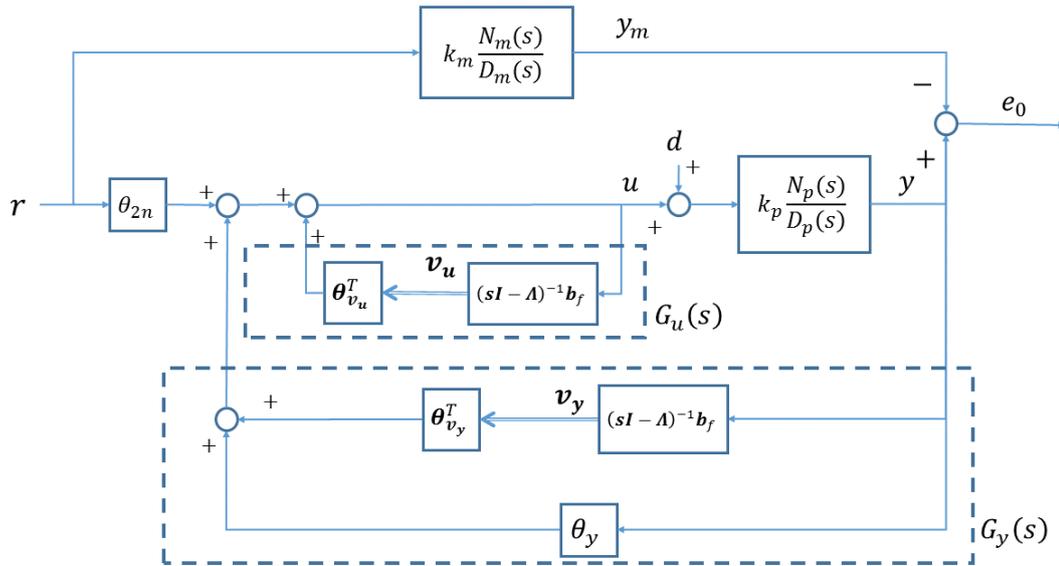


Fig. 2.2 Estrutura de Controle do MRAC Convencional

O sinal de controle do MRAC é dado por:

$$u = \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\theta}_\xi^T \boldsymbol{\xi}_\xi + \theta_{2n} r \quad (2.20)$$

em que $\boldsymbol{\theta}^T = [\theta_y \ \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{v}_u}^T \ \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{v}_y}^T \ \theta_{2n}]$, $\boldsymbol{\theta}_\xi^T = [\theta_y \ \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{v}_u}^T \ \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{v}_y}^T]$ e θ_{2n} são os parâmetros adaptativos. Os sinais de realimentação são $\boldsymbol{\xi}^T = [y \ \mathbf{v}_u^T \ \mathbf{v}_y^T \ r] \in \mathbb{R}^{2n}$ e $\boldsymbol{\xi}_\xi^T = [y \ \mathbf{v}_u^T \ \mathbf{v}_y^T] \in \mathbb{R}^{2n-1}$ chamados de vetores regressores. Os parâmetros do MRAC ajustam os laços de realimentação definidos como $G_u(s)$ e $G_y(s)$. O erro de saída $e_0 = y - y_m$ é o sinal utilizado para adaptar os parâmetros do MRAC. Assim, $\boldsymbol{\theta}$ deve atingir o valor ideal

$\boldsymbol{\theta}^{*T} = [\theta_y^* \ \boldsymbol{\theta}_{v_u}^{*T} \ \boldsymbol{\theta}_{v_y}^{*T} \ \theta_{2n}^*]$, tal que $e_0 \rightarrow 0$. Para o caso da planta ser conhecida, teríamos que $\boldsymbol{\theta}^*$ pode ser calculado diretamente e usado no projeto do controlador. Neste caso, as funções de transferências $G_y(s) = G_y^*(s)$ e $G_u(s) = G_u^*(s)$ podem ser escritas em termos dos parâmetros ideais:

$$G_u^* = \boldsymbol{\theta}_{v_u}^{*T} (s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{b}_f = \frac{N_u^*(s)}{N_m(s)} \quad (2.21)$$

$$G_y^* = \theta_y^* + \boldsymbol{\theta}_{v_y}^{*T} (s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{b}_f = \frac{N_y^*(s)}{N_m(s)} \quad (2.22)$$

onde o polinômio $N_u^*(s)$ é de grau menor que $n - 1$ e $N_y^*(s)$ é de grau $n - 1$, logo G_u^* é estritamente própria e G_y^* é própria. O denominador $N_m(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$. Considerando que o sinal de controle $u^* = \boldsymbol{\theta}^{*T} \boldsymbol{\xi} = \frac{\theta_{2n}^*}{1 - G_u^*} r + \frac{G_y^*}{1 - G_u^*} y$ é aplicado a planta, verifica-se a condição de casamento:

$$\begin{aligned} y(s) &= k_p \frac{N_p(s)}{D_p(s)} u^* = k_p \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \left(\frac{\theta_{2n}^*}{1 - G_u^*} r + \frac{G_y^*}{1 - G_u^*} y \right) \\ \Rightarrow \frac{y(s)}{r(s)} &= \frac{\theta_{2n}^* k_p \frac{N_p}{D_p}}{1 - G_u^* - k_p G_y^* \frac{N_p}{D_p}} = \frac{\theta_{2n}^* k_p N_p}{(1 - G_u^*) D_p - k_p G_y^* N_p} = k_m \frac{N_m(s)}{D_m(s)} \end{aligned} \quad (2.23)$$

e logo, chega-se às seguintes relações:

$$\theta_{2n}^* = \frac{1}{k^*} = \frac{k_m}{k_p} \quad (2.24)$$

$$G_u^*(s) = \frac{N_m(s) - N_p(s)}{N_m(s)} \quad (2.25)$$

$$G_y^*(s) = \frac{D_p(s) - D_m(s)}{k_p N_m(s)} \quad (2.26)$$

Uma informação importante a respeito das expressões de G_y^* e G_u^* é que os zeros da planta $W(s)$ são cancelados e substituídos pelos zeros do modelo de referência. Dessa forma, os cancelamentos de zeros devem acontecer para zeros no semi-plano esquerdo do plano complexo. Exige-se, então, que a planta seja de fase mínima, ou seja, $N_p(s)$ Hurwitz. Observa-se ainda que para referir a perturbação d para a entrada da planta, pode-se utilizar a relação:

$$W_d(s) = 1 - G_u^*(s) \quad (2.27)$$

que é a função de transferência própria tal que $W_d(s)d$ é a perturbação referida para o mesmo lugar que a referência r , conforme indicado no diagrama na Fig. 2.2.

Antes de formularmos as equações para análise de estabilidade, algumas suposições relacionadas ao sistema devem ser feitas, conforme listadas a seguir.

Suposições (Sastry e Bodson, 1989):

1. Estão disponíveis apenas medições da saída e do sinal de controle.
2. $k_m > 0$ e $k_p > 0$;
3. A planta é completamente controlável e observável, sendo $\text{grau}(D_p(s)) = n$ e $\text{grau}(N_p(s)) = m$, para m e n conhecidos;
4. Os graus relativos do modelo e da planta são os mesmos;
5. N_p é Hurwitz, ou $W(s)$ é de fase mínima.

Considerando que o ganho de alta-frequência da planta é desconhecido, utiliza-se um valor nominal k_p^{nom} para k_p como proposto por Hsu et al. (1993). Assim, a incerteza $\Delta_k = k_p - k_p^{\text{nom}}$ será tratada como uma perturbação de entrada. Reescrevendo-se a expressão em (2.17) com $k_p = k_p^{\text{nom}} + \Delta_k$, a saída y é dada por

$$y = k_p^{\text{nom}} \frac{N_p(s)}{D_p(s)} [u + d] \quad d = \kappa f + \kappa d_e + \kappa u \quad (2.28)$$

$$\kappa = \frac{k_p - k_p^{\text{nom}}}{k_p^{\text{nom}}} = \frac{\Delta_k}{k_p^{\text{nom}}}, \quad k^{\text{nom}} = \frac{k_p^{\text{nom}}}{k_m}, \quad \rho = \frac{k_p}{k_p^{\text{nom}}} = 1 + \kappa$$

em que foi incluído no termo d uma não-linearidade f , um distúrbio qualquer d_e e a perturbação κu devido à incerteza de k_p^{nom} . Escrevendo na forma de espaço de estado, tem-se

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_p &= \mathbf{A}_p \mathbf{x}_p + \mathbf{b}(u + d) \\ y &= \mathbf{h}_p^T \mathbf{x}_p \end{aligned} \quad (2.29)$$

onde $\mathbf{b} = \frac{k_p^{\text{nom}}}{k_p} \mathbf{b}_p$. Escrevendo-se o sistema (2.29) e acrescentando os filtros em (2.19),

tem-se

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_p \\ \dot{\mathbf{v}}_u \\ \dot{\mathbf{v}}_y \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{b}\mathbf{h}_p^T & \mathbf{0} & \Lambda \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_0} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_p \\ \mathbf{v}_u \\ \mathbf{v}_y \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + k^{\text{nom}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{b}_f \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}_c} \frac{1}{k^{\text{nom}}} u + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}'_0} d \\
 y &= \underbrace{[\mathbf{h}_p^T \ \mathbf{0} \ \mathbf{0}]}_{\mathbf{h}_c^T} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p \\ \mathbf{v}_u \\ \mathbf{v}_y \end{bmatrix} \\
 \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}_0 \mathbf{x} + k^{\text{nom}} \mathbf{b}_c u + \mathbf{b}'_0 d \\
 y &= \mathbf{h}_c^T \mathbf{x}
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

Utilizando algum conhecimento prévio da planta, pode-se introduzir um sinal nominal $u^{\text{nom}} = U^{\text{nom}} + \theta_{2n}^{\text{nom}} r$. Assim, o sinal de controle aplicado à planta fica definido como

$$\begin{aligned}
 u &= u^{\text{nom}} - U \\
 u &= U^{\text{nom}} + \theta_{2n}^{\text{nom}} r - U
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

onde U é responsável pelas correções entre o sinal nominal u^{nom} e u^* . O sinal nominal ideal $u^{*\text{nom}} = U^{*\text{nom}} + \theta_{2n}^{*\text{nom}} r$ é capaz de casar perfeitamente a planta nominal $k_p^{\text{nom}} \frac{N_p(s)}{D_p(s)}$ com o modelo $k_m \frac{N_m(s)}{D_m(s)}$, considerando que $d \equiv 0$ e $U^{*\text{nom}} = \boldsymbol{\theta}_\xi^{*\text{nomT}} \boldsymbol{\xi}_\xi$ e para parâmetros nominais ideais $\boldsymbol{\theta}_\xi^{*\text{nomT}} = [\theta_y^{*\text{nom}} \ \theta_{v_u}^{*\text{nom}} \ \theta_{v_y}^{*\text{nom}}]$. Logo, utilizando as expressões em (2.25) e (2.26) com parâmetros nominais ideais, obtém-se $G_u^{*\text{nom}}(s)$ e $G_y^{*\text{nom}}(s)$, e chega-se às

relações:

$$\theta_{2n}^{*nom} = \frac{1}{k^{nom}} = \frac{k_m}{k_p^{nom}} = \rho \theta_{2n}^* \quad (2.32)$$

$$G_u^{*nom}(s) = G_u^*(s) = \frac{N_m(s) - N_p(s)}{N_m(s)} \quad (2.33)$$

$$G_y^{*nom}(s) = \rho G_y^*(s) = \frac{D_p(s) - D_m(s)}{k_p^{nom} N_m(s)} \quad (2.34)$$

$$W_d(s) = 1 - G_u^*(s) = 1 - G_u^{*nom}(s) \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} U^{*nom} &= G_u^{*nom}(s)u + \rho G_y^{*nom}(s)y = \\ &= G_u^{*nom}(s)u - \rho G_u^*(s)u + \rho G_u^*(s)u + \rho G_y^*(s)y = \\ &= \rho U^* + G_u^{*nom}(s)u - \rho G_u^{*nom}(s)u = \\ &= \rho U^* - \kappa G_u^{*nom}(s)u \end{aligned} \quad (2.36)$$

Prosseguindo no desenvolvimento das expressões para os erros entre o modelo de referência e a planta, tem-se que

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}_0 \mathbf{x} + k^{nom} \mathbf{b}_c (-U + U^{nom} + \theta_{2n}^{nom} r + \boldsymbol{\theta}_\xi^{*nomT} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x} + \frac{1}{k^{nom}} r \\ &\quad - U^{*nom} - \frac{1}{k^{nom}} r) + \mathbf{b}'_0 d \\ \dot{\mathbf{x}} &= \left(\mathbf{A}_0 + k^{nom} \boldsymbol{\theta}_\xi^{*nomT} \boldsymbol{\Omega} \right) \mathbf{x} + k^{nom} \mathbf{b}_c \left[-U + U^{nom} - U^{*nom} + \left(\theta_{2n}^{nom} - \frac{1}{k^{nom}} \right) r \right] \\ &\quad + \mathbf{b}_c r + \mathbf{b}'_0 d \\ \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}_c \mathbf{x} + k^{nom} \mathbf{b}_c \left[-U + U^{nom} - U^{*nom} + \left(\theta_{2n}^{nom} - \frac{1}{k^{nom}} \right) r \right] \\ &\quad + \mathbf{b}_c r + \mathbf{b}'_0 d \end{aligned} \quad (2.37)$$

em que

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_c &= \mathbf{A}_0 + k^{nom} \boldsymbol{\theta}_\xi^{*nomT} \boldsymbol{\Omega} \\ \boldsymbol{\Omega} &= \begin{bmatrix} \mathbf{h}_p^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\xi}_\xi = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x} \end{aligned} \quad (2.38)$$

O modelo de referência é definido como

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_m &= \mathbf{A}_c \mathbf{x}_m + \mathbf{b}_c r \\ y_m &= \mathbf{h}_c^T \mathbf{x}_m\end{aligned}\quad (2.39)$$

tal que $M(s) = \mathbf{h}_c^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c) \mathbf{b}_c$.

Calculando os erros $\dot{e} = \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}_m$ e $e_0 = y - y_m$, obtém-se a forma em espaço de estado

$$\begin{aligned}\dot{e} &= \mathbf{A}_c e + k^{\text{nom}} \mathbf{b}_c \left[-U + U^{\text{nom}} - U^{*\text{nom}} + \left(\theta_{2n}^{\text{nom}} - \frac{1}{k^{\text{nom}}} \right) r \right] + \mathbf{b}'_0 d \\ e_0 &= \mathbf{h}_c^T e\end{aligned}\quad (2.40)$$

e no domínio da frequência:

$$e_0 = k^{\text{nom}} M[-U - \bar{U}] \quad (2.41)$$

$$\bar{U} = U^{*\text{nom}} - U^{\text{nom}} - \left(\theta_{2n}^{\text{nom}} - \frac{1}{k^{\text{nom}}} \right) r - W_d(s) d \quad (2.42)$$

onde $W_d(s) = (k^{\text{nom}} M)^{-1} \bar{W}_d(s)$ é própria e $\bar{W}_d(s) = \mathbf{h}_c^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1} \mathbf{b}'_0$ é a função de transferência em malha fechada entre d e e_0 para o sinal de controle ideal, i.e., $u = u^*$.

2.2 Leis de Adaptação - MRAC

Nesta seção veremos a prova de estabilidade para o caso vetorial do MRAC ($k^{\text{nom}} = 1$, $n^* = 1$, $d = 0$). O caso apresentado aqui envolve o uso de parâmetros nominais e, logo, será utilizada a expressão em (2.40). Assim, fazendo $U = \boldsymbol{\theta}_\xi^T \boldsymbol{\xi}_\xi$, $U^{*\text{nom}} = \boldsymbol{\theta}_\xi^{*\text{nom}T} \boldsymbol{\xi}_\xi$, $U^{\text{nom}} = \boldsymbol{\theta}_\xi^{\text{nom}T} \boldsymbol{\xi}_\xi$ e escolhendo $\theta_{2n}^{\text{nom}} = \frac{1}{k^{\text{nom}}} = 1$, em \bar{U} em (2.42), escreve-se

$$\bar{U} = -(\boldsymbol{\theta}_\xi^{\text{nom}} - \boldsymbol{\theta}_\xi^{*\text{nom}})^T \boldsymbol{\xi}_\xi = -\boldsymbol{\theta}_\xi^{+\text{T}} \boldsymbol{\xi}_\xi \quad (2.43)$$

$$\boldsymbol{\theta}_\xi^+ = \boldsymbol{\theta}_\xi^{\text{nom}} - \boldsymbol{\theta}_\xi^{*\text{nom}} \quad (2.44)$$

A expressão \dot{e}_0 em (2.40) é reescrita como

$$\begin{aligned}\dot{e} &= A_c e + b_c \left[-\theta_\xi^T \xi_\xi + \theta_\xi^{+T} \xi_\xi \right] \\ \dot{e} &= A_c e - b_c \tilde{\theta}_\xi^T \xi_\xi\end{aligned}\quad (2.45)$$

$$e_0 = h_c^T e = M(s) \left(-\tilde{\theta}_\xi^T \xi_\xi \right) \quad (2.46)$$

$$\tilde{\theta} = \theta_\xi - \theta_\xi^+ \quad (2.47)$$

Agora, considere a função candidata a função de energia de Lyapunov:

$$V(e, \tilde{\theta}_\xi) = \frac{e^T P e}{2} + \tilde{\theta}_\xi^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}_\xi, \quad P = P^T > 0 \quad (2.48)$$

onde $V > 0$ é positiva-definida, $\Gamma = \text{diag}(\gamma_i)$ ($i = 1, \dots, (2n-1)$) é uma matriz diagonal formada pelos ganhos adaptativos $\gamma_i > 0$.

Calculando \dot{V} e aplicando o Lema A.3.1 (KYL, página 70):

$$\dot{V} = -e^T Q e - e^T P b_c \tilde{\theta}_\xi^T \xi_\xi + \tilde{\theta}_\xi^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_\xi$$

em que $e^T P b_c = e_0$ e usando a lei de adaptação

$$\dot{\tilde{\theta}}_\xi = \Gamma \xi_\xi e_0$$

tem-se

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -e^T Q e - e^T P b_c \tilde{\theta}_\xi^T \xi_\xi + \tilde{\theta}_\xi^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_\xi \\ \dot{V} &= -e^T Q e \leq 0\end{aligned}$$

Então $e, \tilde{\theta}_\xi, \theta_\xi \in \mathcal{L}_\infty$. Pela expressão $e_0 = h_c^T e = y - y_m$, tem-se que $e_0, y \in \mathcal{L}_\infty$. De (2.46) e como r é uniformemente limitado, tem-se $u \in \mathcal{L}_\infty \Rightarrow v_u, v_y \in \mathcal{L}_\infty \Rightarrow \xi, \xi_\xi \in \mathcal{L}_\infty$. E de (2.45), como todos os termos são uniformemente limitados, tem-se que $\dot{e} \in \mathcal{L}_\infty, e_0 \in \mathcal{L}_\infty, \dot{e}_0 = h_c \dot{e} \in \mathcal{L}_\infty$ e finalmente $\dot{w} = \Gamma g e_0 \in \mathcal{L}_\infty$. Assim, tem-se que V é limitado inferiormente, pois $V > 0$ e não cresce ($\dot{V} \leq 0$ para $t > 0$), i.e. $V \rightarrow V_\infty$, sendo $V_\infty \geq 0$ constante, quando $t \rightarrow \infty$. Agora, calculando $\frac{d}{dt}(\dot{V}) = \frac{d}{dt}(-e^T Q e)$, tem-se $\ddot{V} = -\dot{e}^T Q e - e^T Q \dot{e}$, nota-se que $\ddot{V} \in \mathcal{L}_\infty$, e usando o Lema de Barbalat (Lema A.3.2, página 70), conclui-se que \dot{V} é uniformemente contínua, pois $\ddot{V} \in \mathcal{L}_\infty$, então $\dot{V} = -e^T Q e \rightarrow 0, e \rightarrow 0, e_0 = h_c^T e \rightarrow 0$ e $\dot{\tilde{\theta}}_\xi \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

2.3 Controle Adaptativo por Modelo de Referência e Estrutura Variável

O controle adaptativo convencional, embora tenha sido desenvolvido para atuar no controle de sistemas desconhecidos ou conhecidos parcialmente, apresenta um transitório bastante lento e oscilatório. Outro problema do controle adaptativo convencional é a falta de robustez diante de perturbações e de dinâmica não-modelada. Alguns avanços foram conseguidos com a introdução de modificações nas leis de adaptação dos parâmetros como normalização, fator de esquecimento, projeção, normalização dinâmica (Ioannou e Tsakalis, 1986). Todas essas modificações garantiram de modo global ou local a estabilidade diante dos fatores mencionados. No entanto, as leis integrais do MRAC ainda apresentavam desempenho insatisfatório com respeito ao transitório.

Uma alternativa foi a utilização de leis chaveadas no processo de adaptação dos parâmetros do controlador. As leis chaveadas oferecem as vantagens de rápida convergência, rejeição de perturbações e robustez (Young et al., 1999; Dias et al., 2016; Bartolini et al., 2009). O controle por modos deslizantes utiliza uma função descontínua como sinal de controle, que comuta entre valores positivos e negativos quando a variável controlada cruza uma superfície deslizante. A tendência da planta com essa estratégia é convergir rapidamente para a superfície deslizante e, especificamente, a convergência ocorre em tempo finito. No entanto, uma vez na superfície deslizante, para manter-se nesta, o sinal de controle passa a comutar em altíssima frequência, produzindo o fenômeno conhecido como *chattering*, o que pode tornar a implementação dessa estratégia inviável.

O Controle Adaptativo por Modelo de Referência e Estrutura Variável- VS-MRAC possui a mesma estrutura do MRAC, onde o erro entre a saída de um modelo de referência e da planta será utilizado para realizar os ajustes dos parâmetros do controlador. Cada parâmetro é ajustado utilizando funções chaveadas em função do erro de saída. Garante-se com essa estratégia, rápido transitório, robustez e convergência assintótica da planta para o modelo. Consideremos agora um exemplo escalar para o VS-MRAC (Hsu e Costa, 1989; Hsu, 1990).

Problema de Controle: Exemplo Escalar do VS-MRAC

Considere a mesma planta em (2.1) de primeira ordem apresentada no caso MRAC $\dot{y} = -a_p y + k_p u$ e o modelo $\dot{y}_m = -a_m y_m + k_m r$. O objetivo da lei de controle também

é fazer o estado da planta $y \rightarrow y_m$. Neste caso, as leis não são do tipo integral, mas leis chaveadas da forma

$$\begin{aligned}\theta_1 &= -\bar{\theta}_1 \text{sgn}(ye_0) \\ \theta_2 &= -\bar{\theta}_2 \text{sgn}(re_0)\end{aligned}\quad (2.49)$$

$$\text{sgn}(a) = \begin{cases} 1 & (\text{se, } a \geq 0) \\ -1 & (\text{caso contrário}) \end{cases}\quad (2.50)$$

em que $a \in \mathbb{R}$, $\bar{\theta}_1 > 0$ e $\bar{\theta}_2 > 0$ são constantes que determinam as amplitudes da função $\text{sgn}(\cdot)$.

Para um sinal de controle idêntico ao do caso MRAC em (2.5) e a mesma expressão do erro de saída (2.9), pode-se concluir que o sistema de controle em malha fechada converge assintoticamente e em tempo finito ($e_0 \rightarrow 0$, para todo $t \geq T_1 > 0$, T_1 constante). Segue-se a prova através do método de Lyapunov.

Define-se uma função candidata a função de energia de Lyapunov como segue:

$$V(e_0) = \frac{e_0^2}{2}\quad (2.51)$$

em que $V > 0$ é definida positiva. Então, calculando-se \dot{V} , usando (2.9) e as leis de adaptação em (2.49), tem-se:

$$\dot{V} = -a_m e_0^2 + k_p \tilde{\theta}_1 y e_0 + k_p \tilde{\theta}_2 r e_0\quad (2.52)$$

$$\dot{V} = -a_m e_0^2 + k_p (-\bar{\theta}_1 \text{sgn}(ye_0) - \theta_1^*) y e_0 + k_p (-\bar{\theta}_2 \text{sgn}(re_0) - \theta_2^*) r e_0\quad (2.53)$$

$$\dot{V} \leq -a_m e_0^2 - k_p (\bar{\theta}_1 - |\theta_1^*|) |y e_0| - k_p (\bar{\theta}_2 - |\theta_2^*|) |r e_0|\quad (2.54)$$

Logo, fazendo as amplitudes $\bar{\theta}_1 > |\theta_1^*|$ e $\bar{\theta}_2 > |\theta_2^*|$, tem-se que $\dot{V} < 0$ e o sistema é assintoticamente estável, em que $e_0 \rightarrow 0$. Segue-se agora, pela condição de deslizamento $e_0 \dot{e}_0 < 0$, a trajetória converge para a superfície de deslizamento definida no ponto $e_0 (\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2) = 0$. Utilizando as equações (2.9) e (2.49), tem-se

$$\begin{aligned}e_0 \dot{e}_0 &= -a_m e_0^2 + k_p \tilde{\theta}_1 y e_0 + k_p \tilde{\theta}_2 r e_0 \\ e_0 \dot{e}_0 &\leq -a_m e_0^2 - k_p (\bar{\theta}_1 - |\theta_1^*|) |y e_0| - k_p (\bar{\theta}_2 - |\theta_2^*|) |r e_0| \\ e_0 \dot{e}_0 &\leq -a_m e_0^2 - k_p \theta_\Delta (|y| + |r|) |e_0| \\ e_0 \dot{e}_0 &\leq [k_1 |e_0| - k_p \theta_\Delta (|y| + |r|)] |e_0| < 0\end{aligned}\quad (2.55)$$

em que $|y| + |r| > c$, $0 \leq \theta_\Delta \leq \min\{\bar{\theta}_1 - |\theta_1^*|, \bar{\theta}_2 - |\theta_2^*|\}$. Tem-se que $|e_0| \rightarrow 0$, e logo deve existir um tempo $T_1 > 0$, finito, em que $k_1 |e_0| < k_p \theta_\Delta (|y| + |r|)$, ou seja, em que a condição $e_0 \dot{e}_0 < 0$ é satisfeita, e para $|\dot{e}_0| \geq c' > 0$ (c' constante), existe um tempo $T_0 > T_1$, finito, em que $e_0 = 0$, para todo $t \geq T_0$.

Portanto, foram estabelecidas as leis chaveadas de adaptação que garantem a convergência da planta para o modelo de referência em tempo finito. Mas neste caso não se tem que $\theta_1 \rightarrow \theta_1^*$ e $\theta_2 \rightarrow \theta_2^*$, visto que θ_1 e θ_2 chaveiam quando a planta entra em modo deslizante. Vejamos a seguir o caso vetorial para uma planta SISO (*Single-Input Single-Output*).

2.4 Leis de Adaptação - VS-MRAC

Nesta seção veremos a prova de estabilidade para o caso vetorial do VS-MRAC ($k^{\text{nom}} = 1$, $n^* = 1$, $d = 0$). Assim, usando-se as expressões (2.43), (2.44) e (2.45), procede-se como no caso MRAC. Considere a função candidata a Lyapunov:

$$V(\mathbf{e}) = \frac{\mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e}}{2}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0 \quad (2.56)$$

onde $V > 0$ é positiva-definida. Calculando \dot{V} e aplicando o Lema A.3.1 (KYL, página 70):

$$\dot{V} = -\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} - \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{b}_c \tilde{\boldsymbol{\theta}}_\xi^T \boldsymbol{\xi}_\xi$$

usando a lei chaveada

$$\theta_i = \bar{\theta}_i \text{sgn}(\xi_i e_0)$$

com $\bar{\theta}_i > |\theta_i^+|$ e para $\mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{b}_c = e_0$, tem-se

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} - \sum_{i=1}^{2n} (\theta_i - \theta_i^+) \xi_i e_0 \\ \dot{V} &= -\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} - \sum_{i=1}^{2n} (\bar{\theta}_i - |\theta_i^+|) |\xi_i e_0| < 0 \end{aligned}$$

em que θ_i , θ_i^+ , ξ_i pertencem às componentes dos respectivos vetores $\boldsymbol{\theta}_\xi$, $\boldsymbol{\theta}_\xi^+$ e $\boldsymbol{\xi}_\xi$. Logo, o sistema converge assintoticamente ($e_0 \rightarrow 0$) e, igualmente como foi mostrado no caso escalar do VS-MRAC, a convergência ocorre em tempo finito.

2.5 Conclusão do Capítulo

Neste capítulo foi explicada a teoria do controle adaptativo. Sua necessidade veio do fato que os sistemas reais não podem ser perfeitamente representados pelos modelos matemáticos, por mais completo que estes sejam. Vários fatores influenciam no sistema real e nem sempre se sabem quais. O desconhecimento dos parâmetros da planta impulsionou o desenvolvimento de um controlador que se adapte à situação da planta. Foram apresentadas as etapas desde o caso MRAC com leis integrais até o caso VS-MRAC com leis chaveadas. Foi salientado que o MRAC convencional apresenta diversos problemas como o transitório lento e oscilatório e a falta de robustez. Já o VS-MRAC apresenta rápido transitório e robustez, pois suas leis se baseiam no controle por modos deslizantes. Cada uma dessas estratégias foi analisada. Os exemplos escalares mostraram de forma simples a formulação das leis de adaptação. Foram feitas as análises para os casos vetoriais do MRAC e VS-MRAC, onde formulou-se a principal equação do erro de saída utilizada nas provas de estabilidade. A condição de casamento apresentada mostrou o que é necessário e suficiente para fazer a planta igual ao modelo de referência. Estabeleceu-se que suposições precisariam ser feitas para garantir o funcionamento das estratégias de controle adaptativo. As provas de estabilidade para o caso MRAC comprovaram sua estabilidade e convergência do erro de saída, e no caso do VS-MRAC, demonstram a sua convergência em tempo finito.

Capítulo 3

Redes de Funções de Base Radial

3.1 Introdução

Neste capítulo será discutido brevemente o que são as redes de funções de base radial (RBF) e sua capacidade aproximativa de funções desconhecidas. O capítulo inicia-se mostrando a estrutura básica de uma rede RBF e explicando cada um de seus parâmetros. Um exemplo gráfico ilustrará como a rede é utilizada na aproximação de funções. Será apresentada uma importante suposição da capacidade aproximativa da rede RBF que auxiliará nas análises da rede RBF como controlador. Também será feita uma conexão da rede RBF e o controle adaptativo através de uma aproximação local das funções de base radial e, por comparação com os parâmetros do MRAC, será mostrada a condição de casamento para a rede RBF e os parâmetros ideais de controle.

3.2 Redes RBF

As redes RBF são uma modalidade de redes neurais que apresentam vantagens como fácil projeto, boa capacidade de generalização, forte tolerância a distúrbios e bom desempenho em aplicações em tempo real. As redes RBF podem realizar interpolações num conjunto de dados, controle de sistemas não lineares, aproximação de dinâmicas de parametrização difícil ou impossível, identificação de sistemas, desacoplamento de sistemas, etc (Broomhead e Lowe, 1988; Park e Sandberg, 1991; Sanner e Slotine, 1992; Yu et al., 2011; Oliveira et al., 2011).

Na Fig. 3.1 é mostrada a estrutura de uma rede RBF. Basicamente, a rede possui três camadas definidas como camada de entrada, oculta e de saída. A camada de entrada é onde os dados são adquiridos ou lidos através das componentes do vetor de entrada, aqui definido por $\xi_{\xi}^T = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p] \in \mathbb{R}^p$. Na camada oculta se encontram as funções de base radial, que realizam a transformação dos dados de entrada para o espaço

de dimensão, geralmente, superior. Na camada oculta, cada função de base representa um centro que recebe o sinal de entrada e extrai certas características dos dados de entrada, e a composição de todos os centros forma o vetor $\mathbf{g}^T = [g_1, g_2, \dots, g_N] \in \mathbb{R}^N$. A camada de saída é onde é feita a soma de todas as respostas das funções de base radial da camada oculta ponderada pelos seus respectivos pesos w_i (Fig. 3.1).

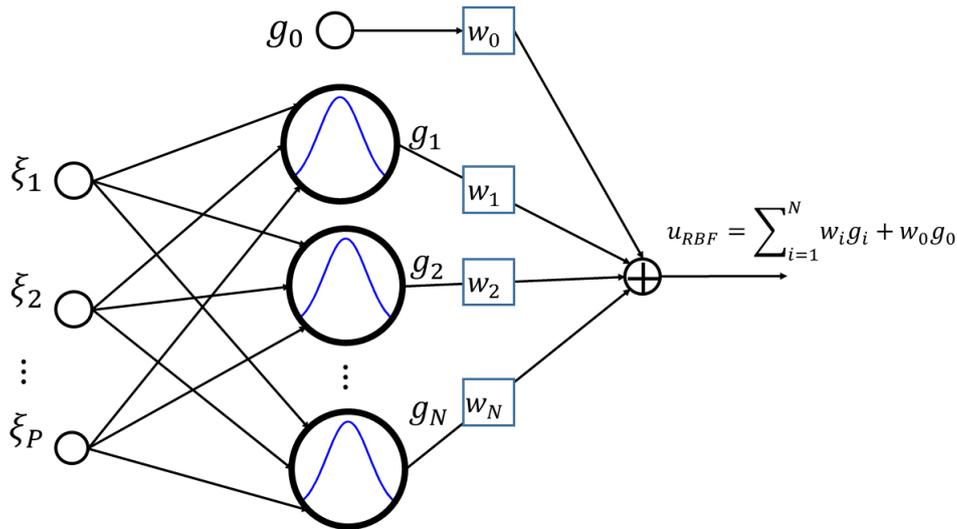


Fig. 3.1 Estrutura Fundamental da Rede RBF

As funções do tipo gaussiana possuem parâmetros que definem a sua posição no espaço de entrada e a sua largura ou raio de ação (Fig. 3.2). Numa rede RBF, cada gaussiana i é posicionada no espaço dos dados de treinamento, com coordenada \mathbf{c}_i , e com largura σ_i , sendo um total de N centros. Quanto maior for N , maior será a capacidade aproximativa da rede, no entanto, mais processamento será requisitado para a operação das tarefas da rede. A saída de uma rede RBF pode ser dada pela equação (3.1), em que w_i é o peso que liga a gaussiana g_i à saída, sendo g_0 o *bias* da rede, que em muitas aplicações é fixado em $g_0 = 1$.

$$u_{RBF} = \sum_{i=1}^N w_i g_i + w_0 g_0 = \mathbf{w}^T \mathbf{g} + w_0 g_0 \quad (3.1)$$

com $\mathbf{w}^T = [w_1 \dots w_N]$ e as gaussianas dadas por

$$g_i = e \left(-\frac{\|\xi_\xi - \mathbf{c}_i\|^2}{2\sigma_i^2} \right) \quad (3.2)$$

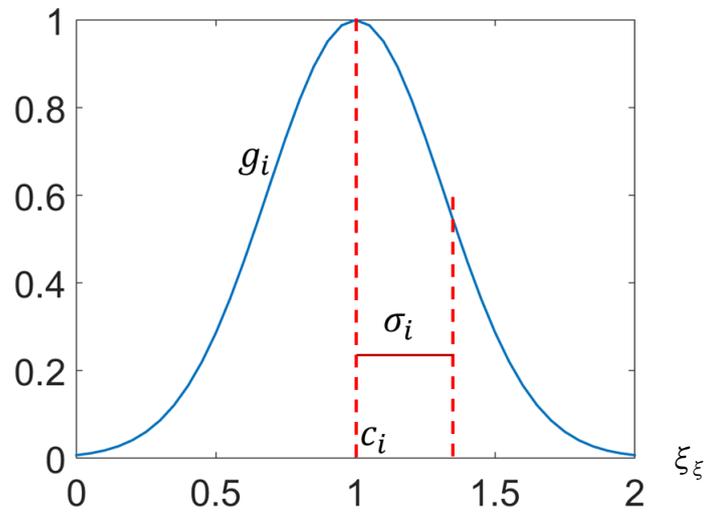


Fig. 3.2 Função Gaussiana

A seguir é enunciada uma importante suposição para a rede RBF, que será considerada em conjunto com as suposições do MRAC listadas na página 13.

Suposição:

6. Uma rede RBF com pesos ideais w_i^* tal que $U_{RBF}^* = \sum_i w_i^* g_i$ ($i = 1, \dots, N$) pode aproximar qualquer função contínua $f^* : S \subset \mathbb{R}^{2n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ (S é um conjunto compacto, $f^* = f^*(\xi_\xi)$, $\xi_\xi \in S$) com precisão $\epsilon \geq 0$ (constante), i.e. $|U_{RBF}^* - f^*| = |\delta| \leq \epsilon$, para todo $\xi_\xi \in S$ (Park e Sandberg, 1991).

Observação: A suposição 6 refere-se à capacidade aproximativa da rede RBF, dizendo que um número suficiente de funções de base radial posicionadas no espaço de treinamento e ponderadas com pesos adequados é capaz de representar ou reproduzir os efeitos de uma função desconhecida e contínua. Isso será destacado mais à frente nesta tese, quando o controlador empregado na estrutura do MRAC for uma rede RBF, onde assumiremos que a rede RBF pode aproximar o sinal de controle ideal desconhecido.

A seguir um exemplo ilustra como cada gaussiana é ajustada para a aproximação de uma função contínua qualquer. Na Fig. 3.3 a função contínua $f(\xi_\xi)$ é a função desconhecida que deve ser aproximada pela rede RBF. Inicialmente, tem-se que cada gaussiana é posicionada no espaço sem os ajustes adequados de seus parâmetros. Previamente, é comum escolher σ_i , w_i e c_i aleatoriamente no instante inicial. No exemplo, a dimensão do espaço de entrada é unitária. Considerando fixos os parâmetros

c_i e σ_i , a rede RBF produzirá uma saída $u_{\text{RBF}}(\mathbf{w}) = \hat{f}(\xi_\xi)$, sendo que para pesos ideais \mathbf{w}^* , $u_{\text{RBF}}(\mathbf{w}^*) = f(\xi_\xi) \pm \delta$, em que $|\delta| \leq \epsilon$, ou $|u_{\text{RBF}}(\xi_\xi, \mathbf{w}^*) - f(\xi_\xi)| \leq \epsilon$, com $\epsilon > 0$ constante. Na Fig. 3.4, para pesos adequados \mathbf{w}^* , observa-se a aproximação local realizada pela rede RBF. Para valores de ξ_ξ que extrapolem a área de atuação das gaussianas, o desempenho da rede RBF será prejudicado. Assim, percebe-se que uma rede RBF na forma apresentada realiza uma aproximação local.

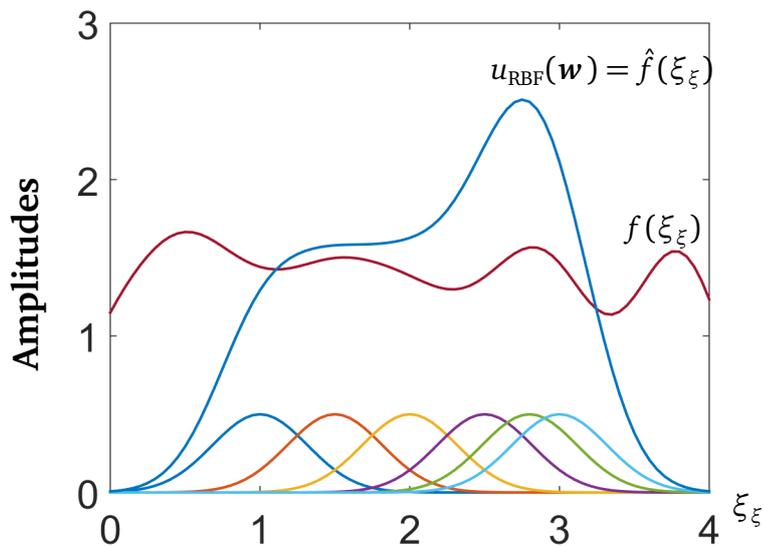


Fig. 3.3 Aproximação da Rede RBF com Pesos Não-ideais

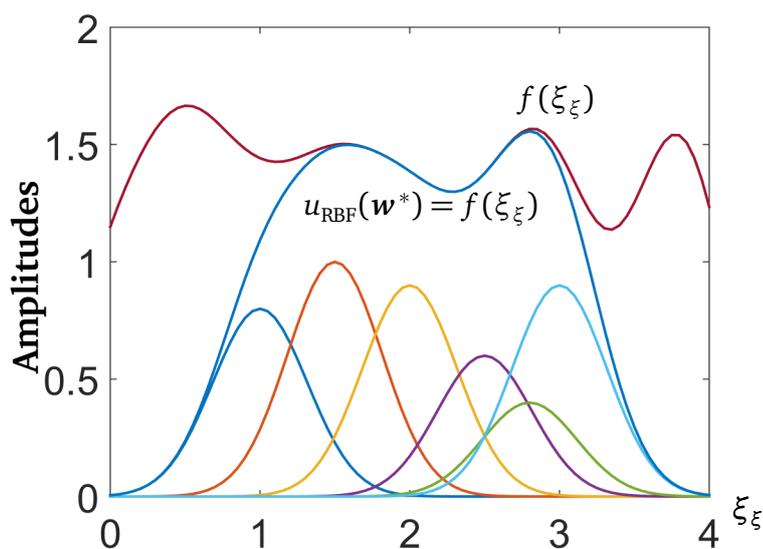


Fig. 3.4 Aproximação da Rede RBF para Pesos Ideais

Para dimensões maiores do espaço de entrada, como é o caso do espaço de entrada do controle MRAC de $P = 2n - 1$ sinais, a capacidade aproximativa da rede RBF pode ser analisada com base numa análise local da resposta das gaussianas, através da derivada do vetor \mathbf{g} de resposta das gaussianas em torno de um ponto $\xi_\xi = \mathbf{a}$, conforme será visto a seguir:

Seja $\mathbf{g} : S \subset \mathbb{R}^{2n-1} \rightarrow \mathbb{R}^N$, uma aplicação contínua em S . Calculando-se a diferencial

$$\dot{\mathbf{g}}(\mathbf{a}) = \mathbf{J}(\mathbf{a})\dot{\xi}_\xi = \left[\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \xi_\xi}(\mathbf{a}) \right] \dot{\xi}_\xi$$

em que

$$\mathbf{J}(\mathbf{a}) = \left[\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \xi_\xi}(\mathbf{a}) \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \xi_\xi}^T \\ \vdots \\ \frac{\partial g_N}{\partial \xi_\xi}^T \end{bmatrix}_{(\xi=\mathbf{a})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \xi_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial \xi_P} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_N}{\partial \xi_1} & \cdots & \frac{\partial g_N}{\partial \xi_P} \end{bmatrix}_{(\xi=\mathbf{a})}^{(N \times P)}$$

$$\dot{g}_i(\mathbf{a}) = \left[\frac{\partial g_i}{\partial \xi_\xi}(\mathbf{a}) \right] \dot{\xi}_\xi = \frac{g_i(\mathbf{a})}{\sigma_i^2} (\mathbf{c}_i - \mathbf{a})^T \dot{\xi}_\xi$$

com os centros fixos e posicionados de modo aleatório e para um número N suficiente grande de centros, pode-se assumir que $g_i \neq g_j$ para quase todo $i \neq j$ e, dessa forma, com grande probabilidade, é possível extrair-se P linhas linearmente independentes (LI) de \mathbf{J} que geram o espaço vetorial tangente em \mathbf{a} e, portanto, tem-se que \mathbf{g} é uma aplicação localmente injetiva. Pela injetividade, tem-se que \mathbf{g} é uma aplicação de posto máximo, logo, pode-se realizar uma decomposição do espaço gerado por $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^P \times \mathbb{R}^{N-P}$, selecionando-se as P linhas LI de \mathbf{J} (suponha que sejam as suas P primeiras), criando-se uma matriz \mathbf{J}_1 , quadrada $P \times P$, e uma matriz \mathbf{J}_2 , retangular $(N - P) \times P$, com as linhas restantes, obtendo-se

$$\dot{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \dot{\xi}_\xi + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{J}_2 \end{bmatrix} \dot{\xi}_\xi \quad (3.3)$$

em que $\mathbf{0}$ é uma matriz de zeros de dimensão adequada. Logo, assume-se que $\mathbf{g}(\xi_\xi) = \dot{\mathbf{g}}(\xi_\xi)$ em torno de $\xi_\xi = \mathbf{a}$, isto é, a derivada é a melhor aproximação local de \mathbf{g} num

vizinhança de \mathbf{a} . Logo, o sinal de controle da rede RBF nessa vizinhança é dado por

$$\begin{aligned} u_{\text{RBF}} &= \mathbf{w}_1^T \mathbf{J}_1 \boldsymbol{\xi}_\xi + \mathbf{w}_2^T \mathbf{J}_2 \boldsymbol{\xi}_\xi \\ u_{\text{RBF}} &= \mathbf{w}_1^T \mathbf{J}_1 \boldsymbol{\xi}_\xi + w_0 g_0 \\ u_{\text{RBF}} &= \sum_i^P \frac{w_i g_i}{\sigma_i^2} (\mathbf{c}_i - \mathbf{a})^T \boldsymbol{\xi}_\xi + w_0 g_0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

em que $\mathbf{w}_1 \in \mathbb{R}^P$ e $\mathbf{w}_2 \in \mathbb{R}^{N-P}$ e $w_0 g_0 = \mathbf{w}_2^T \mathbf{J}_2 \boldsymbol{\xi}_\xi$. O vetor de pesos \mathbf{w}_1 é composto por P componentes correspondentes às P linhas LI de \mathbf{J} , ou às P gaussianas de \mathbf{g} , e as demais componentes referem-se às $N - P$ linhas restantes, sendo que $\mathbf{w}^T = [\mathbf{w}_1^T \ \mathbf{w}_2^T]$. Também foi definido o termo $w_0 g_0$ como correspondente ao *bias* da rede RBF na equação (3.1), já que \mathbf{J}_2 é composto por linhas que são combinações lineares das linhas de \mathbf{J}_1 e pertencentes ao mesmo espaço vetorial tangente. As P gaussianas escolhidas para compor a matriz \mathbf{J}_1 na análise feita podem ser aquelas mais próximas do ponto $\boldsymbol{\xi}_\xi$, ou tais que $\|\boldsymbol{\xi}_\xi - \mathbf{c}_i\| \leq \sigma$, para $\sigma > 0$ e constante, e as restantes, as mais distantes, são compensadas pelo *bias* ou tem efeito muito pequeno sobre a saída da rede, já que $g_i \rightarrow 0$, para $\|\boldsymbol{\xi}_\xi - \mathbf{c}_i\| \rightarrow \infty$. Em conclusão, nota-se que P gaussianas e o *bias* g_0 podem gerar o espaço vetorial tangente na vizinhança do ponto $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{2n-1}$. Considerando que S é um espaço recoberto pelos N centros da rede RBF, pode-se sempre ter em cada ponto um conjunto de P gaussianas que são capazes de gerar o espaço vetorial tangente neste ponto e, portanto, para parâmetros adequados w_i^* , σ_i e \mathbf{c}_i , pode-se aproximar qualquer função cujo espaço vetorial tangente em \mathbf{a} coincida com o gerado por \mathbf{g} no mesmo ponto.

A condição de casamento para a rede RBF para pesos ideais w_i^* reproduzir o sinal de controle ideal do MRAC, pode ser analisada comparando-se (3.4) com u^* em (2.20) para $\boldsymbol{\theta}_\xi^*$ e θ_{2n}^* , onde tem-se

$$\sum_i^P \frac{w_i^* g_i(\mathbf{a})}{\sigma_i^2} (\mathbf{c}_i - \mathbf{a})^T \boldsymbol{\xi}_\xi + w_0^* g_0 = \boldsymbol{\theta}_\xi^{*T} \boldsymbol{\xi}_\xi + \theta_{2n}^* r \quad (3.5)$$

e obtendo-se

$$w_0^* = \theta_{2n}^* \quad (3.6)$$

$$\sum_{i=1}^P \frac{w_i^* g_i(\mathbf{a})}{\sigma_i^2} (\mathbf{c}_i - \mathbf{a}) = \boldsymbol{\theta}_\xi^* \quad (3.7)$$

Observação: Numa análise local, cada componente de \mathbf{c}_i atua diretamente sobre a

aproximação de cada componente de θ_ξ^* , isto é, sobre θ_u^* , $\theta_{v_u}^*$ e $\theta_{v_y}^*$. Os parâmetros w_i^* e σ_i ponderam os termos nos somatórios, de maneira que a combinação no somatório respeite a igualdade. Se θ_ξ^* fosse conhecido, apenas um único centro poderia realizar as aproximações, e bastaria escolher \mathbf{c}_i , w_i^* e σ_i adequados. Mas, na maioria dos casos, θ_ξ^* não é conhecido e como será considerado aqui que os únicos parâmetros livres são os w_i 's, os outros parâmetros \mathbf{c}_i e σ_i são aleatórios e fixos. Analisando sobre esta ótica, a expressão (3.7) é reescrita como

$$\sum_{i=1}^P \frac{w_i^* g_i(\mathbf{a})}{\sigma_i^2} (\mathbf{c}_i - \mathbf{a}) = \theta_\xi^*$$

$$w_1^* \frac{g_1(\mathbf{a})}{\sigma_1^2} \begin{bmatrix} c_{1,y} - a_1 \\ c_{1,v_u} - a_2 \\ c_{1,v_y} - a_3 \end{bmatrix} + \dots + w_P^* \frac{g_P(\mathbf{a})}{\sigma_P^2} \begin{bmatrix} c_{P,y} - a_1 \\ c_{P,v_u} - a_2 \\ c_{P,v_y} - a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_y^* \\ \theta_{v_y}^* \\ \theta_{v_u}^* \end{bmatrix}$$

$$w_1^* D_1 \boldsymbol{\beta}_1 + \dots + w_P^* D_P \boldsymbol{\beta}_P = \theta_\xi^* \quad (3.8)$$

em que os escalares $D_1 = \frac{g_1(\mathbf{a})}{\sigma_1^2}, \dots, D_P = \frac{g_P(\mathbf{a})}{\sigma_P^2}$, e vetores $\boldsymbol{\beta}_1, \dots, \boldsymbol{\beta}_P \in \mathbb{R}^P$, para $P = 2n - 1$ com mesma dimensão do vetor de parâmetros θ_ξ^* do MRAC, sendo

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \mathbf{c}_1 - \mathbf{a} = \begin{bmatrix} c_{1,y} - a_1 \\ c_{1,v_u} - a_2 \\ c_{1,v_y} - a_3 \end{bmatrix} \quad \dots \quad \boldsymbol{\beta}_P = \mathbf{c}_P - \mathbf{a} = \begin{bmatrix} c_{P,y} - a_1 \\ c_{P,v_u} - a_2 \\ c_{P,v_y} - a_3 \end{bmatrix}$$

para $\mathbf{c}_i^T = [c_{i,y} \ c_{i,v_u}^T \ c_{i,v_y}^T]$, em que $c_{i,y} \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{c}_{i,v_u}, \mathbf{c}_{i,v_y} \in \mathbb{R}^{n-1}$ são as componentes do vetor \mathbf{c}_i ($i = 1, \dots, P$), e $a_1 \in \mathbb{R}, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^{n-1}$ são as componentes do vetor \mathbf{a} .

Logo, pelo fato que os vetores $\boldsymbol{\beta}_i$ ($i = 1, \dots, P$) são LI, existirá um único $\mathbf{w}^{*T} = [w_1 \dots w_P^*]$ cuja combinação linear acima é verdadeira. Portanto, para garantir que seja possível obter-se P vetores LI, deve-se posicionar um número suficiente N de centros e de modo aleatório. Assim, juntamente com um método de adaptação para w_i , tem-se um aumento da probabilidade de que a rede RBF possa reproduzir cada componente de θ_ξ^* . Outra conclusão interessante é que para \mathbf{w} como único parâmetro livre na adaptação, observa-se que são necessários pelo menos P centros próximos do ponto considerado e tais que suas coordenadas sejam LI. Logo, o número N de centros adequados pode ser estimado utilizando tal informação. Por exemplo, para o caso do MRAC, no controle de um sistema de ordem 2, são necessários $P = 2n - 1 = 3$ mais a referência de entrada e, então, escolhe-se $N \geq 3$ centros próximos ao ponto de operação do sistema e faz-se g_0 igual à referência de entrada.

Observação: Pode-se ainda estender a análise realizada anteriormente ao caso global fazendo a suposição de que as gaussianas sejam alocadas adequadamente em um subespaço de entrada $S \subset \mathbb{R}^{2n-1}$ do vetor de entrada ξ_ξ e que S seja conexo, ou seja, o número de vetores LI geradores de S seja constante para qualquer $\xi_\xi \in S$. Isso verifica-se do seguinte modo. Na análise local tomou-se a derivada de g_i em torno de $\xi_\xi = \mathbf{a}$, de modo que $g_i \approx \dot{g}_i$ numa bola aberta $B_1 = B(\mathbf{a}, \delta_1)$ de centro \mathbf{a} e de raio $\delta_1 > 0$ suficientemente pequeno. Logo, pela continuidade de $g_i(\xi_\xi)$ para $\xi_\xi \in B_1$, pode-se tomar outro ponto $\mathbf{b} \in B_1$, onde toma-se uma nova derivada de g_i , sendo $g_i \approx \dot{g}_i$ válida em torno de \mathbf{b} , precisamente em uma outra bola aberta $B_2 = B(\mathbf{b}, \delta_2)$, $\delta_2 > 0$. Nota-se que $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$. Pode-se, sucessivamente, tomar-se derivadas de g_i em novos pontos mais afastados, criando-se novas bolas $B_i = B(\cdot, \delta_i)$ de modo que $\cap_i B_i \neq \emptyset$. Logo, $S = \cup_i B_i$ (a reunião das bolas B_i). Assim, como toda bola é conexa, tem-se que S é conexo. Evidentemente fazendo $S = \mathbb{R}^{2n-1}$, tem-se que S é conexo.

3.3 Conclusão do Capítulo

Neste capítulo foram abordados os fundamentos básicos das redes RBF, discutindo-se sua capacidade aproximativa e aplicações como estratégias de controle. Foi feita uma análise local em torno de um ponto no espaço de entrada da rede que mostrou que a rede RBF com número de centros pelo menos igual à dimensão do espaço de entrada pode ser uma boa escolha. Verificou-se que os centros da rede RBF devem ser posicionados adequadamente e em número suficiente de modo que, localmente, existam centros capazes de gerar o espaço vetorial tangente no ponto desejado. Em relação à aplicação de rede RBF como controlador no MRAC, foi analisada a condição de casamento, considerando que os pesos da rede eram os únicos parâmetros livres no processo de adaptação. Destacou-se que, considerando uma inicialização aleatória da rede RBF, são suficientes apenas $P = 2n - 1$ das N gaussianas para realizar uma aproximação do sinal de controle ideal do MRAC numa vizinhança de um ponto.

Capítulo 4

Análise de Estabilidade

4.1 Introdução

Neste capítulo, serão apresentadas a formulação matemática do sistema de controle e as provas de estabilidade através da teoria de Lyapunov para a rede RBF. O capítulo inicia-se descrevendo a estrutura do MRAC utilizando a rede RBF como controlador para o caso não linear. Nas seções seguintes, a expressão para o erro de saída é reformulada com base nos parâmetros da rede RBF, deixando-a numa forma mais adequada e que simplificará as provas de estabilidade. Dedicar-se também uma seção para a explicação da estratégia de adaptação em modo dual para a rede RBF com base nas funções tangente e secante hiperbólicas, onde será mostrado o comportamento dessas leis durante o transitório e em regime permanente. Nas últimas seções serão desenvolvidas as provas de estabilidade para a rede RBF com leis integrais puras do MRAC, para leis chaveadas utilizando tangente hiperbólica e para leis em modo dual. Será mostrada a convergência do sistema para um conjunto residual de tamanho definido em projeto.

4.2 Estrutura de Controle do MRAC com a rede RBF

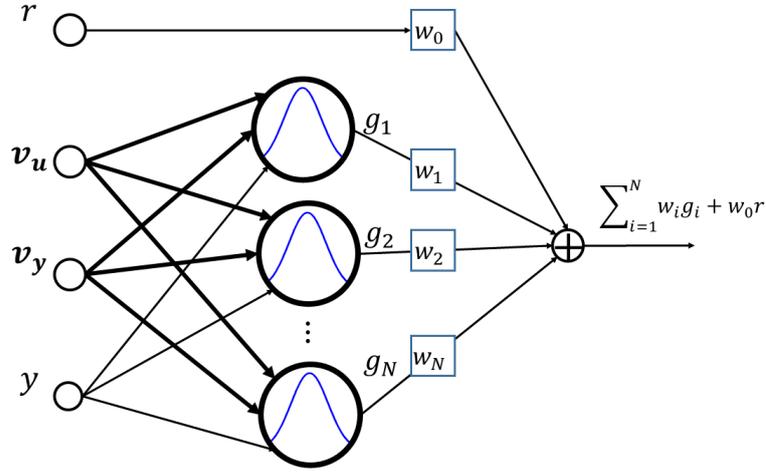


Fig. 4.1 Rede RBF

$$u_{\text{RBF}} = \sum_{i=1}^N w_i g_i + w_0 r = \mathbf{w}^T \mathbf{g} + w_0 r \quad (4.1)$$

$$g_i = \exp\left(\frac{-\|\xi_\xi - \mathbf{c}_i\|^2}{2\sigma_i^2}\right) \quad (i = 1, \dots, N) \quad (4.2)$$

A rede RBF apresentada na Fig. 4.1 será utilizada na estratégia de controle. Conforme já explicado, a rede é formada por camada de entrada, camada oculta e de saída. A camada de entrada receberá o vetor regressor ξ_ξ e a referência será aplicada ao *bias* ($g_0 = r$). A camada oculta é composta por N centros, em que cada centro i está posicionado no espaço S de ξ_ξ e na coordenada $\mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^{2n-1}$. A camada de saída será dada pela expressão em (4.1). Os centros são funções de base radial do tipo gaussiana, conforme a expressão em (4.2). As funções gaussianas g_i são uniformemente limitadas com cota superior 1 para centros próximos do ponto ξ_ξ ($\|\xi_\xi - \mathbf{c}_i\| \rightarrow 0 \Rightarrow g_i \rightarrow 1$). Uma propriedade interessante das gaussianas é manter os sinais do sistema uniformemente limitados. Quanto mais afastado o centro i estiver do vetor regressor ξ_ξ menor será g_i , ou seja, $g_i \rightarrow 0$ quando $\|\xi_\xi - \mathbf{c}_i\| \rightarrow \infty$. Quando os sinais do sistema em ξ_ξ tendem a crescer, se afastando dos centros, as respostas das gaussianas tendem a diminuir e, assim, o sinal de controle u_{RBF} e todos os sinais ponderados por g_i também diminuem. Para o caso de plantas instáveis e com condição inicial não-nula, isso pode não ser verdade sempre. Logo, os centros devem estar bem distribuídos para garantir a ação

das gaussianas. Por exemplo: seja $\dot{y} = ay + wg$ ($a > 0$ e $y(0) \neq 0$), uma planta de ordem 1 e instável com controle realizado por uma rede RBF de apenas um centro e com $r = 0$. Se a condição inicial estiver fora do raio de ação da gaussiana g , tem-se que $g \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow \infty$, e o sistema tende a se instabilizar. Neste caso, deve-se usar um número maior de centros bem localizados no espaço de entrada, de modo que pelo menos alguns destes estejam próximos o suficiente de $y(0)$ para garantir que se tenha algum $g_i > 0$. Para centros com funções distribuições normais, pode-se fazer com que alguns centros satisfaçam $\|\xi_\xi - c_i\| \leq n_\sigma \sigma$, para algum inteiro positivo n_σ e $\sigma > 0$ constante.

No MRAC, os sinais medidos são diretamente ajustados pelos parâmetros adaptativos que compõem o vetor θ . O sinal de controle aplicado à planta será a soma de todas as ponderações dos sinais realimentados pelos seus respectivos parâmetros. Com o processo de adaptação em curso, esses parâmetros devem convergir para os valores ideais ou corretos θ^* , o que fará $e_0 \rightarrow 0$. No controle com a rede RBF, todos os sinais realimentados da planta são aplicados à entrada da rede, e passados como argumento para cada função gaussiana (Fig 4.1). Os pesos da rede RBF serão adaptados, provocando mudanças na amplitude de cada gaussiana e mudando o sinal de controle. As funções gaussianas extrairão características do vetor regressor que talvez sejam difíceis de serem feitas na dimensão $2n - 1$ do espaço de entrada. Logo, no escopo do espaço das gaussianas, haverá uma expansão de dimensão para N , que dará mais graus de liberdade à rede RBF de encontrar soluções para casos não lineares. Isto auxiliará na aproximação de qualquer função não linear contínua (Huang e Chiou, 2006; Chen e Khalil, 1990; Park e Sandberg, 1991).

Considere a Fig. 4.2 onde é apresentada a estrutura de controle com uma rede RBF. O controle é baseado no MRAC, onde o erro entre o sistema não linear e o modelo de referência é utilizado para adaptar os pesos da rede RBF. O sinal aplicado ao sistema não linear é dado pela equação (4.1). Neste trabalho, o sistema não linear é considerado pertencente à classe de sistemas que podem ser formulados como $y = k_p \frac{N_p(s)}{D_p(s)}[u + d]$ (Khalil, 1996), onde d é um termo desconhecido que contém as não-linearidades e/ou perturbações. O sinal de controle produzido pela rede RBF deve compensar d e aproximar $\theta^{*T} \xi + \theta_{2n}^* r$, que pode fazer a planta $y = k_p \frac{N_p(s)}{D_p(s)}[\theta^{*T} \xi + \theta_{2n}^* r]$ seguir o modelo $y_m = k_m \frac{N_m(s)}{D_m(s)} r$.

As equações dos erros desenvolvidas nas expressões (2.40) e (2.41) podem ser escritas para a estrutura de controle com a rede RBF apresentada na Fig 4.2. O sinal nominal $u^{\text{nom}} = U^{\text{nom}} + w_0 r$, em que $U^{\text{nom}} = \mathbf{w}^{\text{nom}T} \mathbf{g}$ é formulado segundo pesos nominais \mathbf{w}^{nom} da rede RBF. O vetor \mathbf{w}^{nom} representa o conhecimento *à priori* obtido

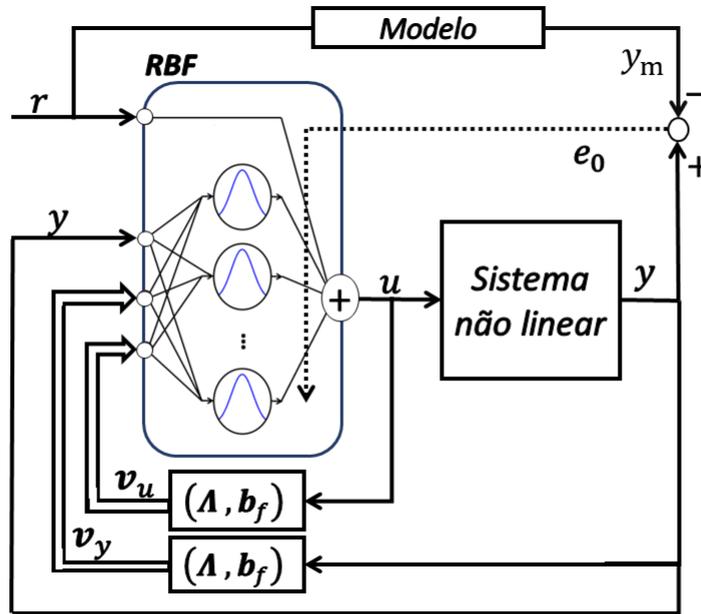


Fig. 4.2 Estrutura de Controle do MRAC com a Rede RBF

a partir de um método qualquer de aprendizagem *off-line* e incorporado ao sinal de controle aplicado à planta. O sinal de controle nominal ideal é escrito com pesos nominais ideais $U^{*nom} + w_0 r = \mathbf{w}^{*nomT} \mathbf{g} + \frac{1}{k^{nom}} r$, para $w_0 = \frac{1}{k^{nom}}$, e que casa a planta nominal (2.28) com o modelo de referência (2.18). Logo, a expressão para o sinal de controle da rede RBF é dada por

$$\begin{aligned}
 u_{RBF} &= u^{nom} - U_{RBF} \\
 &= U^{nom} + w_0 r - U_{RBF} \\
 &= (\mathbf{w}^{nom} - \mathbf{w})^T \mathbf{g} + w_0 r
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

onde $U_{RBF} = \mathbf{w}^T \mathbf{g}$ faz as correções entre u^{nom} e u^* , e \mathbf{w} é ajustado para fazer $e_0 \rightarrow 0$. Tomando \bar{U} como apresentado em (2.42) e considerando a Suposição 6 (página 25), tem-se que

$$f^* = U_{RBF}^* - \delta \Rightarrow -\bar{U} = U_{RBF}^* - \delta$$

e obtém-se $-U_{RBF} - \bar{U} = -U_{RBF} + U_{RBF}^* - \delta = -\tilde{\mathbf{w}}^T \mathbf{g} - \delta$, onde $\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{w} - \mathbf{w}^*$. Assim,

reescrevendo-se (2.41), tem-se

$$e_0 = k^{\text{nom}}M(s)[- \tilde{\mathbf{w}}^T \mathbf{g} - \delta] \quad (4.4)$$

e na forma de espaço de estado:

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}_c \mathbf{e} + k^{\text{nom}} \mathbf{b}_c (- \tilde{\mathbf{w}}^T \mathbf{g} - \delta), \quad e_0 = \mathbf{h}_c^T \mathbf{e} \quad (4.5)$$

Observação: Os centros da rede RBF devem ser bem posicionados no espaço de entrada para assegurar que pelo menos um número $N' \leq N$ de centros tenha $g_i \neq 0$ e realizar uma boa aproximação do sinal de controle \bar{U} . Para tal, basta que os N centros sejam aleatoriamente posicionados no espaço de entrada, cada um com largura aleatória σ_i , usando uma distribuição de probabilidade contínua (Huang et al., 2006).

Observação: A função de transferência $W_d(s) = (k^{\text{nom}}M(s))^{-1} \bar{W}_d(s)$, sendo $\bar{W}_d(s) = \mathbf{h}_c^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1} \mathbf{b}'_0$, uma função de transferência entre a perturbação d e a saída y . De acordo com a relação apresentada em (2.35), $W_d(s) = 1 - G_u^{*\text{nom}}(s)$ e, portanto, é uma função de transferência própria. Logo, como $W_d(s)d = d - G_u^{*\text{nom}}(s)d$, sendo $G_u^{*\text{nom}}(s)d$ contínua, pois $G_u^{*\text{nom}}(s)$ é estritamente própria, o que satisfaz a Suposição 6 (página 25), mas o termo d , sendo ou não contínuo, pode não satisfazer tal suposição. Assim, conforme será abordado nas próximas seções, as funções chaveadas presentes nas leis em modo dual são projetadas de modo que as perturbações sejam rejeitadas. E mesmo para as leis integrais, se o número dos pontos de descontinuidade for finito, pode-se ainda manter-se um bom desempenho da rede RBF nos intervalos contínuos.

4.2.1 Metodologia de Adaptação em Modo Dual

O vetor de pesos \mathbf{w} tem suas componentes w_i ajustadas de acordo com a combinação dos métodos apresentados nas expressões (4.6) a (4.10). O termo w_{si} é responsável pelo transitório rápido e w_{ai} é responsável pela resposta do sistema em regime permanente (4.8). As funções φ_i e ϕ_i são definidas nas expressões (4.9)-(4.10), sendo λ_1 e λ_2 parâmetros que ajustam essas funções $\text{tgh}(\lambda_1 g_i e_0)$ e $\text{sech}(\lambda_1 g_i e_0)$, respectivamente (Fig. 4.3). Os parâmetros γ_i e \bar{w}_i são o ganho adaptativo e a amplitude da função $\varphi(\lambda_{1i} e_0 g_i)$, respectivamente. O parâmetro \bar{c}_i é a amplitude da função sinal $\text{sgn}(e_0 g_i)$ cujo valor é definido no ponto $|\lambda_{1i} e_0 g_i| = k$, $k > 0$ constante. Esta amplitude serve

para assegurar a continuidade entre a função tgh e a função sgn .

$$w_i = w_{si} + \phi_i w_{ai} \quad (4.6)$$

$$w_{si} = \bar{w}_i \varphi_i \quad (4.7)$$

$$\dot{w}_{ai} = \phi_i \gamma_i e_0 g_i \quad (4.8)$$

$$\phi_i = \text{sech}(\lambda_2 e_0 g_i) \quad (4.9)$$

$$\varphi_i = \begin{cases} \text{tgh}(\lambda_1 e_0 g_i), & \text{Se } |\lambda_1 e_0 g_i| \leq k \\ \bar{c}_i \text{sgn}(e_0 g_i), & \text{Se } |\lambda_1 e_0 g_i| > k \end{cases} \quad (4.10)$$

$$\bar{c}_i = |\text{tgh}(\lambda_1 g_i k)|$$

$$\text{sgn}(a) = \begin{cases} -1 & \text{if } a < 0, a \in \mathbb{R} \\ 1 & \text{if } a \geq 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

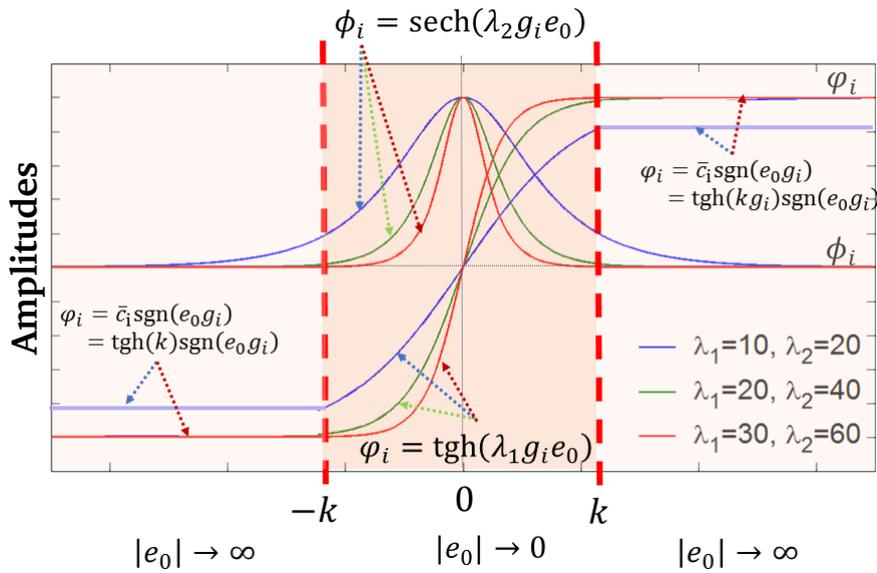


Fig. 4.3 Regiões de Controle

No início do processo de adaptação, todas as gaussianas recebem largura σ_i e posições \mathbf{c}_i aleatórias dentro de uma faixa de valores \mathbf{e} , depois, permanecem fixas durante o processo adaptativo. Os pesos w_i são ajustados para reduzir o erro de saída e_0 . Conforme o tempo avança, w_i deve convergir para w_i^* , de modo que o sinal de controle u_{RBF} se aproxima de u_{RBF}^* , que é definido como o sinal de controle ideal, que é capaz de fazer a planta se comportar como o modelo de referência. Durante o transitório, a componente w_i , por meio do termo w_{si} , tem as propriedades do VS-MRAC, o que oferece ao sistema uma rápida resposta no transitório, robustez e rejeição de

perturbações. Em regime permanente, por meio do termo w_{ai} , que se torna mais atuante, obtém-se uma convergência do erro de saída e_0 com um sinal de controle suave, livre de *chattering*.

No VS-MRAC é utilizada a função sinal $\text{sgn}(e_0)$ como definida na expressão (4.11). Devido a descontinuidade da função sinal em $e_0 = 0$, e sendo neste ponto onde o sistema atinge e permanece em modo deslizante, o sinal de controle apresenta oscilações de altíssima frequência para mantê-lo nesse modo, dando origem ao fenômeno de *chattering*. Neste trabalho, a função tangente hiperbólica $\text{tgh}(\lambda_1 e_0 g_i)$ será utilizada no lugar da função sinal. A função tgh reduz o *chattering* devido sua continuidade para $e_0 = 0$, no entanto, não garante-se a convergência do erro de saída e_0 . Para a convergência de e_0 será utilizada a função $\phi_i = \text{sech}(\lambda_2 e_0 g_i)$ para regular as leis integrais. A função sech evita as fortes oscilações durante o transitório, e atua na convergência do erro de saída em regime permanente. Para valores elevados de e_0 , tem-se que a função $\phi_i \rightarrow 0$, o que faz $\phi_i w_{ai}$ quase nulo e sem efeito na adaptação $\dot{w}_{ai} \rightarrow 0$. Nesta mesma situação, w_{si} assume dois valores $+\bar{w}_i \bar{c}_i$ ($e_0 \geq 0$) e $-\bar{w}_i \bar{c}_i$ ($e_0 < 0$), provocando um efeito relé no sinal de controle, fazendo-o comportar-se como o VS-MRAC. E para e_0 próximo de zero, tem-se que $\phi_i \rightarrow 1$, fazendo o termo w_{ai} mais atuante e aumentando a influência com ação integral através de \dot{w}_{ai} . Para esta situação, os valores de e_0 e w_{si} assumem valores proporcionais a e_0 , porque a função $\varphi_i = \text{tgh}(\lambda_1 e_0 g_i)$ tem comportamento aproximado a $\lambda_1 e_0 g_i$, que é a região linear da curva φ_i (Fig. 4.3).

Os valores de $\bar{w}_i \bar{c}_i$ são determinados em projeto, e devem ser os maiores possíveis, mas que não produzam um sinal de controle de amplitude elevada. Deve-se fazer $\bar{c}_i = \text{tgh}(\lambda_1 g_i k) \approx 1$ ($g_i \rightarrow 1$), através da escolha de λ_1 e de k que define o limite da região de controle. Isso evitará reduções das amplitudes das funções chaveadas. Por exemplo, conforme indicado na Fig. 4.3, usando $k = 6$, uma boa escolha é $\lambda_1 \geq 20$ que fará $\bar{c}_i \approx 1$, ao passo que valores inferiores reduzem a amplitude da função φ_i quando $\lambda_1 e_0 g_i > k$. O parâmetro λ_2 pode ser escolhido arbitrariamente, mas de modo que se atenuem as oscilações do sistema no transitório e que melhore a convergência do erro de saída e_0 .

4.2.2 Rede RBF com Leis de Adaptação Integral e Chaveada

Usando leis integrais de adaptação, o sistema em malha fechada pode apresentar um comportamento muito oscilatório. No entanto, é possível ter um sinal de controle suave e um bom desempenho em regime permanente. A seguinte lei integral, baseada

nas leis convencionais do MRAC, pode ser aplicada para adaptar os pesos w_i da rede RBF (Oliveira et al., 2011):

$$\dot{w}_i = \gamma_i g_i e_0, \quad i = 1, 2 \dots N \quad (4.12)$$

onde $\gamma_i > 0$ é o ganho adaptativo que regula \dot{w}_i .

O controle VS-MRAC apresenta resposta transitória muito rápida, robustez e rejeição a distúrbios e incertezas. A lei chaveada de controle é dada por:

$$w_i = \bar{w}_i \text{sgn}(e_0 g_i), \quad \bar{w}_i > |w_i^*|, \quad i = 1, 2 \dots N \quad (4.13)$$

onde \bar{w}_i é a amplitude de $\text{sgn}(e_0 g_i)$ (4.11).

Teorema 4.2.1 (RBF com leis do MRAC) ($n^* = 1$): *Considere as Suposições 1-6 (página 13 e página 25), a expressão do erro em (4.5) (para $\epsilon = 0$, $k^{\text{nom}} = 1$) e a lei de adaptação em (4.12). Os sinais e , \dot{e} , \tilde{w} , e_0 , $\dot{w} \in \mathcal{L}_\infty$, $e \rightarrow 0$ e $e_0 = \mathbf{h}_c^T e \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.*

Prova: Considere a função candidata a Lyapunov:

$$V(e, \tilde{w}) = \frac{\mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e}}{2} + \tilde{\mathbf{w}}^T \mathbf{\Gamma}^{-1} \tilde{\mathbf{w}}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0 \quad (4.14)$$

onde $V > 0$ (positiva-definida), $\mathbf{\Gamma} = \text{diag}(\gamma_i) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ($i = 1, \dots, N$) é uma matriz diagonal formada pelos ganhos adaptativos $\gamma_i > 0$.

Calculando \dot{V} e aplicando o Lema A.3.1 (KYL, página 70):

$$\dot{V} = -\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} - \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{b}_c \tilde{\mathbf{w}} g + \tilde{\mathbf{w}}^T \mathbf{\Gamma}^{-1} \dot{\mathbf{w}}$$

usando $\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{\Gamma} \mathbf{g} e_0$ e sabendo-se que $\mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{b}_c = e_0$, tem-se

$$\dot{V} = -\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} \leq 0$$

Então $e, \tilde{w} \in \mathcal{L}_\infty$. Como $g \in \mathcal{L}_\infty$ e de (4.5), tem-se que $\dot{e} \in \mathcal{L}_\infty$, $e_0 \in \mathcal{L}_\infty$, $\dot{e}_0 = \mathbf{h}_c^T \dot{e} \in \mathcal{L}_\infty$ e finalmente $\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{\Gamma} \mathbf{g} e_0 \in \mathcal{L}_\infty$. Assim, tem-se que V é limitado inferiormente, pois $V > 0$ e não cresce ($\dot{V} \leq 0$ para $t > 0$), i.e. $V \rightarrow V_\infty$, sendo $V_\infty \geq 0$ constante, quando $t \rightarrow \infty$. Agora, calculando $\ddot{V} = -\dot{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} - \mathbf{e}^T \mathbf{Q} \dot{e}$, nota-se que $\ddot{V} \in \mathcal{L}_\infty$, e usando o Lema de Barbalat (Lema A.3.2), conclui-se que \dot{V} é uniformemente contínua, pois $\ddot{V} \in \mathcal{L}_\infty$, então $\dot{V} = -\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} \rightarrow 0$, $e \rightarrow 0$, $e_0 = \mathbf{h}_c^T e \rightarrow 0$ e $\dot{\mathbf{w}} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Teorema 4.2.2 (RBF com Leis Chaveadas) ($n^* = 1$): Considere as Suposições 1-6 (página 13 e página 25), a expressão do erro em (4.5) ($k^{\text{nom}} = 1$) e a lei de adaptação em (4.13). Os sinais $\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{0}$ e $e_0 = \mathbf{h}_c^T \mathbf{e} \rightarrow 0$ em tempo finito.

Prova: Usando a função candidata a Lyapunov em (4.15), segue-se

$$V(\mathbf{e}) = \frac{\mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e}}{2}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0 \quad (4.15)$$

onde $V > 0$ (positiva-definida).

Diferenciando V e aplicando o Lema A.3.1 (KYL, página 70):

$$\dot{V} = -\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{b}_c (-\tilde{\mathbf{w}}^T \mathbf{g} - \delta)$$

com $w_i = \bar{w}_i \text{sgn}(g_i e_0)$ para $\bar{w}_i > |w_i^*| + \epsilon/g_i$ ($g_i \neq 0$), e sabendo-se que $\mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{b}_c = e_0$ e $|e_0| = \text{sgn}(e_0)e_0$, tem-se

$$\begin{aligned} e_0(-\tilde{\mathbf{w}}^T \mathbf{g} - \delta) &= -\sum_i (w_i g_i - w_i^* g_i + \delta) e_0 \\ &= -\sum_i (\bar{w}_i \text{sgn}(g_i e_0) g_i - w_i^* g_i + \delta) e_0 \\ &\leq -\sum_i (\bar{w}_i - |w_i^*| - \epsilon/g_i) |e_0 g_i| < 0 \end{aligned}$$

para $i = 1, \dots, N$, tem-se que

$$\dot{V} = -\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} - \sum_i (\bar{w}_i - |w_i^*| - \epsilon/g_i) |e_0 g_i| < 0$$

Então, o sistema é assintoticamente estável e $e_0 = \mathbf{h}_c^T \mathbf{e} \rightarrow 0$.

Observação: Nas simulações para leis chaveadas, será utilizada $w_i = w_{si} = \bar{w}_i \varphi_i$ em (4.7) e (4.10) ao invés da lei chaveada com a função sinal em (4.13) para que se obtenha um comportamento livre de *chattering*. A prova de estabilidade é similar à apresentada acima, sendo que para $|\lambda_1 g_i e_0| > k > 0$, tem-se $w_i = \bar{w}_i \varphi_i = \bar{w}_i \bar{c}_i \text{sgn}(g_i e_0)$ com $\bar{w}_i \bar{c}_i > |w_i^*| + \epsilon/g_i$. Isto garante que o sistema tenha convergência assintótica. No entanto, para $0 \leq |\lambda_1 g_i e_0| \leq k$ isto não é verdade, porque $\text{tgh}(\lambda_1 g_i e_0)$ pode ser representada como $\lambda_1 g_i e_0$ e dessa forma tem-se que $\dot{V} \leq -\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} - \bar{w}_i \lambda_1 (g_i e_0)^2 + |w_i^*| |g_i e_0|$. Então, não há garantia que $\dot{V} \leq 0$ uniformemente para todo tempo $t > 0$, dado que o termo quadrático $\bar{w}_i \lambda_1 (g_i e_0)^2$ em algum tempo $t > t_0$ ($t_0 > 0$) será menor que $|w_i^*| |g_i e_0|$. Portanto, o erro de saída e_0 , embora uniformemente limitado, não convergirá a zero.

4.2.3 Estabilidade da rede RBF em Modo Dual ($k^{\text{nom}} = 1, n^* = 1$)

Considere novamente a expressão do erro em (4.5). Para efeito de análise, separe-se \mathbf{w} em dois termos $\tilde{\mathbf{w}}^T \mathbf{g} = \sum_i \tilde{w}_i g_i = \sum_i (\tilde{w}_s + \phi_i \tilde{w}_{ai}) g_i = \sum_i \tilde{w}_s g_i + \sum_i \phi_i \tilde{w}_{ai} g_i$, $i = 1, \dots, N$. O princípio é que para valores altos de e_0 , tenha-se $\phi_i \rightarrow 0$, e w_{si} será o único que contribuirá significativamente para acelerar o transitório. E, para valores baixos de e_0 , tenha-se $\phi_i \rightarrow 1$, e assim, o termo w_{ai} será o que mais contribuirá para a convergência do erro de saída e_0 . Logo, a expressão do erro pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \mathbf{A}_c \mathbf{e} - \mathbf{b}_c \sum_i \tilde{w}_{si} g_i - \mathbf{b}_c \sum_i \phi_i \tilde{w}_{ai} g_i - \mathbf{b}_c \delta \\ e_0 &= \mathbf{h}_c^T \mathbf{e} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Teorema 4.2.3 *Considere as Suposições 1-6 (página 13 e página 25), a expressão do erro em (4.16) e as leis de adaptação de (4.6) a (4.8). Então, as trajetórias do sistema convergirão para um conjunto compacto, residual*

$$D_R = \left\{ (\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{w}}_a) \mid V \leq \frac{1}{\gamma} \frac{K_w^2 N}{\zeta \phi_{\max}^2} + \frac{c_d \bar{w}_M N k}{\zeta \lambda_1} \right\}$$

para N centros de gaussianas, $\bar{w}_M = \max_i \{\bar{w}_i\}$, $\phi_{\max} = \max_i \{\phi_i\}$ e constantes positivas c_d, K_w, ζ, γ definidas em projeto.

Prova: Define-se a função candidata a Lyapunov como

$$V(\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{w}}_a) = \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e} + \sum_i \frac{\tilde{w}_{ai} \dot{\tilde{w}}_{ai}}{\gamma_i}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0 \quad (4.17)$$

onde $V > 0$ (positiva-definida), $\gamma_i > 0$ é o ganho adaptativo w_{ai} ($i = 1, \dots, N$) e $\tilde{\mathbf{w}}_a = [\tilde{w}_{a1} \dots \tilde{w}_{aN}]^T$.

Calculando \dot{V} , usando (4.16) com $\mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{b}_c = e_0$, $\dot{\tilde{w}}_{ai} = \dot{w}_{ai} = \gamma_i \phi_i g_i e_0$, $w_{si} = \bar{w}_i \phi_i$ como em (4.7) e (4.8) e pelo Lema A.3.1, tem-se

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} - \sum_i \tilde{w}_{si} g_i e_0 - \sum_i \phi_i \tilde{w}_{ai} g_i e_0 \\ &\quad - e_0 \delta + \sum_i \frac{\tilde{w}_{ai} \dot{\tilde{w}}_{ai}}{\gamma_i} \\ &= -\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} - \sum_i (\bar{w}_i \phi_i - w_{si}^*) e_0 g_i - \delta e_0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

Considera-se as seguintes situações para análise: $|\lambda_1 e_0 g_i| > k$ e $|\lambda_1 e_0 g_i| \leq k$.

Caso I, $|\lambda_1 e_0 g_i| > k$

Para $|\lambda_1 e_0 g_i| > k \Rightarrow \varphi_i = \bar{c}_i \operatorname{sgn}(e_0 g_i)$ e $|\delta| \leq \epsilon$, ($\bar{c}_i = 1$), então (4.18) é dado por

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} - \sum_i (\bar{w}_i \operatorname{sgn}(e_0 g_i) - w_{si}^*) e_0 g_i - \delta e_0 \\ &\leq -\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} - \sum_i (\bar{w}_i - |w_{si}^*|) |e_0 g_i| + \epsilon |e_0| \\ &\leq -\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} - (\Delta_w \|\mathbf{g}\|_1 - \epsilon) |e_0| \end{aligned} \quad (4.19)$$

onde $\bar{w}_i \geq |w_{si}^*|$ e definindo $0 \leq \Delta_w \leq \min_i \{\bar{w}_i - |w_{si}^*|\}$.

Dado que $\|\mathbf{g}\|_1 \leq N$, tem-se ($\Delta_w N \geq \Delta_w \|\mathbf{g}\|_1 > \epsilon$). Assim, fazendo N tão grande quanto possível, tem-se $\dot{V} < 0$, e o sistema converge assintoticamente.

Caso II, $|\lambda_1 e_0 g_i| \leq k$

No caso $|\lambda_1 e_0 g_i| \leq k$, será utilizada a seguinte identidade: $\operatorname{tgh}(a) = 1 - \operatorname{sech}(a)e^{-a}$, para algum escalar a^1 . Dado que $\varphi(a) = \operatorname{tanh}(a)$, pode-se usar a relação

$$\varphi_i(\lambda_1 e_0 g_i) = 1 - \phi(\lambda_1 e_0 g_i) e^{-\lambda_1 e_0 g_i} \quad (4.20)$$

e para $\dot{V} \leq 0$ em (4.19), faz-se $|\epsilon| = \sum_i (\bar{w}_i \bar{c}_i - |w_{si}^*|) g_i$, com $\bar{c}_i = 1$, e tem-se a expressão (4.18) como segue

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} - \sum_i (\bar{w}_i - w_{si}^*) e_0 g_i \\ &\quad + \sum_i \bar{w}_i \phi(\lambda_1 e_0 g_i) e^{-\lambda_1 e_0 g_i} e_0 g_i - e_0 \delta \\ \dot{V} &\leq -\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + \sum_i (\bar{w}_i + |w_{si}^*|) |e_0 g_i| \\ &\quad + \sum_i \bar{w}_i |\phi(\lambda_1 e_0 g_i)| |e^{-\lambda_1 e_0 g_i}| |e_0 g_i| \\ &\quad + \sum_i (\bar{w}_i - |w_{si}^*|) |e_0 g_i| \end{aligned}$$

¹Usando-se a relação entre a função exponencial e as funções hiperbólicas: $e^{-a} = \cosh(a) - \sinh(a)$, onde $\cosh(a)$ e $\sinh(a)$ são o cosseno e o seno hiperbólicos de a , respectivamente. Assim, $\frac{e^{-a}}{\cosh(a)} = 1 - \frac{\sinh(a)}{\cosh(a)} \rightarrow \operatorname{tgh}(a) = 1 - \operatorname{sech}(a)e^{-a}$.

$$\begin{aligned}\dot{V} &\leq -\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + \sum_i (2 + \phi(\lambda_1 e_0 g_i) |e^{-\lambda_1 e_0 g_i}|) \bar{w}_i |e_0 g_i| \\ \dot{V} &\leq -\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + \sum_i (2 + \phi(k) e^k) \frac{k \bar{w}_i}{\lambda_1} \\ \dot{V} &\leq -\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + \frac{c_d}{\lambda_1} \bar{w}_M N k\end{aligned}$$

onde $c_d = 2 + \phi(k)e^k$, $\bar{w}_M = \max_i \{\bar{w}_i\}$ e $|\lambda_1 e_0 g_i| \leq k$, dado que k é um limite para $\varphi(\lambda_1 e_0 g_i)$ se comportar como $\bar{c}_i \text{sgn}(g_i e_0)$ (Fig. 4.3), e $|e^{-\lambda_1 e_0 g_i}| \leq e^k$ e $0 \leq \phi(\lambda_1 e_0 g_i) \leq \phi(k)$. Agora, pela desigualdade $-\lambda_{\max Q} \|\mathbf{e}\|^2 \leq -\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} \leq -\lambda_{\min Q} \|\mathbf{e}\|^2$, onde $\lambda_{\min Q}$ e $\lambda_{\max Q}$ são os autovalores máximo e mínimo de \mathbf{Q} , respectivamente, segue que

$$\dot{V} \leq -\lambda_{\min Q} \|\mathbf{e}\|^2 + \frac{c_d \bar{w}_M N k}{\lambda_1} \quad (4.21)$$

Então, para $\dot{V} \leq 0$, conclui-se que

$$\|\mathbf{e}\| \geq \sqrt{\frac{c_d \bar{w}_M N k}{\lambda_1 \lambda_{\min Q}}} \quad (4.22)$$

Portanto, a função V expressa em (4.17) é uma função de Lyapunov, tal que o erro $\|\mathbf{e}\|$ está em uma bola de raio $\sqrt{\frac{c_d \bar{w}_M N k}{\lambda_1 \lambda_{\min Q}}}$, que pode ser feita menor conforme λ_1 é aumentado em projeto. Adicionalmente, será analisado o limitante de \tilde{w}_{ai} usando (4.4). Logo, tem-se que $\dot{e}_0 = k^{\text{nom}} s M(s) [-\tilde{\mathbf{w}}^T \mathbf{g} - \delta]$, e como $(\tilde{\mathbf{w}}^T \mathbf{g} - \delta) \in \mathcal{L}_\infty$ é possível concluir que $|\dot{e}_0|$ é limitado conforme

$$|\dot{e}_0| \leq K_e \|\mathbf{g}\|_1 \leq K g_M N$$

para constantes $K_e, K > 0$, $g_M = \max_i \{g_i\} \leq 1$ e pela equivalência das normas no espaço euclidiano $\|\mathbf{g}\| \leq K \|\mathbf{g}\|_1 \leq K g_M N$. Assim, usando (4.16), e considerando que $\|\mathbf{e}\|$ em (4.22) pode ser feito tão pequeno quanto se queira, $|\dot{e}_0| \leq K_e \|\mathbf{g}\|_1$ e para

$\varphi_i(\lambda_1 e_0 g_i) = 1 - \phi_i(\lambda_1 e_0 g_i) e^{-\lambda_1 e_0 g_i}$ e $\epsilon = \sum_i (\bar{w}_i - |w_{si}^*|) g_i$, escreve-se

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_c^T \mathbf{b}_c \tilde{\mathbf{w}}_a^T \mathbf{S} \mathbf{g} &= \mathbf{h}_c^T (\mathbf{A}_c \mathbf{e} - \mathbf{b}_c \sum_i \tilde{w}_{si} g_i - \mathbf{b}_c \delta) - \dot{e}_0 \\ k_m \|\tilde{\mathbf{w}}_a\| \|\mathbf{S}\| \|\mathbf{g}\| &\leq k_1 \|\mathbf{e}\| + k_m \sum_i (\bar{w}_i + |w_{si}^*|) g_i \\ &\quad + k_m \sum_i \bar{w}_i \phi(\lambda_1 e_0 g_i) e^{-\lambda_1 e_0 g_i} g_i \\ &\quad + k_m \sum_i (\bar{w}_i - |w_{si}^*|) g_i + |\dot{e}_0| \\ \|\tilde{\mathbf{w}}_a\| &\leq (2 + \phi(k) e^k) \frac{\bar{w}_M \|\mathbf{g}\|_1}{\|\mathbf{S}\| \|\mathbf{g}\|} + \frac{K_e \|\mathbf{g}\|_1}{\|\mathbf{S}\| \|\mathbf{g}\|} \\ \|\tilde{\mathbf{w}}_a\| &\leq K_w \frac{\sqrt{N}}{\phi_{max}} \end{aligned} \quad (4.23)$$

onde $K_w = \max\{(2 + \phi(k) e^k) \bar{w}_M, K_e\}$, $\bar{w}_M = \max_i \{\bar{w}_i\}$, $k_1 = \|\mathbf{h}_c\| \|\mathbf{A}_c\|$, $k_m = \mathbf{h}_c^T \mathbf{b}_c$, $\mathbf{S} = \text{diag}\{\phi_i\}$, tal que $\|\mathbf{S}\| = \phi_{max} = \max_i \{\phi_i\}$ e $\frac{\|\mathbf{g}\|_1}{\|\mathbf{g}\|} \leq \frac{g_M N}{g_M \sqrt{N}} \leq \sqrt{N}$. Agora, da expressão em (4.21), soma-se e subtrai-se $\frac{1}{\gamma} \|\tilde{\mathbf{w}}_{ai}\|^2$, com $\gamma = \gamma_1 = \dots = \gamma_N$ e multiplica-se o primeiro termo por $\frac{2\lambda_{\max P}}{2\lambda_{\max P}}$, onde $\lambda_{\max P}$ é o autovalor máximo de \mathbf{P} , e obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\lambda_{\min Q} \|\mathbf{e}\|^2 + \frac{c_d \bar{w}_M N k}{\lambda_1} \\ \dot{V} &\leq -\frac{2\lambda_{\min Q} \lambda_{\max P}}{\lambda_{\max P} 2} \|\mathbf{e}\|^2 - \frac{1}{\gamma} \|\tilde{\mathbf{w}}_{ai}\|^2 + \frac{1}{\gamma} \|\tilde{\mathbf{w}}_{ai}\|^2 + \\ &\quad + \frac{c_d \bar{w}_M N k}{\lambda_1} \\ \dot{V} &\leq -\zeta \left(\frac{\lambda_{\max P}}{2} \|\mathbf{e}\|^2 + \frac{1}{\gamma} \|\tilde{\mathbf{w}}_{ai}\|^2 \right) + \frac{1}{\gamma} \left(K_w \frac{\sqrt{N}}{\phi_{max}} \right)^2 \\ &\quad + \frac{c_d \bar{w}_M N k}{\lambda_1} \\ \dot{V} &\leq -\zeta V + \frac{1}{\gamma} \frac{K_w^2 N}{\phi_{max}^2} + \frac{c_d \bar{w}_M N k}{\lambda_1} \end{aligned}$$

fazendo-se $\zeta = \min \left\{ \frac{2\lambda_{\min Q}}{\lambda_{\max P}}, 1 \right\}$, com $V \leq \left(\frac{\lambda_{\max P}}{2} \|\mathbf{e}\|^2 + \frac{1}{\gamma} \|\tilde{\mathbf{w}}_{ai}\|^2 \right)$. Então, para $\dot{V} \leq 0$, tem-se $V \geq \frac{1}{\gamma} \frac{K_w^2 N}{\zeta \phi_{max}^2} + \frac{c_d \bar{w}_M N k}{\zeta \lambda_1}$.

Portanto, $\|\mathbf{e}\|$ e $\|\mathbf{w}_a\|$ convergem para um conjunto residual

$$D_R = \left\{ (\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{w}}_a) \mid V \leq \frac{1}{\gamma} \frac{K_w^2 N}{\zeta \phi_{max}^2} + \frac{c_d \bar{w}_M N k}{\zeta \lambda_1} \right\} \quad (4.24)$$

Isto completa a prova.

Observação: O tamanho do conjunto D_R pode ser feito ainda menor com o aumento dos parâmetros γ e λ_1 , o que compensaria também o uso de um número elevado de centros N . Deve-se observar que no transitório $\phi_{max} \rightarrow 0$, o que torna o conjunto residual com tamanho "grande". Conforme $\|e\|$ diminui $\phi_{max} \rightarrow 1$, o termo $\frac{1}{\gamma} \frac{K_v^2 N}{\zeta \phi_{max}^2}$ diminui. Por esta mesma razão, nota-se em (4.23) que o limite de $\|\tilde{w}_a\|$ torna-se menor, mostrando que a convergência dos pesos age principalmente quando o erro e_0 está próximo de zero. Isto também justificaria o uso de γ_i elevado para acelerar tal convergência e pelo fato de que $\dot{w}_a = \gamma_i \phi_i g_i e_0$ (4.8) ser muito pequeno quando $\phi_i \rightarrow 0$. Se $\phi_i = 1$ para todo $t > 0$, os pesos tendem a ter convergência mais acentuada, mas o sistema pode apresentar oscilações maiores no transitório.

4.3 Conclusão do Capítulo

Neste capítulo foi abordada a aplicação de uma rede RBF como controlador na estrutura de controle do MRAC. Foi explicado como funciona a proposta de controle em modo dual através das funções hiperbólicas tangente e secante. A vantagem mencionada é o rápido transitório e robustez das leis chaveadas e um sinal de controle livre de *chattering*. Em seguida foi reformulada a expressão para o erro de saída em função dos parâmetros da rede RBF e não mais dos parâmetros do MRAC. Assumiu-se ali que a rede é capaz de reproduzir o sinal de controle ideal para fazer a planta comportar-se como o modelo. As provas de estabilidade apresentadas abrangeram os casos individuais puros da rede RBF com as leis integrais do MRAC, chaveadas do VS-MRAC e em modo dual. Tais provas fizeram uso da teoria de Lyapunov, dos Lemas de Kalman-Yakubovich-Lefschetz e de Barbalat (Lemas A.3.1 e A.3.2, página 70). Foram também consideradas algumas suposições do sistema de controle e do modelo de referência (Suposições 1-6, página 13 e página 25) para as provas matemáticas, mas que não restringem a aplicabilidade prática do sistema no mundo real. No caso de adaptação dual, a rede apresenta convergência para um conjunto residual de tamanho definido em projeto.

Capítulo 5

Simulações

5.1 Introdução

Neste capítulo serão mostrados os resultados das simulações do sistema de controle em modo dual e comparações com as leis de adaptação integrais e chaveadas puras. Será apresentado o projeto do controlador para os casos da rede RBF em modo dual. Embora as análises nos capítulos precedentes mostrarem a possibilidade de se incluir conhecimento prévio do sistema através de parâmetros nominais da rede, as simulações foram feitas para a situação em que se desconhece os parâmetros do sistema. A estratégia adotada para o posicionamento dos centros gaussianos foi a de inicializá-los em posições e larguras aleatórias, de modo que sempre existisse algumas gaussianas agindo no controle e que suas respostas à entrada fossem diversificadas. As simulações mostrarão o desempenho do controle com a rede RBF com as diferentes estratégias abordadas nesta tese. O sistema controlado trata-se de uma planta de grau relativo unitário e com não-linearidade de entrada. As simulações consistem em fazer tal sistema seguir um modelo de referência também de grau relativo unitário.

5.2 Síntese do Controle e Simulações

As simulações foram feitas para os casos da rede RBF com as leis integrais do MRAC, para as leis chaveadas do VS-MRAC, mas usando a tangente hiperbólica, e para as leis em Modo Dual. Para efeito de comparação também foram feitas simulações para o MRAC convencional. Empregou-se a seguinte nomenclatura para os controladores: RBF com leis MRAC (RBF-MRAC), RBF com leis com função tangente hiperbólica (RBF-Hyperbolic Tangent Adaptive Control, RBF-HTAC) e com leis em modo dual (RBF-Dual Mode Adaptive Robust Control, RBF-DMARC). Considere o sistema em (2.16)

modelado conforme abaixo:

$$W(s) = \frac{(s+1)}{s(s-1)} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -100z + 1.5 \cos(y) + 2u \\ f(y, \dot{y}, z) &= z - 0.5(1 - 0.5y^2)\dot{y} - 2z \sin(y) \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$d_e(t) = \begin{cases} 0.5 + 2 \sin(115t), & \text{Se } 1.2 \leq t \leq 1.8 \text{ seg} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5.3)$$

O modelo de referência ERP, é dado por

$$M(s) = \frac{2(s+4)}{(s+3)(s+5)} \quad (5.4)$$

e os filtros por

$$\begin{aligned} v_u(s) &= \frac{4}{s+4}u \\ v_y(s) &= \frac{4}{s+4}y \end{aligned} \quad (5.5)$$

A planta a ser controlada é instável de ordem 2, logo o vetor regressor aplicado à rede terá 3 sinais $\xi_\xi^T = [y \ v_u \ v_y]$ mais o *bias* conectado à referência $g_0 = r$. A escolha do termo não linear em (5.2) foi feita para abordar alguns fenômenos físicos comuns. O estado z na forma em questão remete à dinâmica de excitação de um gerador síncrono. O termo quadrático multiplicado pela derivada de saída \dot{y} aponta para o fenômeno de atrito em alguns sistemas mecânicos.

Os controladores foram ajustados para que cada estratégia exibisse o melhor desempenho possível, considerando rapidez no transitório, poucas oscilações e nível de sinal de controle moderado. Foi considerado o sinal de controle para o erro formulado em (4.5) conforme $u = U^{\text{nom}} + w_0 r - U_{\text{RBF}}$. O número de gaussianas foi escolhido para que a rede abrangesse muitos pontos do espaço de entrada e que se garantisse que sempre alguns centros atuassem para qualquer entrada aplicada a ela. As larguras das gaussianas foram definidas dentro de uma faixa de valores nos testes. As taxas de adaptação e as amplitudes das funções chaveadas foram atribuídas aleatoriamente dentro da faixa especificada. As funções tangente e secante hiperbólicas foram ajustadas para

eliminar as oscilações e acelerar a convergência do sistema. No caso em modo dual, o ajuste da secante hiperbólica permitiu que os pesos apresentassem adaptação tão ampla quanto possível, mas sem provocar oscilações no sistema. Isso para aproveitar a ação integral que atua principalmente na convergência dos pesos da rede e, conforme será visto nos gráficos, para que os pesos com leis integrais se distribuam melhor que nas demais estratégias.

RBF: $U^{\text{nom}} = 0$, $w^{\text{nom}} = 0$, $w_0 = 1/k^{\text{nom}} = 1$, $N = 80$, $\sigma_i = \alpha_i + 0.6$, em que α_i é um número real aleatório no intervalo $[0, 1]$ ($\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \dots \neq \alpha_N$) e $c_{(i,p)} \in [-1.5, 1.5]$, $p = 1, \dots, 2n - 1$ e ($i = 1, \dots, N$), aleatoriamente posicionado.

RBF-MRAC: $\dot{w}_i = \gamma_i g_i e_0$, $\gamma_i = 200(\alpha_i + 0.6)$.

RBF-HTAC: $w_i = \bar{w}\varphi(\lambda g_i e_0)$ conforme (4.7), $\bar{w} = 0.5(\alpha_i + 0.6)$.

RBF-DMARC: $\gamma_i = 10000(\alpha_i + 0.6)$, $\lambda_2 = 2.5$, $\bar{w} = 0.5(\alpha_i + 0.6)$, $\lambda_1 = 20$, $k = 6$ ($\bar{c} = \text{tgh}(k) \approx 1$).

MRAC: $\dot{\theta}_j = \gamma_j \xi_j e_0$ conforme (4.12), $\gamma_1 = 1550$, $\gamma_2 = 1850$, $\gamma_3 = 1850$, $\gamma_4 = 2550$. Condições iniciais para todas as simulações: $w_i(0) = 0$, $w_{ai}(0) = 0$, $\mathbf{x}^T = [0.25 \ 0 \ \dots \ 0]$, $\mathbf{x}_m^T = [0 \ \dots \ 0]$, $z(0) = 0$. As simulações foram realizadas usando o método numérico de Euler com passo $h = 10^{-6}$. A referência foi ajustada em $r = 1$ ($0 \leq t \leq 1$ seg) e $r = 0$ ($1 < t \leq 2$ seg) e no intervalo $1.2 \leq t \leq 1.8$ seg foi aplicada a perturbação d_e dada em (5.3).

Nas Figuras 5.1 a 5.3 são mostrados os diferentes desempenhos dos controladores para o sistema em malha fechada. Para os controladores RBF-HTAC e RBF-DMARC praticamente não há oscilações e o transitório é mais rápido que nos demais casos, mas o controle RBF-DMARC apresenta melhor convergência do erro de saída e rejeição da perturbação d_e (detalhes (a) e (b) da Fig. 5.1). Os demais controladores apresentam transitório mais lento e oscilatório, e sofrem mais o efeito da perturbação d_e .

Os sinais de controle apresentam poucas oscilações e nenhum *chattering* nos controles RBF-DMARC e RBF-HTAC (Fig. 5.3 e detalhes (a) e (b)), e estes também são menores em amplitude. Os controles RBF-MRAC e MRAC apresentam mais oscilações de amplitude elevada. Os erros de saída são mostrados na Fig. 5.2 e nos detalhes (a) e (b), e a melhor convergência foi obtida pelo controle RBF-DMARC que também tem o melhor comportamento diante da perturbação.

Nas Figuras 5.4 a 5.7 são mostrados os parâmetros da rede RBF. Observa-se que o RBF-MRAC apresenta melhor convergência, com melhor dispersão dos pesos, o que favorece na convergência para valores ideais de pesos para a rede RBF. No caso do controlador RBF-HTAC (Fig. 5.7 e detalhe (a)), que apresenta desempenho muito parecido com o controle RBF-DMARC, os pesos seguem praticamente as mesmas

trajetórias, mas o RBF-DMARC, devido a parte integral da lei em modo dual, leva a que os pesos tendam a também se dispersar, evoluindo para valores diversos. No intervalo onde foi aplicada a perturbação d_e é possível observar flutuações nos pesos em todas as estratégias.

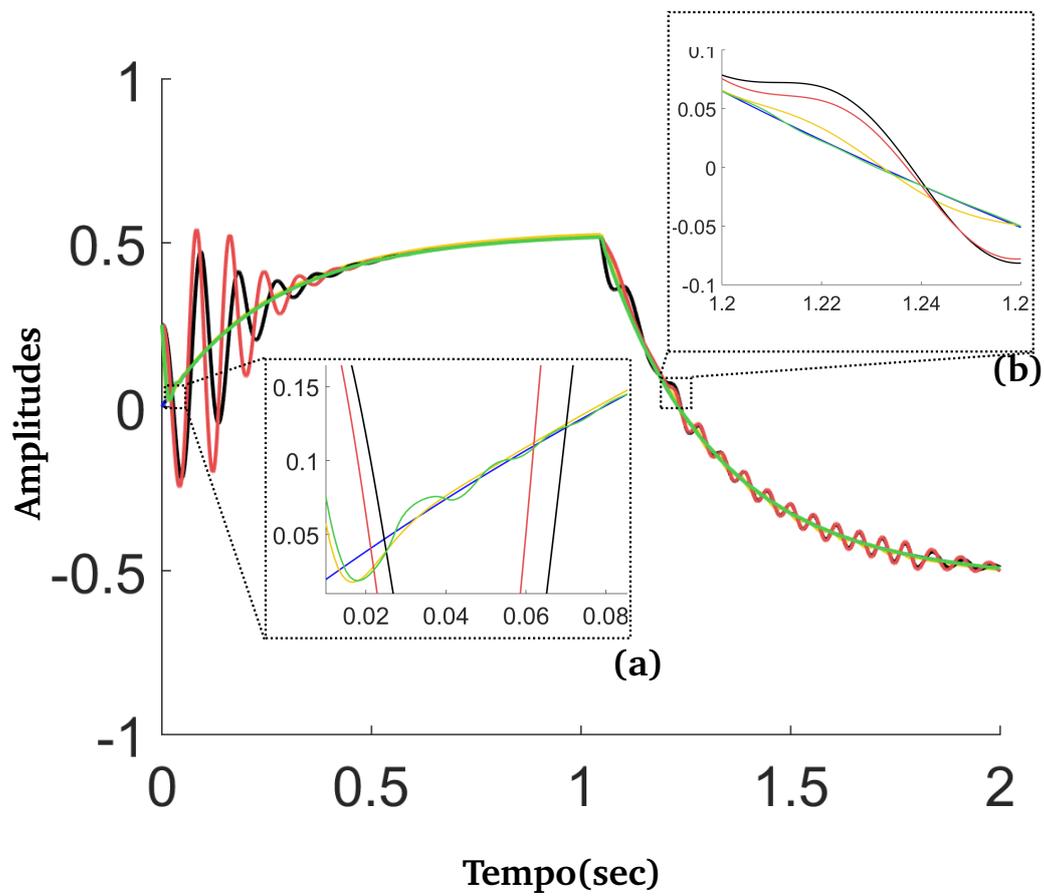


Fig. 5.1 Saídas Planta/Modelo: Modelo (—), MRAC (—), RBF-MRAC (—), RBF-HTAC (—) e RBF-DMARC (—)

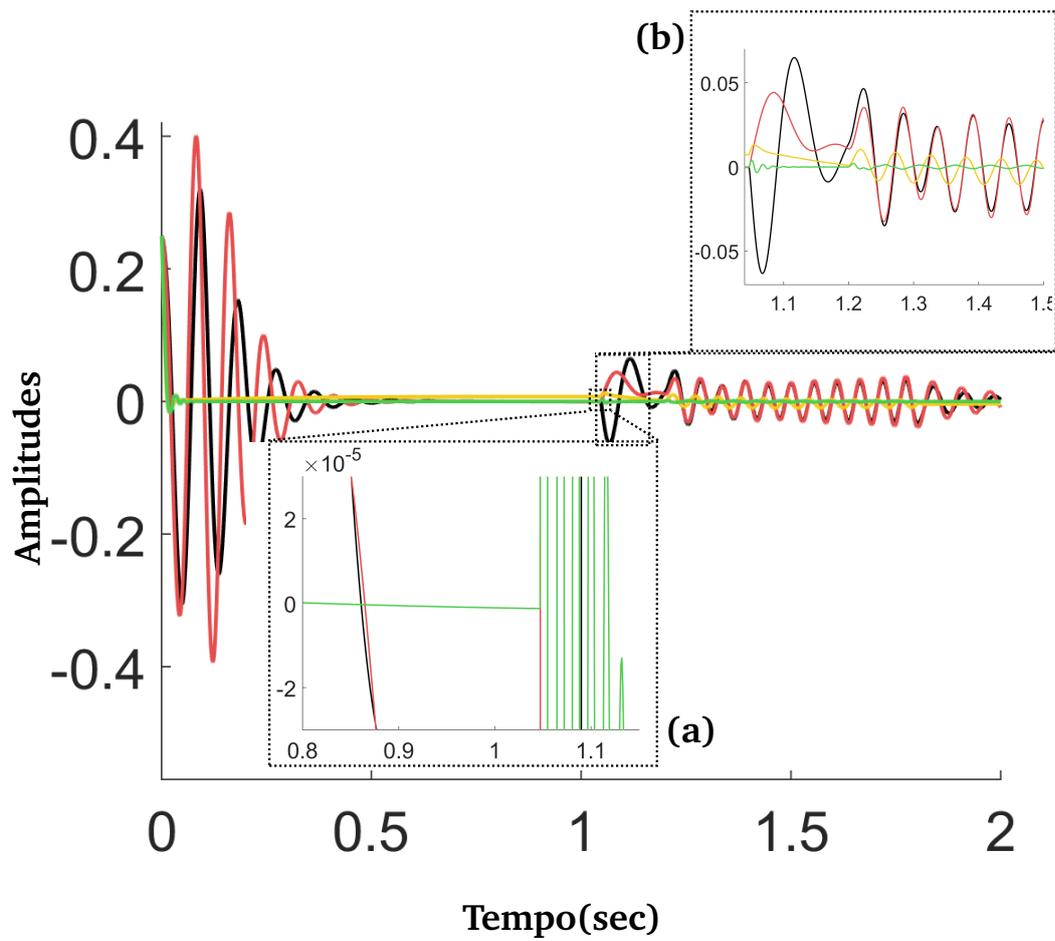


Fig. 5.2 Erros de Saída: MRAC (—), RBF-MRAC (—), RBF-HTAC (—) e RBF-DMARC (—)

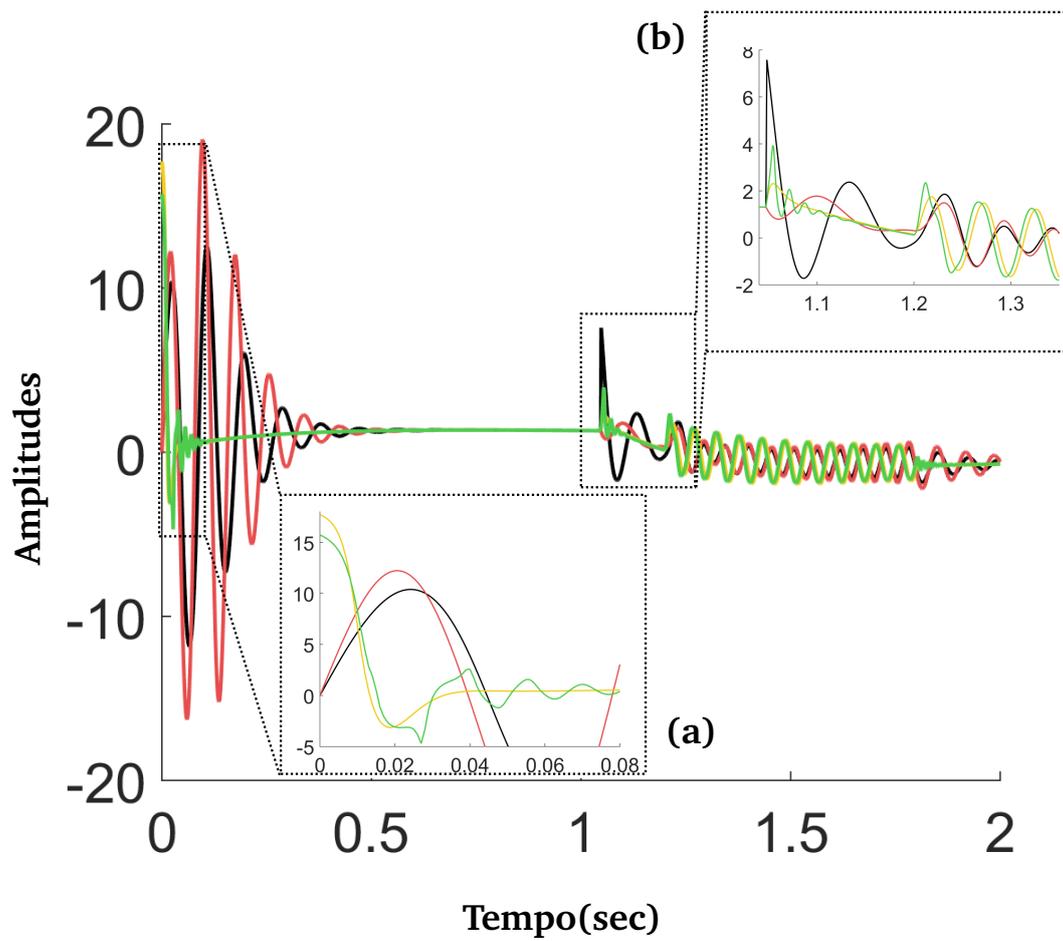


Fig. 5.3 Sinais de Controle: MRAC (—), RBF-MRAC (—), RBF-HTAC (—) e RBF-DMARC (—)

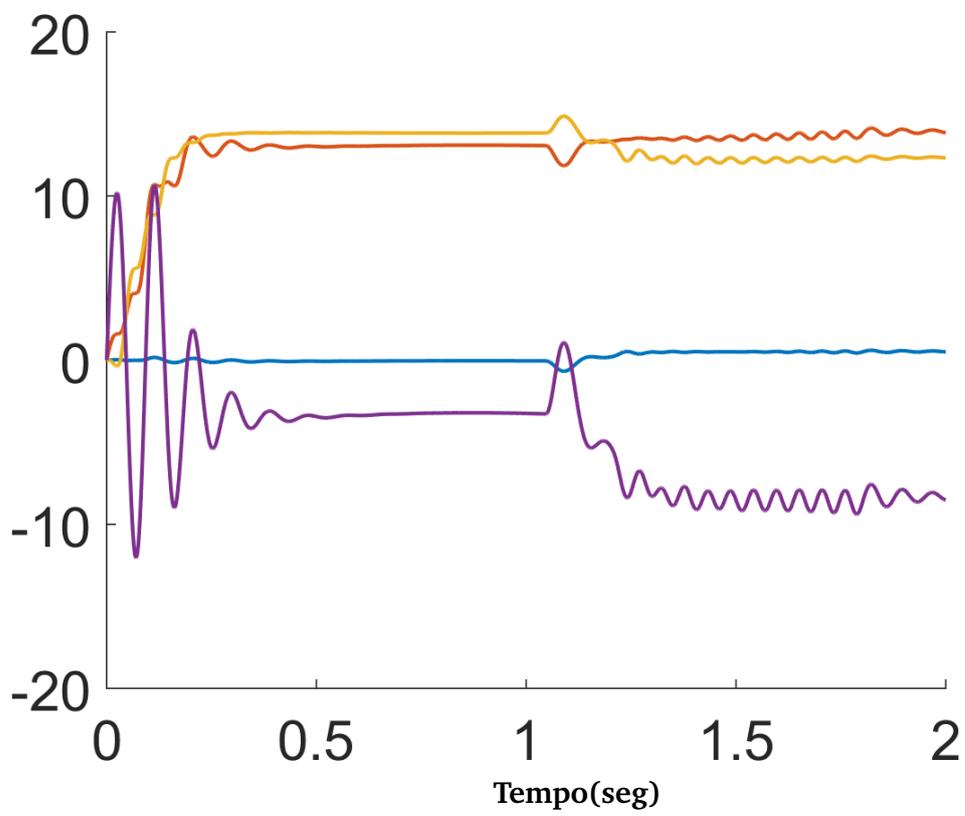


Fig. 5.4 Parâmetros do MRAC: θ_y (—), θ_{v_y} (—) e θ_{v_u} (—) θ_r (—)

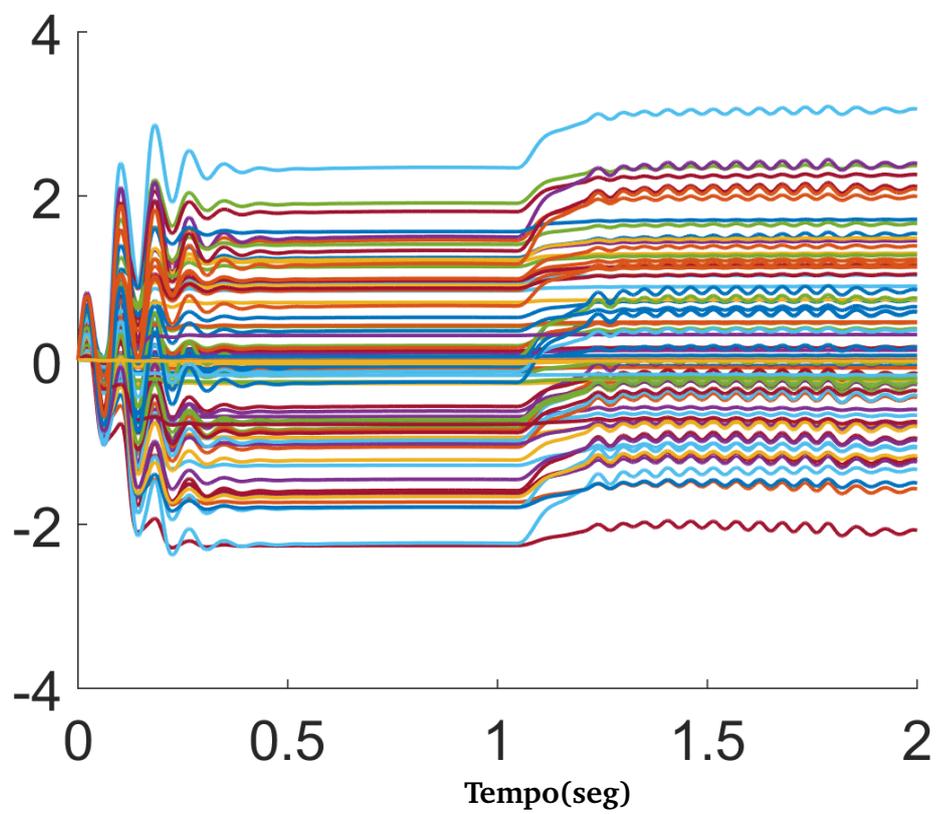


Fig. 5.5 Parâmetros da Rede RBF com Leis do MRAC (4.12)

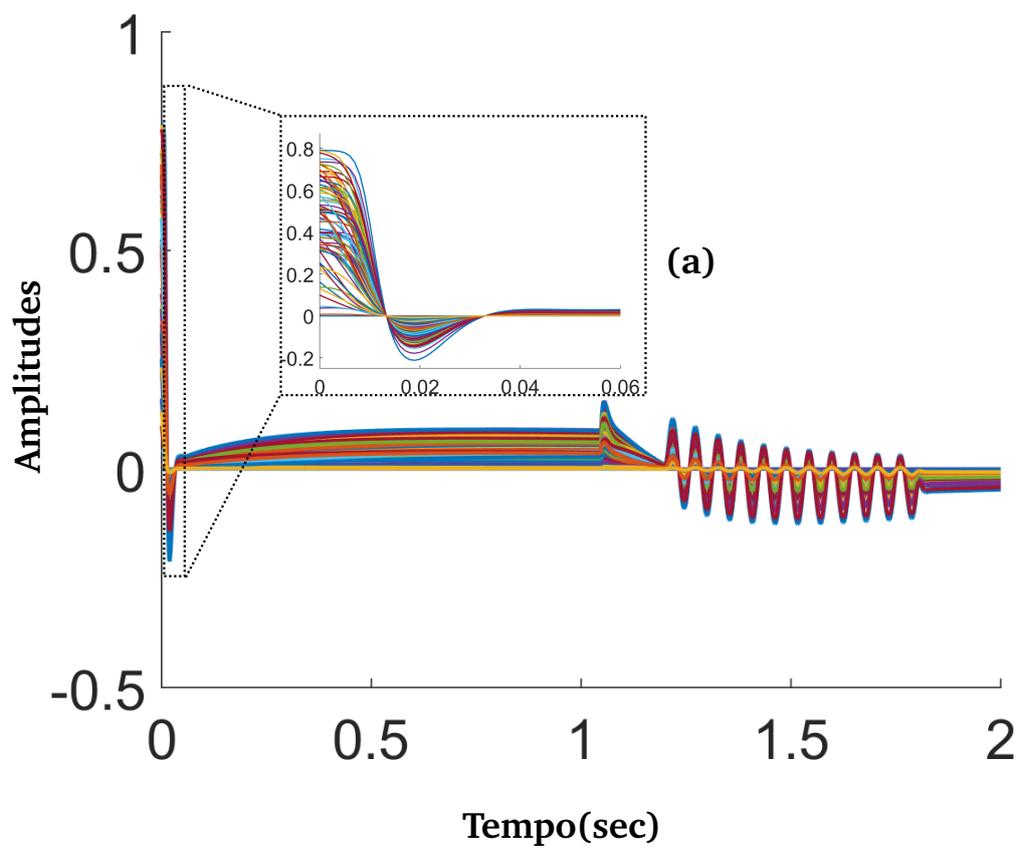


Fig. 5.6 Parâmetros da Rede RBF com Leis Tangente Hiperbólica ($w_i = \bar{w} \operatorname{tgh}(g_i e_0)$)

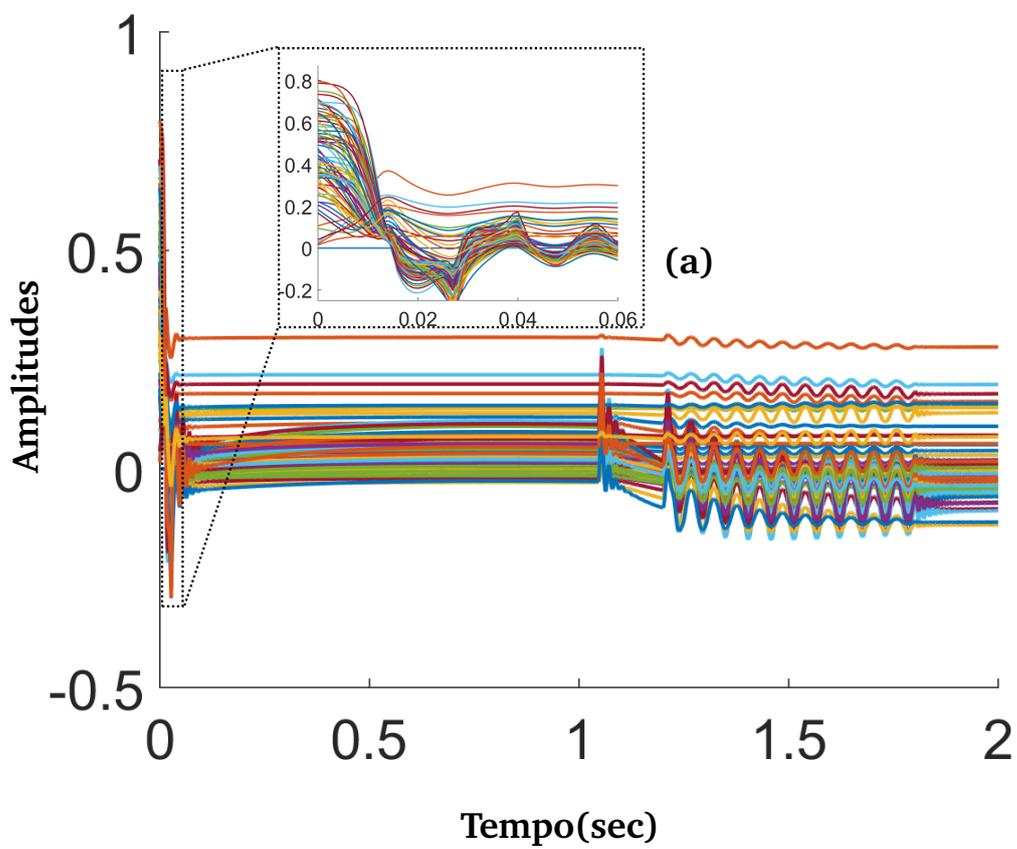


Fig. 5.7 Parâmetros da Rede RBF com Leis em Modo Dual (4.6)-(4.8)

5.3 Conclusão do Capítulo

Neste capítulo, foi possível observar os resultados obtidos pela metodologia de controle em modo dual proposta neste trabalho. Também foram feitas comparações entre diferentes estratégias para a adaptação dos pesos da rede RBF: leis integrais puras e leis com tangente hiperbólica. Conforme foi bastante salientado, as leis integrais levam o sistema a apresentar muitas oscilações durante o transitório, no entanto, tem desempenho satisfatório em regime permanente e os parâmetros adaptados evoluem melhor. Nas simulações, a aplicação das leis do MRAC na rede RBF, chamada de RBF-MRAC, fez com que a rede se mostrasse adequada para a convergência do sistema em regime permanente e com boa convergência dos pesos, mas o sistema também apresentou oscilações durante o transitório, conforme foi comentado. No controle baseado nas leis com tangente hiperbólica, usada para aproximar o comportamento do VS-MRAC sem o *chattering*, pretende-se acelerar a convergência e agregar robustez ao sistema em malha fechada. O controle com a estratégia com tangente hiperbólica, a rede RBF-HTAC, apresentou rápido transitório e rejeição de perturbações, mas mostra erro em regime permanente. A metodologia em modo dual na rede RBF-DMARC foi a que mais se destacou, pois ela apresentou bom transitório e convergência em regime permanente.

Capítulo 6

Conclusões

Neste trabalho foi apresentada uma estratégia de controle utilizando uma rede RBF adaptada em modo dual. Essa metodologia visa unir as propriedades do controle MRAC e do VS-MRAC na adaptação dos pesos da rede RBF, propiciando ao controle um rápido transitório, robustez e um sinal de controle suave em regime permanente aplicado a sistemas não lineares.

A necessidade de uma estratégia que contemple as vantagens apontadas deve-se ao fato de que os sistemas reais não podem ser facilmente modelados, e mesmo com a disposição de um modelo, o sistema pode mudar seu comportamento devido a muitos fatores, tornando o modelo impreciso. Logo, as técnicas de controle adaptativo emergiram para resolver esses problemas. Surgiram diversos tipos de controle que foram aplicados às mais variadas classes de sistemas. Foi destacado nesta tese o controle MRAC, um dos pioneiros e mais básicos da área. Seu objetivo é basicamente ajustar-se através do erro de saída entre a planta e um modelo de referência através de leis integrais para os parâmetros. No entanto, como sabe-se, o MRAC apresenta falta de robustez e desempenho insatisfatório durante o transitório. Logo, a necessidade de aumentar-se a robustez dos sistemas de controle adaptativo fez surgir novas estratégias, dentre as quais foi abordada o VS-MRAC, utilizando funções chaveadas para ajustar os parâmetros do controlador. O uso de funções chaveadas, ou descontínuas, mostraram-se adequadas na presença de distúrbios. Assim, o sistema para o sinal de controle baseado nesta estratégia apresenta maior rapidez de convergência, podendo, inclusive, apresentar convergência em tempo finito. A desvantagem do VS-MRAC está no seu sinal de controle, que apresenta o fenômeno de *chattering* em regime permanente. Com os avanços, pesquisadores propuseram a junção do MRAC com o VS-MRAC como nova estratégia em modo dual, fornecendo ao sistema de controle em malha fechada, uma resposta rápida no transitório, robustez e sinal de controle sem *chattering*. A técnica em modo dual é parte da proposta neste trabalho na adaptação dos pesos de

uma rede RBF, e aplicado no controle de sistemas não lineares.

Neste texto, foi feita uma análise da rede RBF aplicada no controle adaptativo. No geral, a rede RBF é uma estrutura de aprendizagem da família das redes neurais artificiais, composta por funções de base radial e com grande capacidade de aproximação não linear. O emprego das redes RBF como controlador é muito comum e mostra-se promissor em aplicações não lineares de difícil modelagem, e em que as estratégias mais tradicionais são insatisfatórias ou restritivas. A rede RBF proposta neste trabalho é aplicada numa estrutura similar à do MRAC. Uma análise com base na derivada do vetor da camada oculta da rede, em uma vizinhança de um ponto, mostrou que a rede pode ser aplicada na aproximação do sinal de controle ideal do MRAC, que pode fazer o sistema tender para o modelo de referência. Mostrou-se que o espaço tangente da função que se deseja aproximar no ponto em análise pode ser gerado por $2n - 1$ gaussianas com os parâmetros adequados, em que n é a ordem do sistema controlado. E que a probabilidade de existirem essas gaussianas próximas a esse ponto é elevada, desde que a forma de distribuição dos centros gaussianos da rede RBF seja contemplada no projeto da rede RBF. Assim, é suficiente que se distribua aleatoriamente as $N > 2n - 1$ gaussianas no espaço onde o sistema irá operar.

Retornando ao controle em modo dual, a ideia apresentada consiste em definir uma região de transição para o erro de saída no ponto k , em que o processo adaptativo sofreria uma transição suave do VS-MRAC para o MRAC. Os parâmetros σ_i e \mathbf{c}_i não sofrem adaptação, apenas os pesos w_i , através de dois termos: w_{ai} , que é responsável pelo regime permanente, e w_{si} , que é responsável pelo transitório. Ao invés de se utilizar a função chaveada do tipo sinal, foi utilizada a função tangente hiperbólica, o que reduz o *chattering*, e uma função secante hiperbólica que é utilizada para regular o efeito da ação integral, reduzindo-a no transitório e aumentando-a em regime permanente.

Neste trabalho, nas provas de estabilidade foram utilizadas as equações do erro de saída reformuladas para os parâmetros da rede RBF. Foram feitas análises de estabilidade para a rede com leis integrais puras e chaveadas. A principal análise foi para as leis em modo dual, em que foi mostrada a convergência do sistema para um conjunto residual de tamanho determinado pelos parâmetros de projeto. A prova foi separada em duas partes, onde foi verificada a convergência do sistema atuando com leis chaveadas e a outra para leis integrais.

As simulações apresentadas mostraram o desempenho da rede RBF em modo dual. Foi possível observar sua capacidade em rejeitar perturbações, robustez e rápido transitório. Nas simulações o sistema mostrou-se livre de *chattering*. Foi feita também uma comparação da rede RBF treinada com os métodos isolados, isto é, com leis de

adaptação integrais puras e com leis com tangente hiperbólica.

6.1 Contribuições e Perspectivas da Pesquisa

Este trabalho foi fonte para a produção do artigo intitulado *Controle Com Adaptação em Modo Dual Utilizando uma Rede de Gaussianas* que foi submetido e aceito para apresentação no Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI-2013), em sua décima primeira edição, que aconteceu no período de 13 a 17 de outubro de 2013, em Fortaleza-CE. Posteriormente foram feitas adições às análises iniciais e submetido um artigo na revista *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, que foi aceito recentemente.

Como andamento da pesquisa, pode-se buscar a implementação da estratégia em modo dual em uma planta real. Outro caminho é aprofundar as análises teóricas, avaliando um caso mais geral de controle para plantas com grau relativo maior que 1. Isto parece ser intuitivo se for aproveitada a ideia dos trabalhos existentes para o caso de grau relativo arbitrário do VS-MRAC, onde se utiliza a predição do erro de saída e cadeias de erros auxiliares para se obter o sinal de controle adequado. No último estágio dessas cadeias, seria utilizada a rede RBF em modo dual para o caso de grau relativo unitário. Outra questão deixada em aberto aqui, diz respeito à presença de dinâmica não-modelada com as leis em modo dual. A robustez da rede RBF seria possivelmente mantida devido às características das gaussianas em manter os sinais uniformemente limitados, mas o que seria necessário para manter o sistema dentro do raio de ação das gaussianas é uma questão que poderia ser estudada. Outro campo poderia ser no desacoplamento de sistemas MIMO. O autor desta tese utilizou uma rede RBF para desacoplar o modelo de um gerador síncrono e as leis de adaptação utilizadas foram leis integrais puras. A aproximação de sistemas inversos pode ser entendida também observando o comportamento local da rede RBF. Se ela pode gerar o espaço tangente da função desconhecida, é possível também, por esta razão, que a rede possa realizar o caminho inverso, ou seja, pelas medições dos sinais e derivadas, a rede poderia fornecer as entradas correspondentes às saídas medidas. Isso também pode ser estudado pelo teorema de funções implícitas e das funções inversas. As funções implícitas entre as entradas e as saídas poderiam ser formuladas utilizando as respostas da camada oculta, e a reprodutibilidade do sinal de controle poderia ser alcançada em função das gaussianas e não dos parâmetros da planta. São ideias que podem ser amadurecidas para as próximas etapas que se iniciarem a partir deste texto.

Referências Bibliográficas

Astrom, Karl Johan e Bjorn Wittenmark (1994), *Adaptive Control*, 2ª edição, Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., Boston, MA, USA.

Bartolini, Giorgio, Alessandro Pisano e Elio Usai (2009), 'On the second-order sliding mode control of nonlinear systems with uncertain control direction', *Automatica* **45**(12), 2982 – 2985.

URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109809004282>

Broomhead, D. S. e David Lowe (1988), 'Radial Basis Functions, Multi-Variable Functional Interpolation and Adaptive Networks', *Complex Systems* **2**, 321–355.

Chen, Fu-Chuang e H.K. Khalil (1990), Adaptive control of nonlinear systems using neural networks, em 'Proceedings of the 29th IEEE Conference on Decision and Control', pp. 1707 –1712 vol.3.

Chen, Tianping e Hong Chen (1995), 'Approximation capability to functions of several variables, nonlinear functionals, and operators by radial basis function neural networks', *IEEE Transactions on Neural Networks* **6**(4), 904–910.

Cunha, Caio D., Aldayr D. Araujo, David S. Barbalho e Francisco C. Mota (2005), 'A dual-mode adaptive robust controller applied to the speed control of a three-phase induction motor', *Asian Journal of Control* **7**(2), 197–201.

Dias, Samaherni, Kurios Queiroz, Aldayr Araujo e Anfranserai Dias (2016), 'Robust control of robotic manipulators based on left inverse system and variable structure model reference adaptive control', *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing* pp. n/a–n/a.

URL: <http://dx.doi.org/10.1002/acs.2663>

Frikha, Slim, Mohamed Djemel e Nabil Derbel (2010), 'Neural network adaptive control scheme for nonlinear systems with lyapunov approach and sliding mode', *International Journal of Intelligent Computing and Cybernetics* **3**(3), 495–513.

- Guo, Huijun, Suifang Lin e Junhua Liu (2006), 'A radial basis function sliding mode controller for chaotic lorenz system', *Physics Letters A* **351**(4-5), 257 – 261.
- Hsu, Chun-Fei (2011), 'Adaptive dynamic rbf neural controller design for a class of nonlinear systems', *Appl. Soft Comput.* **11**(8), 4607–4613.
- Hsu, L. (1990), 'Variable structure model-reference adaptive control (vs-mrac) using only input and output measurements: the general case', *IEEE Transactions on Automatic Control* **35**(11), 1238 –1243.
- Hsu, L. e R. R. Costa (1989), 'Variable structure model reference adaptive control using only input and output measurements- part i', *Int. J. Control* **49**(2), 399–416.
- Hsu, Liu, A. D. de Araujo e R. R. Costa (1994), 'Analysis and design of i/o based variable structure adaptive control', *IEEE Transactions on Automatic Control* **39**(1), 4–21.
- Hsu, Liu, Aldayr D. Araujo e F. Lizarralde (1993), New results on input/output variable structure model-reference adaptive control (i/o vs-mrac): design and stability analysis, em 'American Control Conference, 1993', pp. 1096–1100.
- Hsu, Liu e J.A. Real (1997), Dual mode adaptive control with gaussian networks, em 'Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control, 1997', Vol. 4, pp. 4032–4037.
- Huang, Guang-Bin, Qin-Yu Zhu e Chee-Kheong Siew (2006), 'Extreme learning machine: Theory and applications', *Neurocomputing* **70**(1 - 3), 489 – 501. Neural Networks Selected Papers from the 7th Brazilian Symposium on Neural Networks (SBRN '04)7th Brazilian Symposium on Neural Networks.
URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0925231206000385>
- Huang, Shih-Jer e Kuo-Ching Chiou (2006), 'An adaptive neural sliding mode controller for mimo systems', *J. Intell. Robotics Syst.* **46**(3), 285–301.
- Ioannou, P. e K. Tsakalis (1986), 'A robust direct adaptive controller', *IEEE Transactions on Automatic Control* **31**(11), 1033–1043.
- Jinzhu, Zhang e Zhang Hongtian (2010), Vehicle stability sliding mode control based on rbf neural network, em '2nd International Conference on Advanced Computer Control (ICACC)', Vol. 4, pp. 243 –246.

- Khalil, Hassan K. (1996), *Nonlinear Systems*, Prentice Hall, Upper Saddle River, (N.J.).
URL: <http://opac.inria.fr/record=b1091137>
- Liu, Guorong e Xizheng Zhang (2008), Robust sliding-mode control for induction motor drive with rbf neural network based rotor speed estimation, em 'International Conference on Electrical Machines and Systems, 2008. ICEMS 2008.', pp. 1282–1286.
- Nouri, A.S., C.H. Mira e P. Lopez (1993), 'Variable structure model reference adaptive control using only input and output measurements with two sliding surfaces', pp. 2171–2177.
- Oliveira, O. C., A. D. Araujo e A. M. Martins (2011), Decoupling of a synchronous generator by an adaptive model reference control based on radial basis functions, Vol. 44, pp. 2638 – 2643. 18th IFAC World Congress.
URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1474667016440115>
- Oliveira, O. C., A. M. Martins e A. D. Araujo (2013), Controle com adaptação em modo dual utilizando uma rede de gaussianas, em 'Anais do XI Simposio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI 2013) - Fortaleza, CE'.
URL: <http://www.sba.org.br/SBAI/pdfs/7656.pdf>
- Park, J. e I. W. Sandberg (1991), 'Universal approximation using radial-basis-function networks', *Neural Computing* **3**(2), 246–257.
- Rohrs, C.E., Lena Valavani, M. Athans e G. Stein (1982), Robustness of Adaptive Control Algorithms in the Presence of Unmodeled Dynamics, em '21st IEEE Conference on Decision and Control, 1982', Vol. 21, pp. 3–11.
- Sanner, R. M. e J. J.E. Slotine (1992), 'Gaussian networks for direct adaptive control', *Trans. Neural Network* **3**(6), 837–863.
- Sastry, Shankar e Marc Bodson (1989), *Adaptive control: stability, convergence, and robustness*, Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA, capítulo 3, pp. 103,104.
- Young, K.D., VI. Utkin e U. Ozguner (1999), 'A control engineer's guide to sliding mode control', *Control Systems Technology, IEEE Transactions on* **7**(3), 328 –342.
- Yu, H., T. Xie, S. Paszczynski e B. M. Wilamowski (2011), 'Advantages of radial basis function networks for dynamic system design', *IEEE Transactions on Industrial Electronics* **58**(12), 5438–5450.

- Yu, Lei, Shumin Fei e Xun Li (2010), 'Robust adaptive neural tracking control for a class of switched affine nonlinear systems', *Neurocomputing* **73**(10 - 12), 2274 – 2279. Subspace Learning / Selected papers from the European Symposium on Time Series Prediction.
- Yuan, Li, He Feng-you e Ye Zong-bin (2009), Study on sliding mode speed control with rbf network approach for doubly-fed induction motor, *em* 'International Conference on Intelligent Human-Machine Systems and Cybernetics, 2009. IHMSC '09.', Vol. 2, pp. 339–342.
- Zhihong, Man, X.H. Yu, K. Eshraghian e M. Palaniswami (1995), A Robust Adaptive Sliding Mode Tracking Control Using an RBF Neural Network for Robotic Manipulators, *em* 'IEEE International Conference on Neural Networks, 1995. Proceedings.', Vol. 5, pp. 2403 –2408.

Apêndice A

Informações Matemáticas Auxiliares

Neste capítulo, serão transcritos resumidamente alguns conceitos matemáticos para auxiliar na leitura das análises matemáticas apresentadas nesta tese.

A.1 Normas e Espaço \mathcal{L}_p

Definição: A norma de um vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é dada por $\|\mathbf{x}\|$, e é uma função real $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$. A norma apresenta as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}\| &\geq 0 \\ \|\mathbf{x}\| &= 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0} \\ \|\alpha\mathbf{x}\| &= |\alpha| \|\mathbf{x}\| \text{ para } \alpha \text{ escalar} \\ \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| &\leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|\end{aligned}$$

para vetores arbitrários \mathbf{x} e \mathbf{y} e com dimensões compatíveis. Quando se tratar de valores escalares, $|\cdot|$ denota valor absoluto e possui as mesmas propriedades acima listadas. Considera-se $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ a norma euclideana de um vetor.

Quaisquer normas no espaço euclidiano são equivalentes

$$a\|\mathbf{x}\| \leq b\|\mathbf{x}\|_k \leq c\|\mathbf{x}\|_l$$

para constantes positivas a, b, c e inteiros positivos k, l .

Definição: A norma induzida ou norma de uma matriz arbitrária A é definida como:

$$\|A\| = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\|$$

e apresenta as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{Ax}\| &\leq \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\| \\ \|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| &\leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\| \\ \|\mathbf{AB}\| &\leq \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|\end{aligned}$$

para matrizes arbitrárias \mathbf{A} e \mathbf{B} e dimensões compatíveis. A tabela (A.1) mostra as normas mais usadas.

Norma no \mathbb{R}^n	Norma Induzida no $\mathbb{R}^{n \times n}$
$\ \mathbf{x}\ _\infty = \max_i x_i $ (Norma Infinita)	$\ \mathbf{A}\ _\infty = \max_i \sum_j a_{ij} $ (Soma dos módulos dos elementos de uma linha i)
$\ \mathbf{x}\ _1 = \sum_i x_i $	$\ \mathbf{A}\ _1 = \max_j \sum_i a_{ij} $ (Soma dos módulos dos elementos de uma coluna j)
$\ \mathbf{x}\ _2 = (\sum_i x_i ^2)^{\frac{1}{2}}$ (Norma Euclidiana)	$\ \mathbf{A}\ _2 = [\lambda_{\max}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})]^{\frac{1}{2}}$ (onde λ_{\max} é o máximo autovalor de $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$)

Tabela A.1 Principais Normas Induzidas no Espaço \mathbb{R}^n

Para funções no tempo, define-se a norma \mathcal{L}_p conforme a expressão (A.1).

$$\|\mathbf{x}(t)\|_p = \left(\int_0^\infty |\mathbf{x}(\tau)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \quad (\text{A.1})$$

para $p \in [1, \infty)$ e diz-se que $\mathbf{x} \in \mathcal{L}_p$ quando $\|\mathbf{x}(t)\|_p$ existe, ou seja, quando $\|\mathbf{x}(t)\|_p$ é finita. A norma \mathcal{L}_∞ é definida como

$$\|\mathbf{x}(t)\|_\infty = \sup_{t \geq 0} |\mathbf{x}(\tau)| \quad (\text{A.2})$$

e dizemos que $\mathbf{x} \in \mathcal{L}_\infty$ quando $\|\mathbf{x}(t)\|_\infty$ existe, ou seja quando $\|\mathbf{x}(t)\|_\infty$ é finita. Quando uma função no tempo pertence ao \mathcal{L}_∞ , a função é dita uniformemente limitada.

A.2 Conjuntos, Matrizes e Funções

A.2.1 Conjunto Aberto

Definição: Um **bola aberta** centrada num ponto $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ e raio $\delta > 0$ é um conjunto de pontos cuja distância a \mathbf{a} é menor que r . Assim:

$$B(\mathbf{a}, \delta) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta\}$$

Definição: Um conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ é **aberto** quando para qualquer ponto $\mathbf{x} \in S$, tem que existir uma bola aberta $B(\mathbf{x}, \delta)$ centrada em \mathbf{x} , tal que $B(\mathbf{x}, \delta) \subset S$.

Definição: Um caminho num conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua $f : I \rightarrow S$, definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Por exemplo, dado $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, o caminho $f : [0, 1] \rightarrow S$ $f(\mu) = (1 - \mu)\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$ é um caminho retilíneo que liga \mathbf{a} e \mathbf{b} . Em particular, uma bola aberta é conexa por um caminho retilíneo do tipo do exemplo acima. Generalizando, um caminho justaposto não-retilíneo pode ser construído por caminhos retilíneos.

Definição: Um conjunto aberto $S \subset \mathbb{R}^n$ é **conexo** se, e somente se, quaisquer dois pontos $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in S$ podem ser conectados por caminhos em S . Adicionalmente, se $S = \cup_i B_i$, para bolas abertas B_i ($i = 1, \dots, k$, para k finito), tem-se que S é conexo. Em particular, o $S = \mathbb{R}^n$ é conexo.

A.2.2 Positividade de Matrizes

Um matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ quadrada é dita simétrica se $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$. A definição de positividade de uma matriz quadrada e simétrica \mathbf{A} é dada na listagem:

1. Uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ quadrada é definida positiva se $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ com $|\mathbf{x}| \neq 0$.
2. Uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ quadrada é semi-definida positiva se $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ com $|\mathbf{x}| \neq 0$.
3. Uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ quadrada é definida negativa se $-\mathbf{A}$ é definida positiva.
4. Uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ quadrada é semi-definida negativa se $-\mathbf{A}$ é semi-definida positiva.

Para uma matriz simétrica definida positiva vale a seguinte relação:

$$\lambda_{\min}(\mathbf{A})\|\mathbf{x}\|^2 \leq \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \lambda_{\max}(\mathbf{A})\|\mathbf{x}\|^2$$

em que $\lambda_{\min}(\mathbf{A})$ e $\lambda_{\max}(\mathbf{A})$ são os autovalores mínimo e máximo de \mathbf{A} , respectivamente.

Uma função $V(t, \mathbf{x} > 0)$ é dita definida positiva se:

1. $V(t, \mathbf{0}) = 0$;
2. $V(t, \mathbf{x}) > 0$, para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ e $t \geq 0$.

Uma função $V(t, \mathbf{x}) \geq 0$ é dita semi-definida positiva se:

1. $V(t, \mathbf{0}) = 0$;
2. $V(t, \mathbf{x}') = 0$, para algum $\mathbf{x}' \neq \mathbf{0}$ e $t \geq 0$;
3. $V(t, \mathbf{x}) > 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$, $t \geq 0$.

Uma função $V(t, \mathbf{x})$ é definida negativa se $-V(t, \mathbf{x})$ é definida positiva.

A.2.3 Continuidade de Funções

Definição: Uma função $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é **contínua** no intervalo $[0, \infty)$ se dado $\epsilon_0 > 0$, existe um $\delta(\epsilon_0, t_0)$ tal que para todo $t_0, t \in [0, \infty)$ para o qual $|t - t_0| \leq \delta(\epsilon_0, t_0)$, tem-se $|f(t) - f(t_0)| \leq \epsilon_0$.

Definição: Uma função $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é **uniformemente contínua** no intervalo $[0, \infty)$ se dado $\epsilon_0 > 0$, existe um $\delta(\epsilon_0)$ tal que para todo $t_0, t \in [0, \infty)$ para o qual $|t - t_0| \leq \delta(\epsilon_0)$, tem-se $|f(t) - f(t_0)| \leq \epsilon_0$.

Definição: Uma função $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é **contínua por partes** se for contínua em qualquer intervalo $[t_0, t] \subset [0, \infty)$, exceto em um número finito de pontos de descontinuidade.

A.3 Considerações sobre Estabilidade

A estabilidade de um sistema tem várias definições. Do ponto de vista da \mathcal{L}_p -estabilidade, um sistema é dito \mathcal{L}_p -estável se, para todo sinal de entrada pertencente à norma \mathcal{L}_p , a saída também pertence à norma \mathcal{L}_p .

Considerando o sistema representado pela equação:

$$y(t) = \int_0^t h(t - \tau)u(\tau)d\tau$$

ou no domínio da frequência:

$$Y(s) = H(s)U(s)$$

se $u \in \mathcal{L}_p$ e $h \in \mathcal{L}_p$, então

$$\|y\|_p \leq c\|u\|_p$$

para uma constante $c \geq 0$ e $p \in [1, \infty]$.

Ponto de Equilíbrio: é um ponto em que as variáveis de estado do sistema permanecem estacionadas, ou seja, para o sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, temos um ponto de equilíbrio em \mathbf{x}^* , se $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$.

Um ponto de equilíbrio \mathbf{x}^* é estável, se para valores arbitrários de $t_0 \geq 0$ e $\epsilon > 0$, sendo $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t = t_0)$, existir um $\delta(\epsilon, t_0)$ tal que $|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*| < \delta$ implica que $|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*| < \epsilon$ para todo $t > t_0$. Em outros termos, uma trajetória das variáveis de estado $\mathbf{x}(t)$, partindo de uma condição inicial \mathbf{x}_0 , mantém-se próxima de \mathbf{x}^* .

Um ponto de equilíbrio \mathbf{x}^* é assintoticamente estável, se ele é estável e se para valores arbitrários de $t_0 \geq 0$, sendo $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t = t_0)$, existir um $\delta(t_0)$ tal que $|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*| < \delta(t_0)$ implica que $\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*| = 0$. Em outros termos, uma trajetória das variáveis de estado $\mathbf{x}(t)$, partindo de uma condição inicial \mathbf{x}_0 , mantém-se próxima e converge para \mathbf{x}^* .

A.3.1 Teoria de Lyapunov

O segundo método de Lyapunov permite determinar a natureza estável de um determinado ponto de equilíbrio. Esse método é basicamente a generalização da idéia que se alguma medida de energia associada ao sistema decresce, então o sistema tende ao seu ponto de equilíbrio.

Precisamos definir uma função $V(t, \mathbf{x})$ que represente a energia do sistema. A função escolhida deve ser definida positiva $V(t, \mathbf{x}) > 0$ e continuamente diferenciável.

Se mostrarmos que $\dot{V}(t, \mathbf{x})$ é definida negativa ou semi-definida negativa, mostramos que a energia associada ao sistema é não-crescente e o ponto de equilíbrio é pelo menos estável.

Vejam algumas conclusões que podemos ter dos sinais das funções de energia de Lyapunov:

Se $\dot{V}(t, \mathbf{x}) \leq 0$:

1. $\mathbf{x}^* = 0$ é um ponto de equilíbrio estável;
2. Uma trajetória das variáveis de estado $\mathbf{x}(t)$, partindo de uma condição inicial \mathbf{x}_0 , mantém-se próxima de \mathbf{x}^* .
3. $\mathbf{x}(t)$ é uniformemente limitado: $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{L}_\infty$.

Se $\dot{V}(t, \mathbf{x}) < 0$:

1. $\mathbf{x}^* = 0$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável;
2. $\mathbf{x}^* = 0$ é atrativo, isto é, uma trajetória das variáveis de estado \mathbf{x} partindo de uma condição inicial \mathbf{x}_0 converge para a origem, $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = 0$.

Lema A.3.1 (Kalman-Yakubovich-Lefschetz-KYL) *Dado um vetor \mathbf{h}_c , uma matriz assintoticamente estável A_c , um vetor \mathbf{b}_c , tal que (A_c, \mathbf{b}_c) seja controlável e $\mathbf{h}_c^T(sI - A_c)^{-1}\mathbf{b}_c$ seja uma função estritamente real positiva (ERP), existe $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$ e $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T > 0$ que satisfaz*

$$A_c^T \mathbf{P} + \mathbf{P} A_c = -2\mathbf{Q}, \mathbf{P} \mathbf{b}_c = \mathbf{h}_c$$

Lema A.3.2 (Barbalat) : *Se uma função diferenciável $f(t)$ tem um limite finito quando $t \rightarrow \infty$ e se $\dot{f}(t)$ é uniformemente contínua ($\ddot{f}(t) \in \mathcal{L}_\infty$ é uniformemente limitada), então $\dot{f}(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.*

Lema A.3.3 (Barbalat-2) : *Se $f, \dot{f} \in \mathcal{L}_\infty$ e $f \in \mathcal{L}_p$ para $p \in [1, \infty)$, então $f(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.*